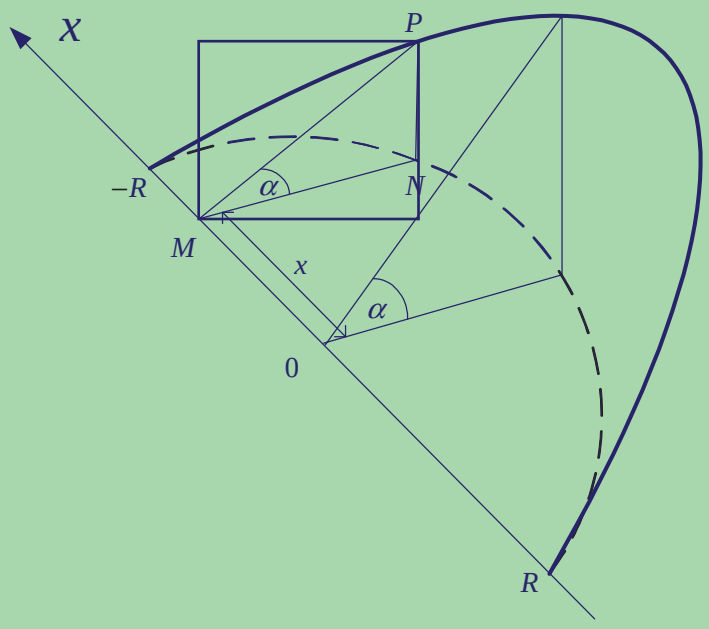
Matemáticas
conceptos previos al cálculo

Aplicaciones a ingeniería y ciencias económicas



Francisco Soler Fajardo
Lucio Rojas Cortés
Luis Enrique Rojas Cárdenas

ECOE EDICIONES

FRANCISCO SOLER FAJARDO

Especialista en Matemática Aplicada (Universidad Sergio Arboleda, Bogotá); Licenciado en Matemática (Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá); Diplomado en Tecnologías Aplicadas a la Enseñanza Virtual de la Matemática (Universidad Sergio Arboleda, Bogotá). Vinculado durante 36 años a la enseñanza de la matemática en universidades de Bogotá. Además de este libro tiene publicados: Fundamentos de Matemática, Cálculo con Aplicaciones, Álgebra y Programación Lineal con Aplicaciones a Ciencias Administrativas, Contables y Financieras; Fundamentos de Cálculo con Aplicaciones a Ciencias Económicas, Cálculo Diferencial con Aplicaciones a Ciencias Económicas, Cálculo Integral con Aplicaciones a Ciencias Económicas y Matemática Básica con una Introducción al Cálculo.
e-mail: fsolerf@gmail.com

LUCIO ROJAS CORTÉS

Magister en Matemática Aplicada (Universidad EAFIT de Medellín) especialización en Gerencia de Costos (Univ. Central), Licenciado en Matemáticas (Univ. Distrital Francisco José de Caldas), fue docente de matemáticas en las Universidades: Andes, Javeriana, Libre, Manuela Beltrán y UNAD. Vinculado actualmente en las Universidades; Militar Nueva Granada y Central. Coautor del libro Álgebra Lineal y Programación Lineal (Editorial ECOE), Introducción al Cálculo (Editado por la Universidad Central), Matemáticas Básicas Nivelación (Editado por la Universidad Militar Nueva Granada) y Precálculo (Editado por la Universidad Militar Nueva Granada), además tiene publicados varios artículos en la revista de ingeniería de la Universidad Militar Nueva Granada.
e-mail: lucio.rojas@unimilitar.edu.co,
lrojasc1@ucentral.edu.co

LUIS ENRIQUE ROJAS CÁRDENAS

Magister en Evaluación en Educación (Univ. Santo Tomás), Licenciado en Matemáticas (Univ. Distrital Francisco José de Caldas), fue docente de matemáticas en las Universidades: Javeriana, Pedagógica Nacional, Salle, Sergio Arboleda, Libre y Konrad Lorenz. Vinculado actualmente en las Universidades; Militar Nueva Granada y Central. Coautor del texto Matemáticas Básicas Nivelación (Editado por la Universidad Militar Nueva Granada) y Precálculo (Editado por la Universidad Militar Nueva Granada). Además es autor de varios artículos publicados en la revista de ingeniería de la Universidad Militar Nueva Granada y ha realizado algunas ponencias a nivel nacional e internacional sobre Evaluación por competencias en Educación Superior.
e-mail: luis.rojas@unimilitar.edu.co,
doctoreducationlerc@gmail.com

"MATEMÁTICAS"

CONCEPTOS PREVIOS AL CÁLCULO
con aplicaciones a ingeniería y ciencias económicas

Francisco Soler Fajardo,
Lucio Rojas Cortés
Luis Enrique Rojas Cárdenas.

ECOE
EDICIONES

Colombia • Bolivia • Chile • Costa Rica • Ecuador • El Salvador,
Guatemala • México • Panamá • Paraguay • Perú
República Dominicana • Venezuela.

Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia

Soler Fajardo, Francisco

Matemáticas conceptos previos al cálculo : aplicaciones a ingeniería y ciencias económicas / Francisco Soler Fajardo, Lucio Rojas Cortés, Luis Enrique Rojas Cárdenas. -- 1a. ed. -- Bogotá : Ecoe Ediciones, 2012.

746 p. – (Ciencias exactas. Matemáticas)

Incluye índice temático
ISBN 978-958-648-778-8

1. Matemáticas - Enseñanza superior I. Rojas Cortés, Lucio II. Rojas Cárdenas, Luis Enrique III. Título IV. Serie

CDD: 510.07 ed. 21 CO-BoBN– a817434

Colección: Clencias Exactas
Área: Matemáticas

Primera Edición: Bogotá., 2013
ISBN: 978-958-648-778-8

© Francisco Soler Fajardo, Lucio Rojas Cortés y Luis Enrique Rojas Cárdenas.
© Ecoe Ediciones
E-mail:correo@ecoeediciones.com
www.ecoeediciones.com
Carrera 19 No. 63C-32, Pbx: 2481449, fax. 346 1741

Coordinación editorial: Alexander Acosta Quintero
Diseño y Diagramación: Olga L. Pedraza R.
Diseño de Carátula: Edwin Penagos P.
Corrección de estilo: Carmen Sofía Cotes
Impresión: Imagen Editorial Impresores
e-mail: imagenimvega@yahoo.com

Impreso y hecho en Colombia.

Dedicatoria:

Con especial aprecio y cariño a nuestras familias, por su comprensión, estímulo y sacrificio.

Tabla de contenido

Capítulo 1
El conjunto de los números reales **1**
Objetivos **1**
El conjunto de los números naturales **2**
Fracciones **3**
Fracciones decimales 4
Otros conjuntos numéricos 4
El conjunto de los números racionales 6
Densidad de los racionales 7
Números irracionales 7
Conjunto de los números reales **8**
Axiomas de la adición y la multiplicación 9
Otras operaciones **11**
Propiedades 12
Propiedades de la radicación **14**
Potencias con exponente irracional 18
Potencia de un número positivo 22
Propiedades 22
Potenciación y la relación (<) 22
Resumen del capítulo 1 **25**
Estructura de los numeros reales 25
Axiomas de los números reales suma y producto 25
Potenciación 26
Propiedades 26
Radicación 26
Propiedades de la radicación 26

Capítulo 2
Expresiones algebraicas **27**
Objetivos **27**
Expresiones algebraicas **28**
Polinomios **30**

Operaciones **31**
Adición de polinomios 31
Sustracción 34
Signos de agrupación **35**
Introducción de signos de agrupación 36
Multiplicación de monomios **41**
División de monomios **44**
De un polinomio por un monomio 44
De un polinomio entre un polinomio 45
Productos notables **49**
Factorización **56**
Factorización de binomios 57
Binomio de la forma: a^n-b^n 59
Binomio de la forma: a^n+b^n 62
Trinomio cuadrado perfecto 65
Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción **67**
Trinomio de la forma: x^2+bx+c 69
Trinomio de la forma: ax^2+bx+c 72
Polinomios de cuatro o mas términos 73
Cubo perfecto de pinomios 73
Combinación de métodos 74
Mínimo común múltiplo y Máximo divisor común **77**
Entre polinomios 77
Fracciones algebraicas **80**
Operaciones 81
Adición 82
Multiplicación 82
División 83
Fracciones compuestas **84**
Racionalización 88
Recapitulación **94**
Resumen del capítulo 2 **100**
Operación aritmética **100**
Factores especiales **100**

Operación aritmética **100**
Álgebra: fórmulas de productos notables **100**

Capítulo 3
Ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones **101**
Objetivos: **101**

Ecuaciones, inecuaciones **102**
Ecuación e identidad **103**
Ecuaciones de primer grado 104
Solución de problemas 112
Determinación de variables 113
Verificación de la solución de un problema 115
Un método para la solución de problemas 118
Ecuaciones cuadráticas **126**
Propiedad 126
El Discriminante 129
Propiedades 133

Intervalos **138**
Operaciones entre intervalos **139**
Inecuaciones con una variable **141**
Propiedades de las desigualdades **143**
Inecuaciones de primer grado 143
Inecuaciones de segundo grado 144

Inecuaciones con valor absoluto **149**
Valor absoluto **149**
Propiedades 150
Problemas de aplicación 155
Ecuaciones con dos o mas incógnitas 159
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas 161
Casos 162

Métodos de solución **165**
Ecuaciones lineales con tres incógnitas **174**
Sistemas de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas **175**
Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas **176**

Solución de sistemas de tres ecuaciones lineales simultáneas con tres incógnitas 177
Solución por Sustitución: 178
Solución por reducción: 179
Solución por determinantes 179
El sistema no sea compatible. 181
Problemas que se resuelven por medio de un sistema de ecuaciones lineales. 186
Resumen del capítulo 3 191
Intervalos 191

Capítulo 4
Funciones y modelos funcionales 193
Funciones y modelos funcionales 194
Dominio de una función 197
Casos para hallar el dominio de una función 199
Caso I 199
Caso II 201
Restricción del dominio 203
Construcción de funciones 205
Gráfica de una función 210
Función par 216
Función impar 216
Álgebra de funciones 223
Composición de funciones 226
Función inyectiva o uno a uno 229
Definición de función inyectiva 231
Criterio de la línea vertical 232
Criterio de la línea horizotal 232
Función inversa 234
Tipos de funciones 240
Asíntotas verticales y horizontales 245
Transformaciones de funciones 252
Función cuadrática: $y = x^2$ 253

Función raíz cuadrada: $y = \sqrt{x}$ 253
Función cúbica: $y = x^3$ **253**
Función raíz cúbica: $y = \sqrt[3]{x}$ 253
Función exponencial: $y = a^x$ con $a>1$ 253
Función lineal: 254
Función idéntica: 254
Función constante: 255
Traslaciones verticales y horizontales 256
Traslaciones horizontales 257
Reflexiones verticales y horizontal 259
Contracción y alargamiento vertical 260
Contracción y alargamiento horizontal 261
Valor absoluto de una función 262
Función cuadrática 267
Función exponencial 270
Clasificación de las funciones exponenciales 271
Función exponencial natural 274
Propiedades 275

Logaritmos 275
Propiedades 278
Ecuaciones exponenciales y logarítmicas 285
Problemas 290
Aplicaciones de la función exponencial 294
El número e 294
Función logarítmica 296
Aplicaciones 297
Función logística 299

Funciones hiperbólicas 303
Identidades hiperbólicas 305
Modelos funcionales 309

Resumen del capítulo 4 319
Logarítmos 319
Exponentes 319
Tabla de resumen del capítulo 4 320

Capítulo 5
Trigonometría plana **323**

Ángulos y longitud de arco **324**
Tipos de ángulos **326**
Ángulo agudo 326
Ángulo recto 326
Ángulo obtuso 326
Ángulo llano 326
Ángulo reflejo 326
Longitud de arco 328
Relación entre grados sexagesimales y radianes **330**

Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera **332**
Coordenadas rectangulares **332**
Ángulos en posición normal **334**
Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera **334**
Signos algebraicos de las funciones **335**
Funciones trigonométricas de los ángulos cuadrangulares **336**
Triángulos y funciones trigonométricas de 30°, 45° y 90° 337
Identidades recíprocas 340
Cálculo de los valores trigonométricos de ángulos de 45º, 30º y 60º **341**
Ángulo de 30º 343
Ángulo de 60º 344

Identidades fundamentales **344**
Relaciones trigonométricas **347**
Resolución de triángulos rectángulos 349
Aplicaciones a los vectores 355
Componentes de un vector 355
Reducciones a funciones de ángulos positivos 357
Ángulo cofinales 357
Funciones del ángulo negativo 357
Gráficas de las funciones trigonométricas **358**
Función seno 359
Función coseno 359
Función tangente 360
Función cotangente 360

Función secante 361
Función cosecante 361
Variaciones de las gráficas de seno y coseno 362

Identidades trigonométricas 366

Fórmula de suma y diferencia de dos ángulos 371

Fórmula de la diferencia de seno y coseno 373

Fórmulas de suma y diferencia para la tangente 375
Fórmulas del ángulo doble y del ángulo medio 378
Fórmulas de ángulo doble 378
Fórmula para la tangente del ángulo doble 378
Fórmulas del ángulo medio 382

Identidades del ángulo medio 383

Identidades alternas para la tangente del ángulo medio: 383
Fórmulas de producto y de suma 384
Productos de senos y cosenos 384
Identidades suma y diferencia de senos y cosenos 386

Ley del seno y del coseno 387

Ley de los senos 387
Casos 388
Caso (LLA) 388
Ley de coseno 390

Versión alternativa 392

Aplicaciones 393
Funciones trigonométricas inversas 394
Gráficas de funciones trigonométricas inversas 395
Arc seno 396
Arc coseno 397
Arc tangente 398
Arc cotangente 399
Arc secante 399
Arc cosecante 400
Ecuaciones trigonométricas 400

Resumen del capítulo 5 425

Medición de ángulos 425
Distancia entre dos puntos 425
Ecuación de un círculo 425

Trigonometría del ángulo recto 426
Funciones trigonométricas de ángulos 426
Valores especiales de las funciones trigonométricas 427
Triángulos especiales 427
Identidades fundamentales 427
Identidades de cofunciones 428
Identidades de reducción 428
Fórmulas de reducción 428
Curvas seno y coseno 428
Gráficas de las funciones trigonométricas 429
Fórmulas de suma y resta de ángulos 430
Fórmulas de ángulo doble 430
Fórmulas de ángulo mitad 430
Identidades producto a suma 430
Suma a productos 430
Leyes de los senos y de los cosenos 431
Ley de los senos 431
Ley de los cosenos 431
Gráficas de las funciones trigonométricas inversas 432

Capítulo 6
Geometría analítica bidimensional 433

Geometría analítica bidimensional 434
Plano cartesiano 434
Distancia entre dos puntos 436
Punto medio 442
Pendiente e inclinación de una recta 444

Ecuación de la recta 449
Ecuación de una recta horizontal 450
Ecuación de una recta vertical 451
Ecuación de la recta en forma general 452

Rectas paralelas 454
Rectas perpendiculares 456
Problemas de aplicación 460
Secciones cónicas 467
Circunferencia 468

Parábola 472
Elipse 480
Hipérbola 490
Elementos de la hipérbola 492

Resumen del capítulo 6 499
Distancia entre dos puntos 499
Pendiente m de una recta 499
Forma punto- pendiente de una recta 499
Forma pendiente- intersección de una recta 500
Forma de intersección de una recta 500
Ecuación de una circunferencia 500
Parábolas con vértice en (h,k) 501
Elipses con centro en (h,k) y $a>b>0$ 501
Hipérbola con centro en (h,k) y $a>b>0$ 502

Capítulo 7
Geometría euclidiana 503

Antecedentes históricos 504

Términos indefinidos 504
Plano 505

Segmentos de línea 507
Congruencia de segmentos 507
Longitud de un segmento 508
Segmentos proporcionales 508

Concepto de ángulo 512
Congruencia de ángulos 512
Bisectriz de un ángulo 513
Medición de ángulos 513
Tipos de ángulos 515
Clasificación 517
Teorema de Thales 518

Rectas perpendiculares 519
Mediatriz de un segmento 520

Triángulos **521**
Clasificación de triángulos 523
Líneas en triángulos 525
Congruencia de triángulos 527
Semejanza de triángulos 530
Teorema de Herón 534
Teorema de Pitágoras 537
Prueba del teorema de Pitágoras 538
Polígonos **542**
Área del rectángulo 542
Área del paralelogramo 542
Área del cuadrado 543
Área del triángulo 544
Área del trapecio 546
Área del rombo 546
Área del polígono regular 547
Generalidades de un polígono regular **549**
Relaciones entre segmentos y apotemas en algunos polígonos regulares 550
Circunferencia y área del círculo 554
Longitud de arco, áreas de un sector y de un segmento 556
Medición de ángulos y arcos en un círculo **558**
Áreas y volúmenes de sólidos 563
Geometría del espacio 563
Ángulo diedro 563
Ángulo poliedro 564
Clasificación de sólidos **565**
Área del prisma 571
Volumen del prisma 572
Volumen de la pirámide 578
Área del tronco de pirámide regular 580
Volumen del tronco de pirámide regular 581
Superficie cilíndrica 582
Cilindro circular recto 582
Volumen del cilindro 583
Superficie cónica 584
Área lateral del cono 586

Volumen del cono truncado 588
Revolución de una línea poligonal regular 590
Volumen de la esfera 592

Resumen del capítulo 7 599
Paralelepípedo 599
Prisma 599
Cilindro circular recto 599
Cono circular recto 599
Tronco de un cono circular recto 600
Pirámide 600
Tronco de pirámide 600
Esfera 600
Triángulos semejantes 601
Triángulo 601
Triángulo rectángulo 601
Fórmula de Herón 601
Triángulo equilátero 601
Paralelogramo 601
Trapecio 602
Rectángulo 602
Triángulo 602
Círculo 602
Sector circular 602
Corona 602
Triángulo rectángulo 602

Apéndice A 603
Fracciones parciales 603
Descomposición en fracciones parciales 604

Apéndice B 615
Polinomios enteros 615
Elementos de un polinomio 615
Igualdad de polinomios 616
Adición y Multiplicación 617
Sustracción y División 617
Algoritmo de la división 618

Algo más sobre factorización **621**
Teorema del factor 622
División sintética (por coeficientes separados) 622
Ecuaciones de grado "n" **631**

Apéndice C **635**
Inducción matemática **635**
Principio de inducción matemática 636
Desarrollo binomial 642
Teorema del binomio 644

Respuestas a algunos ejercicios y problemas **653**

Índice temático **709**

Presentación

El bajo rendimiento en matemática de los estudiantes que ingresan a la universidad, en las diferentes carreras, se percibe en las altas tasas de mortalidad académica, esto ha obligado a las universidades a tomar medidas con el fin de disminuir la deserción sin tener en la necesidad de disminuir la calidad de la educación.

Una de las opciones que se ha decidido implementar es ofrecer un curso para subsanar este déficit y nivelar el conocimiento en matemática de los nuevos alumnos; esta clase, debe contar con una metodología que estimule la autonomía en el proceso de aprendizaje convirtiendo al estudiante en el principal protagonista, mientras el profesor cumple con la tarea de guiar, dirigir y apoyar el trabajo.

Por este motivo, este libro texto se convierte en una pieza fundamental para el apoyo del aprendizaje y se hace necesario como soporte fundamental en el proceso autodidacta. Considerando que son pocos los libros con estas características, hemos intentado desarrollar este texto que hemos llamado "**Matemáticas** *conceptos previos al cálculo. Aplicaciones a: ingeniería y ciencias económicas*" el cual creemos cumple con las necesidades y los requerimientos del mercado actual y que ofrecemos para su consideración.

Agradecimientos

Un agradecimiento especial al doctor **Reinaldo Núñez**, decano de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá, Colombia; amigo incondicional, por su interés, gestión y apoyo permanente al desarrollo de la cultura escrita en la universidad.

A la doctora **Edel Serrano Iglesias**, directora del Departamento de Matemáticas de la Universidad Central, por su estímulo y apoyo a la academia.

Mayor general **Eduardo Antonio Herrera Berbel**, rector de la Universidad Militar Nueva Granada.

Doctora **Martha Lucía Bahamon Jara**, vicerrectora académica de la Universidad Militar Nueva Granada.

Al doctor **Fernando Cantor Rincón**, decano de la Facultad de Ciencias de la Universidad Militar Nueva Granada.

Al doctor **William Becerra Salamanca**, vicedecano de la Universidad Militar Nueva Granada.

Al doctor **Antonio Velasco Muñoz**, director de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz, por su estímulo a las publicaciones.

A la doctora **María Patricia Jiménez de Borray**, directora del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad de la Salle.

Al doctor **Jairo Enrique Morales**, director del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Libre de Bogotá.

Maestro **Fernando Soto Aparicio**
"La doctrina de la realidad es una eterna discusión en el espacio y en el tiempo. Su obra es una metáfora de esa realidad. La nuestra la constituye expresiones.
El cruce de esos planes incluye esa perspectiva y por ello va con el mismo fervor, esperando que sus manos atiendan, el hecho particular de dedicarle con todo respeto este ejemplar".

Doctora **Ligia Amparo Quiñones Peynado**, psicóloga de la Universidad Militar Nueva Granada. Con sentimiento de aprecio.

De igual manera queremos expresar nuestros agradecimientos a los siguientes docentes por sus valiosas sugerencias en las distintas etapas del proyecto:

Pontificia Universidad Javeriana:
Fabio Molina Focazzio y Patricia Hernández.

Universidad Central:
Julio César Nieto, Amed Alfonso Alfonso, José Velasco, Numael Ramírez, Martha Valderrama, Humberto Cardozo, Carlos Mora, Pedro Rocha, Fabio Castellanos, Eva Cecilia Vargas, Myriam Sofía Rodríguez, Pablo León, Gloria Rodríguez, Ricardo Bernal, Ricardo de Armas, David Macías, y doctor Luis Facundo Maldonado.

Universidad Militar Nueva Granada:
Arturo Ramírez Baracaldo, Josué Fernando Roncancio, Adrián Gómez, Wilken Rodríguez, Oscar Aviles, Lucía Gutiérrez, Darío Domínguez, Solón Losada, Ricardo Vega, Pedro Pablo Pedraza, Nubia Quevedo, Luis Antonio Mesa, Rocío Buitrago, Angela Saavedra, Jorge Aponte, Horacio Bernal, José Bello, Jaime Duque, Luis

Eduardo Llano, Norma Constanza Sarmiento, Sandra Bello, Julio César Melo, Matílde Paéz, Claudia Andrea González, María Cristana Rodríguez, Jenny Carvajal, Martha Melo de Alonso.

Universidad de los Andes:
Ferney Benítez y Oscar Casas.

Fundación Universitaria Konrad Lorenz:
Al doctor **Elvers Medellín Lozano**, vicerrector general; Carlos Ramírez Betancourt, Benigno Lozano, Leonardo Jiménez Moscovitz, y Pervys Rengifo.

Universidad de la Salle:
Jesús María Cárdenas Beltrán, Ernesto Vargas y Felipe Lara.

Finalmente a nuestro amigo **Saúl Rojas Rodríguez**, ingeniero y lector, por quien sentimos una gran admiración.

Breve reseña sobre el contenido del libro

Capítulo I.
El conjunto de los números reales

Se definen los números naturales y se construyen los demás conjuntos numéricos, (enteros, racionales y reales), estos capítulos están complementados con diferentes tipos de aplicaciones. Se incluyen problemas de aplicación relacionados con tasas de interés.

Capítulo II.
Expresiones algebraicas

Se enfatiza en qué conjunto se está trabajando y se construye en principio, con base en los números reales, lo que se conoce como álgebra elemental.

Capítulo III.
Ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones

Se construye la Teoría de Ecuaciones a partir de las propiedades de los números reales, se presentan los problemas teniendo en cuenta aspectos como: codificación del lenguaje natural al lenguaje simbólico. Descodificación del lenguaje simbólico al lenguaje natural,

Y finalmente, se plantean y resuelven. Se incluyen sistemas de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas.

Se hace un desarrollo de ecuaciones exponenciales y logarítmicas con variadas aplicaciones. Finalmente se desarrollan inecuaciones de primero y segundo grado. Con valor absoluto, se plantean y resuelven problemas de aplicación.

Se estudia la estructura algebraica, como una copia de la estructura de los números reales, se heredan propiedades de las expresiones algebraicas.

Capítulo IV. Funciones y modelos funcionales	En este capítulo se hace un desarrollo de funciones, clasificándolas de acuerdo a sus características y se presentan ejemplos sobre modelos funcionales, también se utiliza la transformación de funciones para graficarlas; a partir de estos se construyen los modelos matemáticos. (Funciones elementales, función lineal, función cuadrática, función logística etc., con aplicaciones).
Capítulo V. Trigometría plana	Se presentan los conceptos básicos de trigonometría a partir de la geometría, y después se dan analíticamente, y se estudian como funciones. Se realizan aplicaciones de triángulos rectángulos y no rectángulos, identidades trigonométricas, ecuaciones trigonométricas y funciones inversas.
Capítulo VI. Geometría analítica	Se dan las ideas y conceptos básicos de la geometría analítica, y se estudian las principales ecuaciones como son la recta, la circunferencia y las cónicas. Se hace una presentación de estas ecuaciones modelándolas a situaciones de contexto real.
Capitulo VII. Geometría euclidina	Se presentan términos geométricos indefinidos, algunas construcciones básicas de la geometría euclidiana y teoremas como soportes básicos en la resolución de problemas de tipo geométrico. Se deducen algunas fórmulas de áreas de figuras planas y volumen de algunos sólidos; identificando y trazando prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas.

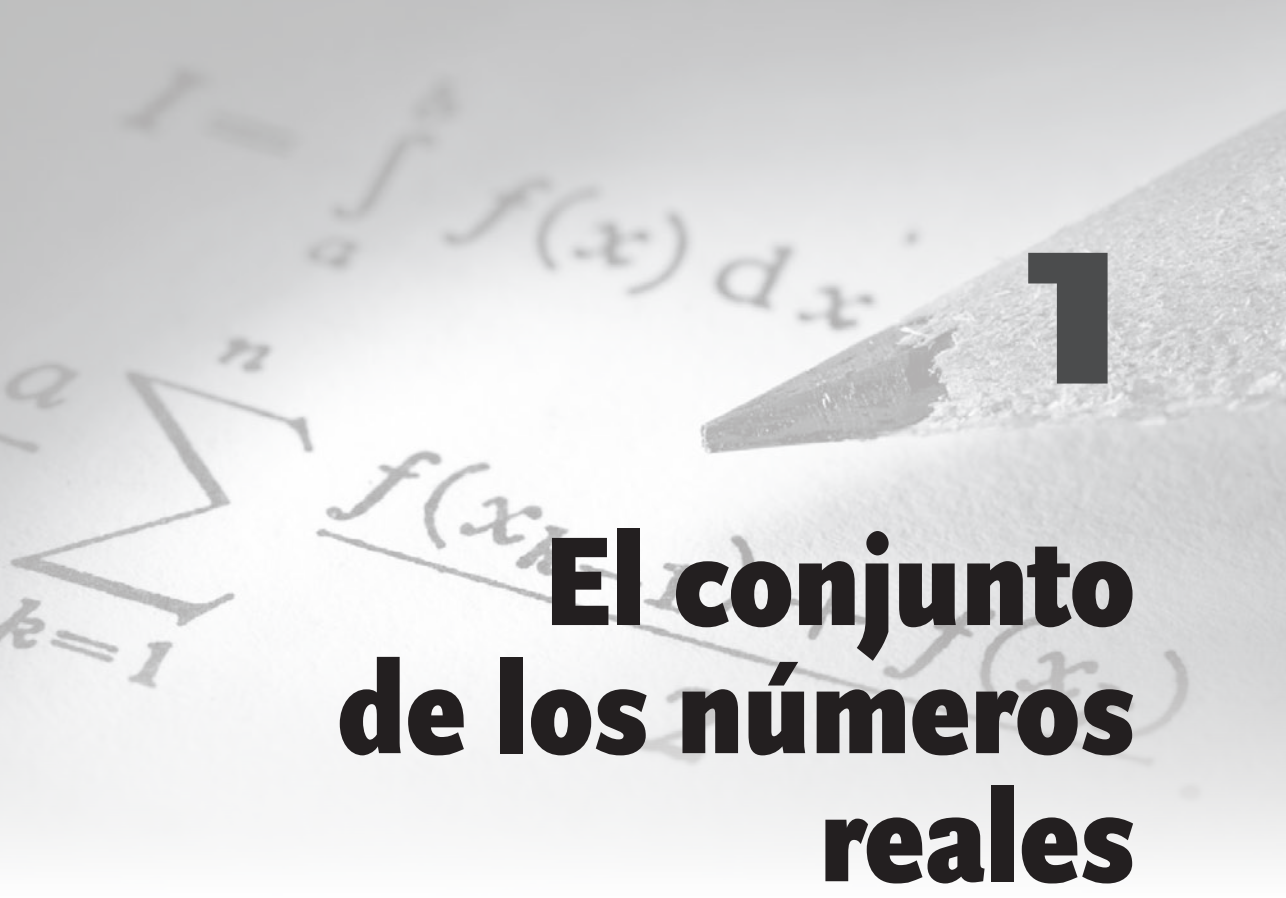
Apéndices

Como complemento a los capítulos anteriores se desarrollan tres apéndices de temas seleccionados y de rigor matemático que consideramos pertinentes y útiles en el abordaje de conceptos previos al cálculo; los cuales pueden ser opcionales, de acuerdo los programas dados.

Apéndice A. Fracciones parciales

Apéndice B. Polinomios enteros

Apéndice C. Inducción matemática



1

El conjunto de los números reales

Objetivos

- Identificar y comprender las propiedades, operaciones y relaciones en cada uno de los conjuntos numéricos.
- Realizar operaciones de suma, producto, división, potenciación y radicación de números reales.
- Utilizar las propiedades y las operaciones en los conjuntos numéricos para simplificar expresiones aritméticas.
- Identificar los axiomas de orden y utilizarlos para demostrar algunas propiedades.

El conjunto de los números naturales

La actividad práctica de contar es anterior a la aparición de la escritura; por ejemplo, para saber si un rebaño estaba completo se asociaba cada oveja con una piedra, en el montón de piedras había tantas piedras como ovejas; para verificar posteriormente, si el rebaño estaba completo, se hacía el proceso inverso; si sobraban piedras, hacían falta ovejas; si sobraban ovejas, era posible que de otro rebaño se hubieran introducido sin darse cuenta; si coincidían, estaban completas; implícitamente se estaba comparando el número de piedras con el número de ovejas.

Pues bien, este proceso se ha ido decantando con la aparición de la escritura y se van creando en las diferentes culturas símbolos para representar los diferentes numerales. Cuando las necesidades son mayores, como contar y representar cantidades grandes, se mejora la simbología hasta obtener los sistemas de numeración posicional cuyas representaciones más adoptadas son el **decimal, el binario, el octal y el hexadecimal**.

El desarrollo y evolución de las actividades diarias del hombre, lo conlleva a hacer intercambios comerciales, entre otras, y lo obliga, a efectuar operaciones con los números como adición, sustracción, multiplicación y división; esto induce a encontrar algoritmos para simplificar los cálculos y a un estudio sistemático de las propiedades.

Esto se sintetiza en los sistemas de números, en principio el sistema de los números naturales.

El sistema de numeración usual para la representación de números naturales es el decimal; los avances tecnológicos requieren otros sistemas de numeración como el **binario, el octal y el hexadecimal.**

En el sistema de numeración decimal, el proceso de contar se **comienza** con el uno (1). Una vez escogido el número 1, se halla el sucesor de este:

$1 + 1 = 2$; el sucesor de 2; $2 + 1 = 3$, y así sucesivamente se obtiene el conjunto de los números naturales.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5. . .\}$$

En general, dado un número natural cualesquiera a, podemos **hallar siempre** su sucesor $a+1$; dos números naturales a y b tienen **el mismo sucesor**, si y solo si son **iguales**; es decir:

Para, $a,b \in \mathbb{N} \quad a+1 = b+1$ si y solo si $a = b$

Fracciones

Además de contar es necesario **medir** (tiempo, rapidez, longitud etc.). La forma usual de medir es elegir una unidad de medida y **contar** el número de unidades contenidas en la cantidad que queremos medir. Es posible que el número de unidades no sea exacto; por ejemplo, el peso del cuerpo puede ser mayor de 70 kg, pero menor de 71 kg, por lo que el proceso de contar se hace insuficiente, es necesario subdividir la unidad en cierto número de partes iguales n; una de estas partes la notamos $\frac{1}{n}$; si una cantidad contiene m de estas partes, su medida la notamos $\frac{m}{n}$; a esta expresión se le llama una **fracción**.

En el proceso de medir, una vez hecha la subdivisión, si el número de estas no es exacta, volvemos a subdividir hasta obtener la cantidad exacta o una aproximación deseable de ella (o hasta donde lo permita el dispositivo de medición).

Ejemplo

Una longitud se puede expresar en metros, si el número de metros no es exacto, se subdivide en decímetros, a su vez si este no es exacto lo subdividimos en cms hasta donde lo permita el instrumento de medición.

Desde otra perspectiva, podemos ver las fracciones como números sin referencias concretas y definir las operaciones **adición, multiplicación** y establecer relaciones que tengan por lo menos, las mismas propiedades de los números naturales.

Si n es un número natural tal que $n>1$, se designa $\frac{1}{n}$; como la $n-$ esima parte de uno.

Si esta parte se toma m veces, obtenemos el número $m.\frac{1}{n}$; se nota también $\frac{m}{n}$.

Los números obtenidos de esta manera determinan las fracciones, m se llama el **numerador** y n el **denominador**.

Observemos que en la definición de $\frac{m}{n}$, n es mayor que 1, si $n=0$ la fracción no está definida; y si $n= 1\ \frac{m}{n} = m$

Si $m>n$ la fracción es mayor que 1, y se denomina **impropia.**
Si $m<n$ la fracción es menor que 1, y se denomina **propia**.

Fracciones decimales

En el sistema de numeración que utilizamos, el decimal. El valor de cada una de las cifras depende de su posición, por ejemplo:

$$7456 = 7\times10^3+4\times10^2 + 5\times10^1 + 6\times10^0$$

(7 miles, 4 centenas, 5 decenas y 6 unidades); pues bien, al extender esta notación a fracciones cuyo denominador sea una potencia de 10, obtenemos las **fracciones decimales**

Otros conjuntos numéricos

El conjunto de los números enteros

Para hallar expresiones numéricas que representen, por ejemplo: una deuda de $800, una temperatura de 10 ^{o}C bajo cero, 20 metros bajo el nivel del mar, estados de pérdidas, déficit, saldos en rojo, podemos observar que los números naturales no son suficientes para representar estas situaciones; por lo cual se hace necesario ampliar el sistema de los números naturales incluyendo los números negativos.

Al conjunto ampliado se denomina conjunto de los números enteros y se representa por $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\quad \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \quad\}$$

Otra forma de introducir el conjunto de los números enteros es:

Sea $10 + x = 15$. Esta igualdad se puede resolver en el sistema de los números naturales, puesto que $15 \geq 10$, pero en general, al hallar x en $a + x = b$, no siempre tiene solución en los números naturales.

Ejemplo

En $x + 10 = 3$ no hay un número natural x, que, sumado con 10, dé como resultado 3.

Si deseamos que igualdades de este tipo tengan siempre solución para x es necesario ampliar el conjunto de los números naturales, conservando las propiedades con respecto a la adición.

En $x + 10 = 3$ si se quiere hallar el valor de x necesitamos un número tal que, sumado con 10, dé cero.

Por la compatibilidad de la adición con respecto a la igualdad tenemos que:

$$x + 10 = 3$$

$$(x + 10) + \square = 3 + \square \qquad \text{Por la asociatividad, tenemos}$$

$$(1)\quad x + (10 + \square\ ) = 3 + \square \qquad \text{Necesitamos que}$$

$$\text{Cómo}\quad 10 + \square = 0 \qquad \text{remplazando en (1)}$$

$$x + 0 = 3 + \square \qquad \text{y por la modulativa para la adición}$$

$$x = 3 + \square$$

En esencia, lo que se necesita es que para cada número natural a exista un número $\square$ tal, que $a + \square = 0$

Denotamos al $\square$ como $-a$ y se denomina el **inverso aditivo de a**.

El conjunto de los inversos aditivos de los números, naturales excepto cero, se le denomina, enteros negativos, que se representan por $\mathbb{Z}^-$

$$\mathbb{Z}^- \{\ldots -3, -2, -1\}$$

El conjunto de los números naturales, unido con el conjunto de los enteros negativos, se denomina el conjunto de los números enteros que representamos por $\mathbb{Z}$.

El conjunto de los números racionales

Para que la sustracción de fracciones sea siempre posible es necesario introducir fracciones negativas.

Si a y b son números naturales, $b \neq 0$, tenemos la fracción $\frac{a}{b}$; la fracción negativa sería: $-\frac{a}{b}$ y es tal, que:

(*) $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = \frac{a-a}{b} = 0$; la fracción $\left(-\frac{a}{b}\right)$ es el inverso aditivo de $\frac{a}{b}$

Si reemplazamos en (*) $-\frac{a}{b}$ por $\frac{-a}{b}$ o por $\frac{a}{-b}$ obtenemos el mismo resultado.

Como el inverso aditivo debe ser único, tenemos que $-\frac{a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$

Igual sucede si reemplazamos $\left(-\frac{a}{b}\right)$ por $\frac{a}{b}$.

Este hecho permite definir el conjunto de los racionales como fracciones, donde el numerador y el denominador son enteros, un número natural diferente de cero.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | \ a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0\}$$

Para a y c, números enteros y b y d, números naturales diferentes de cero, tenemos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solo si } a \cdot d = b \cdot c$$

De la definición de igualdad de números racionales se tiene que:

$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b} \text{ (amplificación)}$$

De igual forma, si existe un número entero c que divide a a y a b, tenemos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c \times m}{c \times n} \text{ por lo tanto } \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \text{ (simplificación)}$$

Densidad de los racionales

Ejemplo

Entre 0 y 1 existe un número racional, por ejemplo, $1/2$, entre 0 y $1/2$ existe un número racional, por ejemplo, $1/3$, entre 0 y $1/3$ existe al menos un número racional $1/4$ y así sucesivamente.

Entre dos números racionales a y b, $a < b$ existen **infinitos** números racionales. Esta propiedad se expresa diciendo que los racionales son un **conjunto denso** con respecto a los racionales.

Geométricamente podemos representar los racionales en la recta si partimos de la propiedad de que un segmento de recta se puede dividir en cualquier número n de partes iguales ($n \in \mathbb{Z}^+$).

A cada número racional corresponde un único punto de la recta.

Números irracionales

Al expresar las fracciones en forma decimal encontramos dos posibilidades: o tienen finitas cifras decimales o infinitas cifras decimales periódicas; existen números con infinitas cifras decimales **no periódicas**; por ejemplo 0,10110011100011110000. . . (un uno un cero, dos unos dos ceros, tres unos tres ceros etc.); estos números **no son racionales** porque no se pueden expresar como el cociente de dos enteros, este hecho sugiere la necesidad de ampliar el conjunto de los números racionales de tal forma que contengan estos nuevos números.

Otra situación, al hallar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 nos muestra que los racionales son insuficientes para medir.

La medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 equivale a encontrar x tal, que: $x^2 = 2$, y se nota $\sqrt{2}$. Existen otros números irracionales como π , e, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ etc.

En los irracionales no se estudia su estructura algebraica, porque la suma y el producto de dos números irracionales no siempre son un número irracional.

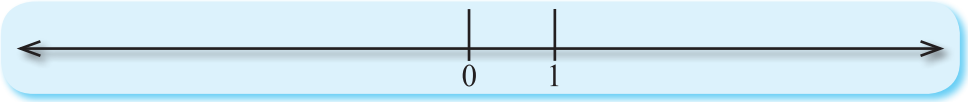
Ejemplo

Si $a = 3 + \sqrt{2}$ y $b = 3 - \sqrt{2}$, entonces $a + b = 6$ y $a.b = 7$

Conjunto de los números reales

El conjunto de números que puede representarse por expresiones decimales finitas o infinitas periódicas (racionales) o infinitas no periódicas (irracionales), junto con las operaciones $(+,\bullet)$, la relación de orden menor que $(<)$, cumple ciertas propiedades que presentaremos más adelante. Se denomina el sistema de los números reales. Se nota entonces $(\mathbb{R}, +, . , <)$ y lo simplificamos como $\mathbb{R}$.

Geométricamente la representación de los números reales se hace usualmente por medio de los puntos de una recta; se elige un punto para representar el cero y otro a la derecha del cero, para representar el 1, como se indica en la figura. Esta elección determina la escala y a cada número real corresponde uno y solo un punto de la recta y, recíprocamente, a cada punto de la recta un número real y solo uno. Por esta razón la recta se denomina frecuentemente **recta real**; es costumbre utilizar las palabras **número real** y punto como sinónimos.



Intuitivamente la recta nos da la idea de orden. Un número a es mayor que b, si en la recta está a la derecha de b.

El cero parte el conjunto de los números reales en: el 0; los reales positivos $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = \{x \mid x > 0\}$ y los reales negativos, $\mathbb{R}^- = \{x \mid x < 0\}$

El proceso de construcción que se ha desarrollado se sintetiza en el sistema de los números reales de manera axiomática, así:

Tenemos en el conjunto de los números reales dos operaciones llamadas **adición y multiplicación**, tales, que para cada par de números reales x e y podemos formar la suma de x e y, que es otro número real único designado por

$x+y$, y el producto de x por y designado por xy o $x.\ y$ que es otro número real único que cumplen las siguientes propiedades o axiomas:

Axiomas de la adición y la multiplicación

Axioma 1

Propiedad asociativa

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$\text{y,} \qquad x\cdot(y\cdot z) = (x\ \cdot y)\cdot z$$

Axioma 2

Propiedad conmutativa

$$x + y = y+x$$
$$\text{y,} \qquad x\ \cdot y = y\ \cdot x$$

Axioma 3

Existencia de elementos idénticos o módulos

$$0+x = x+ 0$$
$$\text{y,} \qquad 1 \cdot x = x \cdot 1= x$$

Existen dos números reales distintos, 0 y 1 tales, que para cada número real se tiene:

Axioma 4

Existencia de negativos

Para cada número real x, existe un número real y, tal que:

$$x+y = y +x = 0$$

Axioma 5

Existencia del inverso multiplicativo o recíproco.

Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real y, tal, que:

$$x \cdot y = y \cdot x = 1$$

Axioma 6
Propiedad distributiva

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Axiomas de orden

Este grupo de axiomas se refiere a un concepto por el que se establece una ordenación entre los números reales. Según esta ordenación se puede decidir si un número real es mayor o menor que otro. Se introducen aquí las propiedades de orden, como un conjunto de axiomas referentes al nuevo concepto primitivo de positivo, para definir después los conceptos de **mayor que y menor que**; **a partir del positivo**.

Supongamos que existe un cierto subconjunto $\mathbb{R}^+$ de $\mathbb{R}$, llamado conjunto de **números positivos,** que satisfacen los tres axiomas de orden siguientes:

Axioma 7
Si x e y pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces: $x+y$ y $x \cdot y$ pertenecen a $\mathbb{R}^+$ (La suma y el producto de números reales positivos es positivo).

Axioma 8
Para todo número real $x \neq 0$, ó $x \in \mathbb{R}^+$ ó $-x \in \mathbb{R}^+$; pero no ambos.

Axioma 9
$0 \notin \mathbb{R}^+$

Ahora se pueden definir los símbolos $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ llamados respectivamente menor que, mayor que, menor o igual que, y mayor o igual que; de la manera siguiente:

$x < y$ Significa que $y-x$ pertenece a $\mathbb{R}^+$
$y > x$ Significa que $x < y$
$x \leq y$ Significa que ó $x < y$ ó $x = y$
$y \geq x$ Significa que ó $x \leq y$ ó $x = y$

Por lo tanto,
se tiene que $x > 0$ si y solo si x es positivo

Si $x < 0$ se dice que x es negativo.
Si $x \geq 0$ se dice que x es no negativo.

El par de desigualdades simultáneas $x < y$ y $y < z$, se escriben frecuentemente en la forma más breve $x < y < z$. Interpretación análoga se da al par de desigualdades $x \leq y$ y $y \leq z$ y que se escribe así: $x \leq y \leq z$.

Ejercicio 1. 1

1. a. Demuestre que $\forall x$, y y $z \in \mathbb{R}$, entonces, si $x.z = y.z$ y $z \neq 0$, luego, $x = z$.
   b. Demuestre que $\forall x$, $y \in \mathbb{R}$, $x.y = 0$ si solo si, $x = 0$ ó $y = 0$
   c. Demuestre que $\forall x$, $y \in \mathbb{R}$, entonces: $(-x)\,(-y) = x \cdot y$.
2. Demuestre que:
   a. Si $x < y$ y $z < w$, entonces $x + z < y + w$
   b. $1 > 0$
   c. Si $x < y$ y $z < 0$, entonces $x \cdot z > y \cdot z$
   d. Si $x \cdot y > 0$, entonces x e y son o ambos positivos o ambos negativos
   e. No existe un número real tal, que $x^2 = -1$
3. Qué ocurre si para todo número real positivo y, $0 \leq x < y$
4. Si $0 < x < y$ como es la relación entre x^{-1} y y^{-1}
5. Si $0 < x$ establezca la relación entre x y x^{-1}
6. Qué ocurre si $x \leq y$ y $y \leq x$
7. Si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$

Otras operaciones

Potenciación

Sea a un número **real** cualquiera y n cualquier número **natural**; definimos a^n

$\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{— veces}} = a^n$, a^n se denomina la n—ésima potencia del número a y es único.

Propiedades

Utilizando procedimientos análogos a los utilizados en la potenciación de números naturales, enteros y racionales, tenemos esto:

$$a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$a^0 = 1; \text{ para } a \neq 0$$

La potencia nula del número cero no se define y la expresión $0°$ se considera indeterminada

$$(a.b)^n = a^n \,.\, b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$(a^m)^n = a^{n.m}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ para } a \neq 0$$
Si n es par entonces $(-a)^n = a^n$

La propiedad **6**, se puede ver como una restricción de la propiedad cancelativa.

Si $a^n = b^n$ **no necesariamente** $a = b$

Ejemplo

$$(-5)^2 = 5^2 \text{ y } -5 \neq 5$$

Sin embargo, la proposición recíproca sí se cumple; observemos que a^n **es única**, lo que nos permite establecer la compatibilidad entre la igualdad y la potenciación, es decir:

Si $a = b$ entonces $a^n = b^n$

¿Cómo definir $a^{1/n}$?

Si $x^n = a$, hallar x.

Si extendemos las propiedades de la potenciación con exponentes naturales a exponentes racionales, tendremos lo siguiente:

$(x^n)^{1/n} = x^1 = x$ lo que sugiere que:

Si $x^n = a$, entonces $(x^n)^{1/n} = x = a^{1/n}$

Sin embargo, para n **par**:

i. Si a es negativo $x = a^{1/n}$ **no existe**; por ejemplo, $x^2 = -1$ no tiene solución real.

ii. Si $(x^n)^{1/n}$ existe, pero **no es único**,

Ejemplo

$$[(-5)^2]^{1/2} = (5^2)^{1/2} \text{ y } -5 \neq 5$$

Para garantizar la existencia de $a^{1/n}$, definamos $a^{1/n}$ para números reales positivos.

Si $a > 0$, $a^{1/n}$ existe y se nota $\sqrt[n]{a}$ que se denomina la raíz $n-$ésima de a.

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \text{ si } a \text{ es positivo y, } a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Si n es par, por ejemplo, en $\sqrt{a}$, se considera solo el valor positivo; en caso de considerar el valor negativo lo notamos $-\sqrt{a}$, por lo tanto,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Con estas restricciones, las propiedades de la radicación son las mismas que se tienen para la potenciación con exponente entero; sin embargo, los procedimientos para calcular a^n y $a^{1/n}$ son diferentes, lo que hace necesario verlas como operaciones diferentes.

Ejemplos

1. Exprese en potencia racional $\sqrt[4]{3^2.4^3}$

$$\sqrt[4]{3^2.4^3} = (3^2.4^3)^{1/4} = 3^{2/4}.4^{3/4}$$

2. Exprese en notación radical $3.a^{\frac{2}{3}}$ y $(7.a^{\frac{2}{5}})^{\frac{2}{3}}$

$$3.a^{\frac{2}{3}} = 3.\sqrt[3]{a^2} \quad \text{y} \quad (7.a^{2/5})^{2/3} = 7^{2/3}.a^{4/15}$$

$$= \sqrt[3]{7^2.\ a^{4/5}} = \sqrt[3]{7^2}.\sqrt[5]{a^4}$$

Propiedades de la radicación

$$\sqrt[n]{a^1}.\ \sqrt[m]{a^1} = a^{1/n}.\ a^{1/m} = a^{1/n\,+\,1/m} = a^{\frac{m+n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

Como $m \cdot n$ es múltiplo de m y n podemos reemplazar $m.n$ por el m.c.m. (Mínimo común múltiplo) entre m y n.

Ejemplos

1. $\sqrt[4]{2}.\ \sqrt[6]{2}$, el m.c.m. entre 4 y 6 es 12 porque:

4	6	2
2	3	2
1	3	3
	1	1

entonces: $2\times2\times3 = 12$

$$\sqrt[4]{2}.\ \sqrt[6]{2} = \sqrt[12]{2^3.2^2} = \sqrt[12]{2^5}$$

2. $\sqrt[n]{a}.\ \sqrt[n]{b} = a^{1/n}.b^{1/n} = (a.b)^{1/n} = \sqrt[n]{a.b}$

3. $\sqrt{5}.\ \sqrt{6} = \sqrt{30}$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{1/m})^{1/n} = a^{1/mn} = \sqrt[nm]{a}$

Ejemplos

En cada uno de los siguientes ejemplos aplique propiedades y resuelva:

1. $\sqrt[7]{\sqrt[2]{15}} = \sqrt[14]{15}$

2. Simplifique $\sqrt[3]{32}$. Descomponiendo 32 en factores primos tenemos que:

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 . 2^2} = \sqrt[3]{2^3} . \sqrt[3]{2^2} = 2.\sqrt[3]{4}$$

3. Simplifique $\sqrt[6]{8}$. Descomponiendo 8 en factores primos tenemos

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{3/6} = 2^{1/2} = \sqrt[2]{2}$$

4. Simplifique $(36)^{2/3}$. Descomponiendo 36 en factores primos tenemos que:

$$(36)^{2/3} = (2^2 . 3^2)^{2/3} = \sqrt[3]{2^4 . 3^4} = \sqrt[3]{2^3 . 2 . 3^3 . 3} = 2.3\sqrt[3]{2.3} = 6.\sqrt[3]{6}$$

5. Introduzca bajo el signo radical el factor racional de: $5.\sqrt[3]{3}$. Debemos introducir el 5 en una raíz cúbica, recordemos que: $5 = 5^1 = 5^{3/3} = \sqrt[3]{5^3}$, por lo tanto $\sqrt[3]{5^3}\ \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{125.3} = \sqrt[3]{375}$

6. Efectúe y simplifique: $\frac{3}{2}.\sqrt[3]{48} + \frac{4}{3}.\sqrt[3]{162} - \frac{7}{5}.\sqrt[3]{750}$

$$\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2^4.3} = 2.\sqrt[3]{6};$$

$$\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{3^4.2} = 3.\sqrt[3]{6};\ \sqrt[3]{750} = \sqrt[3]{5^3.3.2} = 5.\sqrt[3]{6}$$

reemplazando tenemos:

$$\frac{3}{2}.\sqrt[3]{48}+\frac{4}{3}.\sqrt[3]{162}-\frac{7}{5}.\sqrt[3]{750}=\frac{3}{2}.2.\sqrt[3]{6}+\frac{4}{3}.3.\sqrt[3]{6}-\frac{7}{5}.5.\sqrt[3]{6}$$

$$=3.\sqrt[3]{6}+4.\sqrt[3]{6}-7.\sqrt[3]{6}$$

$$=(3+4-7).\sqrt[3]{6}\ =0$$

7. Racionalizar el denominador de cada una de las siguientes expresiones:

a. $\frac{1}{\sqrt[5]{8}}$

b. $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

c. $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

d. $\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{50}+\sqrt{48}}$

e. $\frac{1}{\sqrt[3]{(2\sqrt{5})^2}}$

Solución:

a. $\frac{1}{\sqrt[5]{8}}=\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$ para eliminar el radical de grado 5 la cantidad sub-radical debe tener exponente 5, es decir,

$$\frac{1}{\sqrt[5]{8}}=\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}=\frac{\sqrt[5]{4}}{2}$$

b. $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Utilizando la propiedad: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ llamada diferencia de cuadrados buscando el conjugado del denominador $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ que es $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ obtendremos:

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3\,(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

c. $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ asociando $\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3} = \left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}$

estamos en el caso del ejercicio b., por lo tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(7+2\sqrt{10})-3}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{10})}$$

Racionalizando de nuevo el denominador tenemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{10})} \cdot \frac{2-\sqrt{10}}{2-\sqrt{10}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

$$= \frac{3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{30}-2\cdot\sqrt{3}}{12}$$

d. $\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{50}+\sqrt{48}}$ observando las expresión del denominador es conveniente simplificarla, por lo tanto:

$$\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{50}+\sqrt{48} = 2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}-5\cdot\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{3}$$

$$= 6\cdot\sqrt{3}-3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{50}+\sqrt{48} = 3\ (2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{50}+\sqrt{48}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot(2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

Racionalizando:

$$\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{50}+\sqrt{48}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}}\ \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{10}$$

Otra forma de resolver el ejercicio es asociando desde un comienzo el denominador, por ejemplo:

$$\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{50}+\sqrt{48}=(\sqrt{8}+\sqrt{12})-(\sqrt{50}-\sqrt{48})$$

este procedimiento resulta muy dispendioso.

e. $$\frac{1}{\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}$$

racionalizando nuevamente tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2}}=\frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}\cdot\frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{5}-2\right)$$

Potencias con exponente irracional

¿Cómo hallar $3^{\sqrt{2}}$?

Tomemos los valores aproximados del número $\sqrt{2}$ por defecto: 1; $1{,}4$; $1{,}41$; $1{,}414$; . . . . y los valores aproximados del número $\sqrt{2}$ por exceso: 2; $1{,}5$; $1{,}42$; $1{,}415$; . . . . . .

Como $\sqrt{2}>1$, tenemos que: $3^1<3^{1,4}<3^{1,41}<3^{1,414<}\ldots\ 3^{\sqrt{2}}\ \ldots<3^{1,415}<3^{1,42}$

En la desigualdad $a<3^{\sqrt{2}}<b$, tenemos que entre a y $3^{\sqrt{2}}$ hay infinitos números reales; igual caso sucede entre $3^{\sqrt{2}}$ y b.

Resulta natural admitir que $3^{\sqrt{2}}$ existe y es único.

Para las potencias con exponente irracional son válidas las propiedades vistas.

Ejemplos

1. $7^{\sqrt{5}}\times 7^5=7^{\sqrt{5}+5}$
2. $\frac{5^{\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{2}}}=5^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
3. $\left[(\sqrt{7})^4\right]^{\pi}=(7^{\frac{1}{2}})^{4\pi}=7^{2\pi}$

La demostración de estas propiedades se realiza con ayuda de la teoría de los límites.

Ejercicio 1. 2

1. Exprese en potencia racional:

   a. $\sqrt[5]{3^2}$ b. $\sqrt[7]{3}$ c. $\sqrt[7]{3^2 . 5^4}$

   d. $\sqrt{(5.3^2)^2}$ e. $\sqrt[9]{\sqrt[2]{3}}$ f. $\sqrt[5]{\sqrt{3^2.5^4}}$

2. Exprese utilizando el signo de la raíz:

   a. $2^{1/2}$ b. $(4\times7)^{1/5}$ c. $2\times7^{1/4}$

   d. $(2a^2)^{2/7}$ e. $(a^{3/2})^{5/2}$ f. $(3/5)^{5/3}$

3. Efectúe y simplifique:

   a. $(5^2)^5-[(-4^4)^3]$ b. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+\left(2\frac{2}{3}\right)^3-(0,25)^2$

   c. $7^3-5^2+\frac{5-3^0}{4^2}$ d. $(3^{-4})\left[\frac{2}{(-3)^2}\div(0,5)^2\right]$

   e. $\left(\sqrt{5}\right)^4\times\left(5^{-2}\div(3/5)^{-2}\right)$ f. $\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}+3^{-1})}{3^2-3^{-3}}$

4. Simplifique:

   a. $\sqrt[3]{48}$ b. $\sqrt{4^2\cdot3^2}$

   c. $\sqrt{1.000}$ d. $\sqrt{4^2+3^2}$

   e. $\sqrt[3]{32}$ f. $\sqrt[4]{64}$

   g. $\sqrt{(0,25)^{-1}}$ h. $\sqrt{(49/16)}$

5. Introduzca bajo el signo radical el factor racional:

   a. $5.\sqrt[4]{3}$ b. $2.\sqrt[3]{4}$

   c. $0,5\sqrt{(0,2)^{-1}}$ d. $2\sqrt{(49/16)}$

6. Simplifique la expresión dada:

   a. $(16)^{\frac{3}{4}}$ b. $(-8)^{\frac{4}{3}}$

c. $(25)^{-\frac{1}{2}}$

d. $(4)^{\frac{5}{2}} \times (2^{-3})$

e. $\dfrac{\left(8^{-\frac{2}{3}}\right) \times \left(16^{-\frac{1}{4}}\right)}{32^{-\frac{3}{5}}}$

f. $\dfrac{18^{-\frac{1}{2}}}{32^{-\frac{1}{2}}}$

g. $(0{,}008)^{\frac{1}{3}} 5^{-1}$

h. $(2a^2 \div 8a^{-2})^{\frac{1}{2}}$

7. Halle la suma indicada:

a. $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{125}$

b. $\left(4\sqrt{3} - \sqrt{27}\right)$

c. $-2\sqrt{9} + \sqrt{8} - \sqrt{50}$

d. $\sqrt{5\sqrt{48}} - \sqrt{40\sqrt{12}} + \sqrt{15\sqrt{27}}$

e. $\sqrt{28} + 21\sqrt{\frac{1}{7}} - \frac{4\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$

f. $\sqrt[3]{48} + 2 \cdot \sqrt[3]{4} - 3 \cdot \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}$

g. $\frac{1}{3}\sqrt{27} + \frac{3}{4}\sqrt{48} + \frac{1}{2}\sqrt{12}$

h. $4\sqrt{300} + \sqrt{192} + \sqrt{243}$

i. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{128} + \frac{2}{5}\sqrt[3]{250} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{135}$

j. $2 \cdot \sqrt[3]{48} + \sqrt[3]{432} - \sqrt[3]{750}$

k. $\frac{1}{5}\sqrt{125} + \frac{2}{3}\sqrt{45} - \frac{3}{7}\sqrt{245}$

l. $6\sqrt{5} + 8\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$

8. Efectúe la operación indicada:

a. $\sqrt{7+\sqrt{13}} \times \sqrt{7-\sqrt{13}}$

b. $\sqrt{7+\sqrt{22}} \times \sqrt{7+\sqrt{22}}$

c. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{5}) \div \sqrt{3}$

d. $(\sqrt{4}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}) \div \sqrt{2}$

e. $(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})^2$

f. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

g. $\sqrt[9]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$

h. $\sqrt[6]{20} \cdot \sqrt[9]{72} \cdot \sqrt[8]{92}$

9. Racionalice el denominador:

a. $\frac{3}{\sqrt{3}-3}$

b. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

c. $\frac{2-\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}$

d. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

e. $\frac{1}{2+\sqrt{3+\sqrt{5}}}$

f. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}$

g. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18+\sqrt{5}+\sqrt{2}}}$

h. $\frac{3}{\sqrt[4]{27}}$

i. $\frac{6}{\sqrt[7]{72}}$

j. $\frac{2}{\sqrt[3]{(3+\sqrt{7})^2}}$

k. $\frac{1}{\sqrt[5]{(2+\sqrt{5})^2}}$

l. $\frac{3}{\sqrt{27}-\sqrt{12}-\sqrt{150}+\sqrt{96}}$

m. $\frac{3}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{48}}$

10. Qué desigualdad para α se tiene si:

a. $\alpha > 1$ y $a^{\alpha} > 1$

b. $\alpha > 1$ y $a^{\alpha} < 1$

Potencia de un número positivo

Para que a^n esté siempre definida es necesario restringir la base a a los reales positivos.

En adelante consideraremos a^n,para $a \in \mathbb{R}^+$

Si $a > 0$ y n es cualquier número a^n real, el número existe y es único.

Propiedades

Como a^n existe y es único tenemos que:

Si $a^x = a^y$ entonces $x = y$

De igual manera, si $x = y$, podemos calcular a cada lado de la igualdad a^x y a^y y se conserva la igualdad; es decir,

Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$, resumiendo: $a^x = a^y$ si y solo si $x = y$

Ejemplo

1. Hallar x en $3^x = 81$; como $81 = 3^4$, tenemos que

$$3^x = 3^4$$
$$x = 4$$

Potenciación y la relación (<)

Si $a > 1$ y $n > 1$ entonces: $a^n > a$

Ejemplos

1. Como $5 > 1$ y $2 > 1$ tenemos que $5^2 > 5$

Si $a > 1$ y $n > m$,

entonces: $a^n > a^m$

2. Como $3 > 1$ y $4 > 2$ tenemos que $3^4 > 3^2$

Si $0 < a < 1$ y $n > 1$,

entonces: $a^n < a$

3. Como $0 < \frac{1}{2} < 1$ y $2 > 1$ tenemos que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)$

Si $0 < a < 1$ y $n > m$,

entonces: $a^n < a^m$

4. Como $0 < \frac{1}{2} < 1$ y $3 > 2$ sucede que $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Si $a > 1$ y $n < 0$, entonces $a^n < 1$

5. Como $a = 3 > 1$ y $n = -2 < 0$ tenemos que

$$3^{-2} = \left(\frac{1}{3^2}\right) = \frac{1}{9} < 1$$

Resumen del capítulo 1

Estructura de los números reales

$\mathbb{R}$ REALES

$\mathbb{Q}$ Racionales $\longleftarrow$ $\mathbb{Z}$ Enteros $\longleftarrow$ $\mathbb{N}$ Naturales

Irracionales $\mathbb{I}$

Axiomas de los números reales suma y producto

Suma (+)		Producto (×)
1. $x + y \in \mathbb{R}$	Clausurativa	1. $x \times y \in \mathbb{R}$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$	Asociativa	2. $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$
3. $x + y = y + x$	Conmutativa	3. $x \times y = y \times x$
4. $x + 0 = 0 + x = x$	Modulativa	4. $x \times 1 = 1 \times x = x$
5. $x + y = 0$	Invertiva	5. $x \times y = 1$, con $x \neq 0$
6. $x\,(y + z) = x\,y + xz$	Distributiva	

Potenciación

Si a es un número real y n un número natural

$$a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n; a^n$$
$$n \text{ —veces}$$

Se denomina la e n–sima potencia a y es único.

Propiedades

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
   en particular

   si $a \neq 0$, $a^0 = 1$
2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ en particular

   $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ’$\forall a^n \geq, 0$ si n es par
6. Si $a = b$ entonces $a^n = b^n$
   En la propiedad 5, la proposición recíproca no se cumple, por ejemplo,
   $(-3)^2 = 3^2$ y $-3 \neq 3$.
7. Si n es par, entonces,
   $(-a)^n = a^n$

Radicación

Propiedades de la radicación

Con estas restricciones las propiedades de la radicación son las mismas que se tienen para la potenciación con exponente entero.

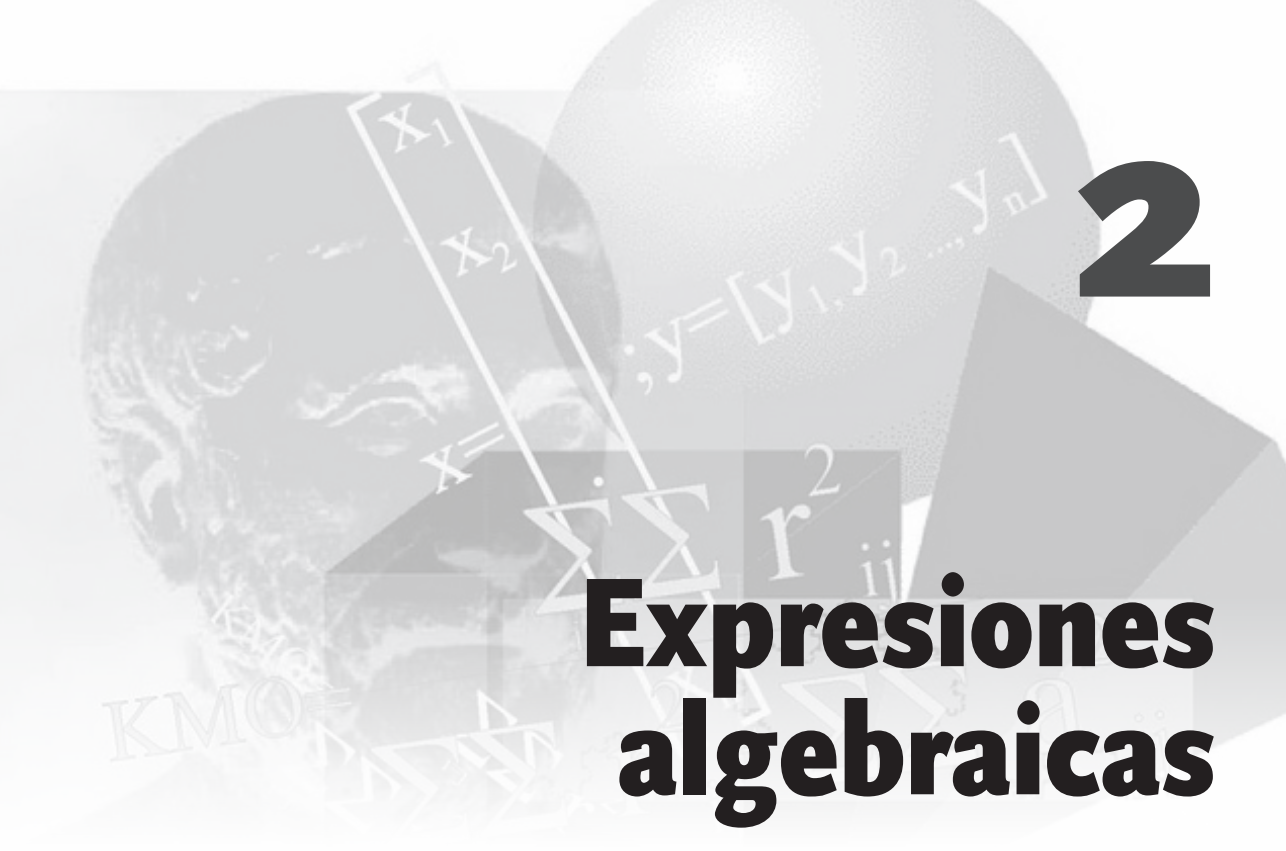
1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} =$

   $a^{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}} \quad \forall a^{n+m} \geq 0$
   si es $n \cdot m$ par.
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} =$

   $\sqrt[n]{ab} \quad \forall ab \geq 0$ si n es par.
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = (a)^{\frac{1}{m \cdot n}} =$
   $\sqrt[m \cdot n]{a} \quad \forall a \geq 0$ si es m, n par.

4. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $\forall a > 0, \forall b > 0$

   0 si n es par.



2

Expresiones algebraicas

Objetivos

- Identificar y clasificar algunas expresiones algebraicas.
- Realizar operaciones de suma, producto y división de expresiones algebraicas.
- Identificar y utilizar productos notables y cocientes notables para simplificar expresiones algebraicas.
- Comprender algunas relaciones de área y volumen con las expresiones algebraicas.
- Identificar y utilizar algunos métodos algebraicos para factorizar completamente expresiones algebraicas.
- Emplear factorizaciones para realizar operaciones y simplificaciones de fracciones algebraicas.
- Racionalizar al denominador y numerador algunas expresiones algebraicas.

Expresiones algebraicas

En los sistemas numéricos hemos estudiado los conjuntos numéricos con sus operaciones, relaciones y sus propiedades.

Combinando adecuadamente los números con los signos de las operaciones y paréntesis obtenemos expresiones como: $(3^{-2}+4-\frac{1}{2})\div(0{,}2+\frac{4}{3})$,

a estas expresiones se les denomina **expresiones numéricas**.

Si es posible realizar todas las operaciones indicadas, el número real que se obtiene se le denomina el valor numérico de la expresión.

Es posible que el valor numérico sea indeterminado.

Ejemplos

1. $\frac{3}{5}\div(\frac{1}{2}-0{,}5)=(\frac{3}{5})\div 0$

2. $(8-2^3)^0=0^0$

3. $\sqrt{2^{3-9}}=\sqrt{-1}\notin\mathbb{R}$

Las expresiones numéricas, además de servir como ejercicios, se justifican porque permiten expresar propiedades de su valor numérico. Por ejemplo, al dividir 25 entre 3 y al aplicar el algoritmo de la división, obtenemos para 25 la expresión numérica: $(3\times 8)+1$

El promedio aritmético entre 40 y 17 se expresa como $\frac{(40+17)}{2}$

La hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son 3 y 4 se obtiene mediante la expresión numérica: $\sqrt{3^2+4^2}$.

Las expresiones numéricas correspondientes a un conjunto de números pueden sugerir una expresión general.

4. 7; 11; 15; 19 y 23 tienen como expresión numérica:
$$3+4(1);\ \ 3+4(2);\ \ 3+4(3);\ 3+4(4);\ 3+4(5).$$

Estas expresiones numéricas se pueden escribir de manera más general, así: $3+4(n)$; donde n es un elemento del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Expresiones como $3 + 4n$ donde además se combinan símbolos literales, se denominan **expresiones algebraicas**.

Ejemplo

$2\pi x^2 y;\ \sqrt[3]{x^2\ y^2};\ \frac{3a + 5b^4}{a-b}$

Las expresiones algebraicas pueden ser:

Enteras: si las potencias de los símbolos literales son números naturales

Ejemplo

$$4a^2 - 5b + 7\ ; \qquad 2\,x^2y\ + \tfrac{3}{4}\,xy^3 - 2xy + 9$$

Racionales: es cociente de expresiones algebraicas enteras

Ejemplo

$$\frac{2a + 3b}{a^2 - 5b};\ \frac{2x\ -\ 3y}{x^2 - x^2y^3}$$

Irracionales: si existen potencias fraccionarias respecto a alguna o algunas de las letras.

Ejemplo

$$5\sqrt{a} + \sqrt{b} - 7\text{c};\ \sqrt{x^2 - y^2}$$

Usualmente en las expresiones algebraicas las letras toman valores reales, por ejemplo en la expresión:

ab^2 si $a = 2$ y $b = 3$ entonces $ab^2 = 2{\times}3^2 = 18.$

Sin embargo, una expresión algebraica no siempre está definida en todos los reales.

Ejemplo

$\frac{x+y}{x-y}$ no está definida si $x = y$, ¿por qué?

Es importante tener presente en qué conjunto de valores la expresión algebraica está definida.

Polinomios

Una expresión algebraica entera en la que, con respecto a la parte literal, solo se combinan por la multiplicación y la potenciación con exponente natural, se le denomina **monomio**.

Ejemplos

$2x;\ 3x^2y;\ -\frac{2}{3}a^2b;\sqrt{2}\,a^2b^5$

Las expresiones $\frac{a}{b}$; xy^{-2} no son monomios.

En un monomio es importante distinguir los siguientes elementos: el coeficiente, la parte literal y el grado.

Ejemplo

En la expresión $-3a^2b^3$ tenemos que:

El coeficiente es -3; la parte literal a^2b^3; es de grado 2 con respecto a a, de grado 3 con respecto a b y de grado 5 con respecto a la suma de sus exponentes.

En particular se aceptan los números reales como monomios de grado cero. Una expresión algebraica entera con respecto a sus letras se denomina un **polinomio**, en particular, si tiene dos términos se denomina **binomio** y si tiene tres términos se denomina un **trinomio**.

Ejemplos

$\frac{5}{3}a^2b-7ab^2+\sqrt{2}a^3$; $5x^4+7x^2+9x-23$ son polinomios.

$\sqrt{b}+7c$ no es un polinomio porque no es entero con respecto a, b y c.

Podemos observar en los ejemplos que un polinomio es la suma de monomios.

Términos semejantes
Son los que tienen igual parte literal.

Ejemplos

$-5\,xy^2$ y $3xy^2$ son términos semejantes
$2a^3b$ y $\sqrt{23}ba^3$ no son términos semejantes
$4a^2b$ y $5ab^2$ no son términos semejantes

Operaciones

Adición de términos semejantes

Ejemplos

1. Hallar la suma entre $7xy$ y $5xy$.

   Aplicando las propiedades distributiva de la multiplicación con respecto de la adición tenemos:

   $7xy + 5xy = (7+5)\,xy = 12xy$

2. Hallar la suma de:

$$5ab^2 + 5\sqrt{3}ab^2 + 2\sqrt{3}ab^2 + (-2ab^2)$$

$$5ab^2 + 5\sqrt{3}ab^2 + 2\sqrt{3}ab^2 + (-2ab^2) = [5+5\sqrt{3}+2\sqrt{3}+(-2)]\,ab^2$$
$$= (3+7\sqrt{3})ab^2$$

Observemos que se suman sus coeficientes numéricos y su parte literal sigue igual, en esencia sumar términos semejantes es sumar sus coeficientes y dejar igual su parte literal.

Adición de polinomios

Ejemplo

Hallar la suma entre $(5a + 7b + 6c)$ y $(-3a + 4b + 6c)$.

Aplicando las propiedades asociativa y conmutativa tenemos:

$$(5a + 7b + 6c) + (-3a + 4b + 6c) =$$
$$[5a + (-3a)] + (7b + 4b) + [(6c) + 6c] =$$
$$= 2a + 11b + 12c$$

Como la suma de polinomios se reduce a la suma de los coeficientes de los términos semejantes, algunas de sus propiedades son heredadas del conjunto de donde tomemos sus coeficientes.

Por ejemplo, si sus coeficientes son números enteros entonces **la suma de polinomios es asociativa, modulativa, conmutativa e invertiva**; el módulo aditivo es el cero y el inverso aditivo de un polinomio A es (−A).

Ejercicio 2.1

1. Halle el valor numérico de $\frac{2a+b}{a-2b}$ si:
   a. $a=1$ y $b=3$
   b. $a=4$ y $b=2$
   c. $a=8$ y $b=-4$
   d. $a=\frac{3}{5}$ y $b=2^{-2}$
   e. ¿Para qué valores reales está definida?
2. Determine al menos dos valores para a, b y c de tal manera que la expresión dada no esté definida.
   a. $\frac{a+2b}{a+b-c}$
   b. $(2a-b)^c$
   c. $\sqrt{\frac{a+b}{c}}$
   d. $a^{-2}+b^{-2}$
3. Clasifique las expresiones algebraicas de los ejercicios 1 y 2.
4. Escriba tres expresiones algebraicas enteras, tres racionales y tres irracionales.
5. Halle la suma entre:
   a. $8a + 3b - c;\ 5a - b + c;\ -a - b - c;\ 7a - b + 4c$
   b. $5a^x - 3a^m - 7a^n;\ -8a^x + 5a^m - 9a^n;\ -11a^x + 5a^m + 16a^n$

c. $6m^{a+1} - 7m^{a+2} - 5m^{a+3}$; $4m^{a+1} - 7m^{a+2} - m^{a+3}$;

$-5m^{a+1} + 3m^{a+2} + 12m^{a+3}$

d. $5ab - 3bc + 4cd$; $2bc + 2cd - 3de$; $4bc - 2ab + 3de$;

$-3bc - 9cd - ab$

e. $8xy - 2yz$; $2xy - z + 6yz$; $9yz - 7yx - 3z$

f. $10b + 5bc - 6c$; $7bc - 4b + c$; $9c - 8bc$

g. $4x - \sqrt{3}y + 13$; $7x + 8\sqrt{3y} - 6$; $2y - 5 - 8x$

h. $0{,}25a + 10{,}05b - 9$; $0{,}3a - 0{,}5b + 4c$; $2c + b - 6$

i. $5\sqrt{8}ab - 7a + b$; $\sqrt{50}ab + 2a - 3$; $5a - ab$

j. $2x - 3y + z$; $2y - x$; $3y - 2z - 3x$

k. $3x - 2y + 1$; $2x + 5y - 6$; $3 - x - 3y$

l. $a + 10b - 9$; $3a - 5b + 4c$; $7c + b - 6$

m. $5x + 6$; $-3x^n + 2$; $x^n - 9x$

6. Efectúe:

a. $(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy) + (\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2)$

b. $(x^2 + \frac{2}{3}xy) + (-\frac{1}{6}xy + y^2) + (-\frac{5}{6}xy + \frac{2}{3}y^2)$

c. $(\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{5}ab - \frac{1}{2}b^2) + (\frac{5}{6}a^2 - \frac{1}{10}ab + \frac{1}{6}b^2) + (-\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{20}ab - \frac{1}{3}b^2)$

d. $(a^6 - a^4 + a^2) + (\frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}a + (-\frac{3}{7}a^4 - \frac{5}{8}a^2 + 6) +$

$(-\frac{3}{8}a - 6)$

e. $(x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{5}x) + (-3x^5 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{10}x) + (-\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2)$

f. $(x^4 + 2x^2y^2 + \frac{5}{72}y^4) + (-\frac{5}{6}x^4 + \frac{3}{8}x^2y^2 + xy^3 - \frac{1}{14}y^4) +$

$(-\frac{5}{6}x^3y + x^2y^2)$

Sustracción: De un polinomio dado $\mathbb{P}$ restar otro polinomio $\mathbb{Q}$; significa encontrar un polinomio $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P} = \mathbb{Q} + \mathbb{R}$; al polinomio $\mathbb{R}$ se le denomina la **diferencia** entre $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ y se nota $(\mathbb{P}) + (-\mathbb{Q}) = \mathbb{P} - \mathbb{Q}$ donde $\mathbb{P}$ se denomina el **minuendo** y $\mathbb{Q}$ el **sustraendo**.

La definición de $\mathbb{P} - \mathbb{Q} = \mathbb{P} + (-\mathbb{Q})$ da el procedimiento para efectuar la resta; este es: cambiar de signo a cada uno de los términos del sustraendo y sumarlo con $\mathbb{P}$.

Ejemplos

1. Restar $4b$ de $2a$

$$2a + [-(4b)] = 2a - 4b$$

2. Restar $4a^2b$ de $-5a^2b$

$$-5a^2b + [-(4a^2b)] = -5a^2b - 4a^2b = -9a^2b$$

3. De $4x - 3y + z$ restar $2x + 5z - 6$

$$(4x - 3y + z) + [-(2x + 5z - 6)] =$$
$$4x - 3y + z - 2x - 5z + 6 \text{ (reduciendo términos semejantes)}$$
$$= 2x - 3y - 4z + 6$$

4. Restar $-4\,a^3b^3 - \frac{1}{10}ab + \frac{2}{3}a^2b^2 - 9$ de $-\frac{3}{5}ab + \frac{1}{6}a^2b^2 - 8$

$$\left(\tfrac{1}{6}a^2b^2 - \tfrac{3}{5}ab - 8\right) + \left\{-\left(-4a^3b^3 + \tfrac{2}{3}a^2b^2 - \tfrac{1}{10}ab - 9\right)\right\} =$$

$$\tfrac{1}{6}a^2b^2 - \tfrac{3}{5}ab - 8 + 4a^3b^3 - \tfrac{2}{3}a^2b^2 + \tfrac{1}{10}ab + 9$$

$$4a^3b^3 + \left(\tfrac{1}{6}a^2b^2 - \tfrac{2}{3}a^2b^2\right) + \left(-\tfrac{3}{5}ab + \tfrac{1}{10}ab\right) + (-8 + 9) =$$

$$4a^3b^3 + \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{2}{3}\right)a^2b^2 + \left(-\tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{10}\right)ab + (-8 + 9) =$$

$$4a^3b^3 - \tfrac{1}{2}a^2b^2 - \tfrac{1}{2}ab + 1$$

Signos de agrupación

Los signos de agrupación se emplean para indicar que los términos agrupados en ellos deben considerarse como **un todo** o sea como **una sola expresión**.

Así : $a + (b - c)$, indica que a debe sumarse con la diferencia $b - c$

$$a + (b - c) = a + b - c$$

La expresión $x - (-y + z)$ indica que de x hay que restar $-y + z$; luego cambiando los signos al sustraendo tenemos:

$$x - (-y + z) = x + y - z$$

Cuando entre un paréntesis a su vez se utiliza otro paréntesis; para facilitar la lectura se utilizan otros signos de agrupación, además del paréntesis ordinario ( ) como son, el paréntesis rectangular o corchete [ ] , y las llaves { } .

Estos paréntesis tienen la misma significación que el paréntesis ordinario.

Ejemplo

$-2a - (3a - 5b + (-7a + 8b + (-9a + 2b) - (6a - 10b))$
se puede escribir así:
$-2a - \{3a - 5b + [-7a + 8b + (-9a + 2b) - (6a - 10b]\}$

Para suprimir signos de agrupación, si está precedido del signo más (+) se deja el mismo signo que tenga cada uno de los términos que se hallan dentro de él; y si el paréntesis está precedido del signo menos (—), se cambia el signo a cada uno de los términos que se hallan dentro de él.

Si hay signos de agrupación que contengan otros, se suprime el más interno; este proceso se repite hasta terminar los signos de agrupación, después reducimos términos semejantes, si existen.

Ejemplo

Simplificar

$-2a-\{3a-5b+[-7a+8b+(-9a+2b)-(6a-10b)]\}$

Como tiene paréntesis de diferente tipo eliminamos los más internos en este caso los ordinarios:

$-2a-\{3a-5b+[-7a+8b+(-9a+2b)-(6a-10b)]\}$

$=-2a-\{3a-5b+[-7a+8b-9a+2b-6a+10b]$

Como hay paréntesis de diferente tipo eliminamos el más interno en este caso el paréntesis rectangular, después las llaves y finalmente reducimos términos semejantes:

$-2a-\{3a-5b+[-7a+8b-9a+2b-6a+10b]\}=$

$-2a-\{3a-5b-7a+8b-9a+2b-6a+10b\}=$

$-2a-3a+5b+7a-8b+9a-2b+6a-10b=17a-15b$

Introducción de signos de agrupación

En diferentes circunstancias es necesario agrupar dos o más términos como una sola expresión para facilitar cálculos o simplificar expresiones, por ejemplo, la propiedad asociativa de la adición de números naturales.

Para introducir términos en un signo de agrupación precedido del signo más (+) se deja cada uno de los términos con el mismo signo que tengan, y para introducir términos dentro de un signo de agrupación precedido del signo menos (−) se cambia el signo a cada uno de los términos que se incluyen en él.

Ejemplos

1. Introducir los tres últimos términos de la expresión: x^3-2x^2+3x-4, en un paréntesis precedido del signo más (+). Como el signo de paréntesis es (+) dejamos cada cantidad con el signo que tiene:

$$x^3-2x^2+3x-4=x^3+(-2x^2+3x-4)$$

2. Introducir los tres últimos términos de la expresión: $x^2-a^2+2ab-b^2$ en un paréntesis precedido del signo menos (−) Como el paréntesis esta precedido del signo (−) cambiamos el signo a cada uno de los tres últimos términos.

$$x^2 - a^2 + 2ab - b^2 = x^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$

Ejercicio 2.2

1. En cada uno de los siguientes ejercicios sustraer el primer polinomio del segundo.

   a. $3x - 1;\ x - 10$

   b. $3x + y - 9;\ 2x + y - 5$

   c. $y - 2x + 3;\ 3x - 5y + 15$

   d. $-ab + 4bc - 2;\ 3ab - 2bc + 9$

   e. $6a - 10b + 8c;\ 5a + 7b - c$

   f. $2a + 3b + 6c;\ 3a - 2b + c$

   g. $2x - y - 8;\ 2x - 3x - 6$

   h. $4x - 3y + 12;\ 6x - 2y + 9$

   i. $0{,}25x + \frac{3}{8}y;\ \frac{-3}{14}x + 1{,}28y$

   j. $4\sqrt{5}a - 3;\ 12 - 3\sqrt{20}a$

2. ¿Qué polinomio debe sumarse al primer polinomio para obtener el segundo?

   a. $2x - y - 2;\ 6x - 7y - 8$

   b. $6x - 7y - 10;\ -8x + 13y - 6$

   c. $2x + y;\ 3x - 2$

   d. $3x - 1;\ 2x + 1$

   e. $7x - 6y - 17;\ 3x + y + 18$

   f. $-7a + 2b + 4c - d;\ 2a + 3c$

   g. $c^2 + 2c - 2d;\ c^2 + 4d + 2c + 2d^2$

   h. $x^3 - 4x^2 + 2x + 5;\ x^3 + 2x^2 - 3x + 3$

   i. $m^4 + 6m^3 - 7m^2 + 8m - 9,\ 2m^3 + 3m^2 - 4m - 3 + \sqrt{7}$

   j. $2a + 4by - 2cy^2 + dy^3;\ 2dy^3 - 2by - a + 3cy^2$

3. Qué expresión debe sumarse a $3a + 2b + 4c$, para obtener: $2a + 3b - 2c$.
4. Encontrar la expresión que debe disminuirse en $2m-2n+3p$ para obtener una diferencia igual a $4m+n-2p$.
5. Si el minuendo es $2a^2 + 2ab - b^2$; la diferencia es $a^2 + 3ab - 2b^2$. Halle el sustraendo.
6. Si el sustraendo es $x^2 + 3x - 7$, la diferencia $3x^2 - 3x - 4$. Halle el minuendo.
7. Si la diferencia es $a^3+3a^2 + 2a$; el sustraendo es $2a^3-2a^2+a-5$. Halle el minuendo.
8. Reste la suma entre $5x + 6y - 8$ y $7y - 2x - 3$ de la suma entre $6x-2y+1$ y $5x+7y-9$.
9. Reste la suma entre $8x - 7y - 4$ y $7x - 4y + 5$ de la suma entre $4x - 5y - 9$ y $9y + 7x - 15$.
10. De la suma entre $2a+ b - c$ y $3a - b + 2c$ reste la suma entre $a - 2b + 6c$ y $5a + 6b + 4c$.
11. De la suma entre $3a-b + 9c$ y $2a+3b-5c$ reste la suma entre $3a + 14b - 2c$ y $a - 2b + c$.
12. De la suma entre $6x-7y- 8$ y $2x-y-z$ reste la suma entre $3x + 4y-5$ y $2x+6y-12$.
13. De:

a.	$\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$	reste	$\frac{4}{5}a + \frac{2}{9}b-\frac{1}{2}$.
b.	$\frac{1}{2}a + \frac{3}{5}b - \frac{7}{8}c + \frac{8}{9}d$	reste	$-\frac{7}{20}b+\frac{1}{8}c-\frac{1}{9}d+\frac{7}{8}$.
c.	$\frac{5}{6}m^3+\frac{2}{9}n^3$	reste	$-\frac{1}{2}m^2n + \frac{3}{8}mn^2 - \frac{1}{5}n^3$.
d.	$a^3+ a^2 - a + \frac{5}{6}$	reste	$-\frac{7}{8}a^2+ \frac{9}{10}a+\frac{7}{8}$.

14. Reste:

a. $\frac{1}{2}a - \frac{3}{5}b$
de $8a + 6b - 5$

b. $\frac{2}{9} + \frac{3}{7}\,x^3y^2 - \frac{1}{8}\,xy^4 - \frac{1}{2}\,x^5$
de $-\frac{7}{8}\,x^4y + \frac{1}{14}\,x^3\,y^2 + \frac{2}{3}\,x^2y^3 + \frac{1}{3}\,xy^4 - 7.$

c. $x^4y - \frac{7}{9}\,x^6y^2 + \frac{1}{11}\,x^2y^4 - y^6 + xy^5$
de $\frac{7}{9}\,x^4y + \frac{2}{3}\,x^6y^2 - \frac{1}{8}\,x^2y^4 - y^6.$

d. $-\frac{1}{6}\,x^2y + \frac{3}{4}\,xy^2 - \frac{2}{3}\,x^3 + 6$
de $\frac{5}{8}\,xy^2 - \frac{7}{9}\,x^2y + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{7}{11}\,y^3 - \frac{2}{5}.$

e. $-\frac{2}{13}\,m^6 + \frac{1}{3}\,n^6 - \frac{7}{20}\,m^4n^2 + \frac{5}{14}\,m^2n^4 - \frac{3}{5}$
de $\frac{3}{10}m^4n^2 - \frac{3}{7}m^2n^4 + \frac{5}{9}\,n^6.$

15. Simplifique:

a. $2a + [a - (a + \mathrm{b}\,)]$

b. $2m-[(m-n)-(m+n)]$

c. $a+\{(-2a+b)-(-a+\mathrm{b})+a\}$

d. $2x+\{-5x-[-2y+(-x+y)]\}$

e. $x^2-\{-7xy+[-y^2+\,(-x^2+3xy-\,2y^2)]\}$

f. $-(a+b)+[-3a+b-\{-2a+b-\,(a-b)\}+2a$

g. $-[-(-x)]-[+(-x)]+\{-[-b+c]-\,[+(-c)]\}$

h. $-\{-[-(a+b)]\}-\{-[-(-b-a)-(a+b)$

i. $-\,[x+\{-(x+y)-[-x+(y-z)-(-x+y)]-y\}]$

j. $x+2y-[4y-x+(3x-2y)-(2x-2y)]$

K. $4x+\{x-(2x+3)\}-\{5-2(1-x)\}$

l. $x-\{3x+(4-x)\}-\{8-3(x-2)\}$

m. $2a-\{2b+[-4-(3a-2b)+(6a-b)]\}$

n. $2a+\{3a-[5+2(a+3b)-3(b-a)]\}$

o. $x+2y-[4y-x+(3x-2y)-5(2x-2y)]$

p. $a-\{2a-[7\,-3(a-b)+2\,(2a-b)]\}$

q. $4+4\,\{b-[-a+5\,(b-3)-2\,(-1-a)]+3\}$

r. $6-5\{a+2[3b-2(a-1)+2(a-b)]\}$

s. $b-2\{-a+[b+2(a-1)-3(2b-3)]\}$

t. $10-\{2a+3(5b+2c)-[3(4a+6b)]\}$

16. Introduzca todos los términos excepto el primero, de las expresiones siguientes en un paréntesis precedido de signo menos $(-)$.

a. $x+2y+(x-y)$

b. $4m-2n+3-(-m+n)+(2m-n)$

c. $x^2-3xy+[(x^2-xy)+y^2]$

d. $x^3-3x^2+(-4x+2)-3x-(2x+3)$

e. $2a+3b-\{2a+[a+(b-a)]\}$

f. $3a-5+[-12+(7a-3)-34a]$

17. Introduzca las expresiones siguientes en un paréntesis precedido de signo menos $(-)$.

a. $a^2+b^2-2bc-c^2$

b. $-2a+(-3a+b)$

c. $2z^2+3xy-(y^2+xy)+(-x^2+y^2)$

d. $x^3-(3x^2+4x-2)$

e. $[m^4-(3m^2+2m+3)]+(2m+3)$

f. $a-b+[-2a(5a+9b)+6b]$

18. Introduzca los tres últimos términos en un paréntesis precedido del signo menos $(-)$.

a. $3a+5b+6c+7$

b. $5x-4y+8z-10$

c. $x-y+z-4$

d. $-6x-3y-4z+2$

e. $12x+4y-5z-8$

f. $12a-6b+8c-10$

g. $5a-3b+6c-6$

h. $2a+5b-10c-9$

i. $3x-8y+12z-20$

j. $x^2+2xy-z+5$

Multiplicación de monomios

Ejemplos

1. Efectuar $(3x^2)(-5x^3\,y^2)$

   Aplicando las propiedades asociativa,y conmutativa de los números reales y la propiedad $a^n \cdot a^m = ^{n+m}$ tenemos:

$$(3x^2)(-5x^3y^2)=(3)(-5)x^2x^3y^2=-15x^5y^2$$

2. $\frac{5}{8}\,xy^{4n+2} \cdot 4x^{3n+2}+y^3 =$

$$\begin{aligned}\tfrac{5}{8}\,xy^{4n+2}.\,4x^{3n+2}y^3 &= \tfrac{20}{8}\,x^{3n+3}y^{4n+5}\\ &= \tfrac{5}{2}\,x^{3n+3}y^{4n+5}\end{aligned}$$

De un monomio por un polinomio

Ejemplo

$5x^2(3x^2y-7y)$

Aplicando la propiedad distributiva tenemos:

$5x^2\,(3x^2y-7y) = (5x^2)\,(3x^2y) + (5x^2)\,(-7y) =$

$15x^4y + (-35x^2y) = 15x^4y - 35x^2y$

De polinomios

Ejemplo

$(3a^2-7b)(5a^2+6b)$

Si vemos la expresión $3a^2-7b$ como un solo término, por ejemplo:

$3a^2-7b = z$ entonces

$$\begin{aligned}(3a^2-7b)(5a^2+6b) &= z(5a^2+6b)\\ &= z(5a^2)+ z(6b)\end{aligned}$$

Reemplazando en z tenemos:

$$(3a^2-7b)(5a^2+6b) = (3a^2-7b)(5a^2) + (3a^2-7b)(6b)$$

Como la propiedad distributiva en los reales se cumple tanto a izquierda como a derecha, entonces:

$$(3a^2-7b)(5a^2)+(3a^2-7b)(6b)=$$
$$(3a^2\cdot 5a^2)+(-7b\cdot 5a^2)+(3a^2\cdot 6b)+(-7b\cdot 6b)=$$
$$15a^4-35a^2b+18a^2b-42b^2=15a^4-17a^2b-42b^2$$

Ejercicio 2.3

Efectúe:

1. $(8a^2b)(-2ab^2)$
2. $(-ab^2c)(3a^2bc)(2abc^2)$
3. $(xy^2)(x^2-2y+4)$
4. $(2x^2-5y)(4x+2y^2)$
5. $(a^2+2ab-2b^2)(a-b)$
6. $(x^2-3xy+y^2)(2x-3y+2)$
7. $(a^2-2ab+4b^2)(a+2b)$
8. $(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)(x+y+z)$
9. $(m^3-m^2+m-1)(-m^3+m^2-m+1)$
10. $(2+3x^2+x^3)(x^2-1+4x)$
11. $(x+a)(y+a)(z+a)$
12. $(x^2-x-1)^2(x^2+x+1)$
13. $(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)$
14. $(a^2-ab+b^2+a+b+1)(a+b-1)$
15. $(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)$
16. $(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)(x+y+z)$
17. $(m^3-m^2+m-1)(-m^3+m^2-m+1)$
18. $(x^2-x-1)^2(x^2+y+1)$
19. $(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)$
20. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^3-x^2+1)$

21. $(2x)(3x^2-4x+6)-(x^2)(x-8)$
22. $(3x^2)(2x^2+x-4)-(x)(3x^2-9y+1)$
23. $(2x-3)(3x-4)+(x+6)(x-2)$
24. $(3x+1)(x+4)-(x+2)^2$
25. $a^x-a^{x+1}+a^{x+2}$ por $a+1$
26. $x^{n+1}+2x^{n+2}-x^{n+3}$ por x^2+x
27. $m^{a-1}+m^{a+1}+m^{a+2}-m^a$ por m^2-2m+3
28. $a^{n+2}-2a^n+3a^{n+1}$ por a^n+a^{n+1}
29. $x^{a+2}-x^a+2x^{a+1}$ por $x^{a+3}-2x^{a+1}$
30. $3a^{x-2}-2a^{x-1}+a^x$ por a^2+2a-1
31. $3a^{x-1}+a^x-2a^{x-2}$ por $a^x-a^{x-1}+a^{x-2}$
32. $m^{a+1}-2m^{a+2}-m^{a+3}+m^{a+4}$ por $m^{a-3}-m^{a-1}+m^{a-2}$
33. $x^{a-1}+2x^{a-2}-x^{a-3}+x^{a-4}$ por $-x^{a-3}+x^{a-1}-x^{a-2}$
34. $a^nb-a^{n-1}b^2+2a^{n-2}b^3-a^{n-3}b^4$ por $a^nb^2-a^{n-2}b^4$
35. $x^{n+2}+x^{n+1}-x^n$ por $5x-9$
36. $\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{5}xy-\frac{1}{4}y^2$ por $\frac{3}{2}y^3$
37. $\frac{2}{9}x^4-x^2y^2+\frac{1}{3}y^4$ por $\frac{3}{7}x^3y^4$
38. $\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{5}y^2$ por $-\frac{5}{8}a^2m$
39. $\frac{2}{3}m^3+\frac{1}{2}m^2n-\frac{5}{6}mn^2-\frac{1}{9}n^3$ por $\frac{3}{4}m^2n^3$
40. $\frac{2}{5}x^6-\frac{1}{3}x^4y^2+\frac{3}{5}x^2y^4-\frac{1}{10}y^6$ por $-\frac{5}{7}a^3x^4y^3$
41. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b$ por $\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b$
42. $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2$ por $\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y$
43. $\frac{1}{3}ax-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}a^2$ por $\frac{3}{2}x^2-ax+\frac{2}{3}a^2$
44. $\frac{2}{7}x^3+\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{5}x^2y$ por $\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{5}{6}y^2$
45. $\frac{3}{4}m^3-\frac{1}{2}m^2n+\frac{2}{5}mn^2-\frac{1}{4}n^3$ por $\frac{2}{3}m^2+\frac{5}{2}n^2-\frac{2}{3}mn$

División de monomios

Dados dos monomios A y B, $B \neq 0$ con coeficientes reales, dividir A entre B, $(A \div B)$ significa hallar un monomio C tal que $A = B.C$

Ejemplos

1. $24x^4y^2z \div 8x^1y^2$

   $\frac{24x^4y^2z}{8x^1y^2} = \frac{24}{8} \cdot \frac{x^4}{x^1} \cdot \frac{y^2}{y^2} \cdot \frac{z}{1} = 3 \cdot x^3 \cdot 1 \cdot z = 3x^3z$

   Observe que $24x^4y^2z = 8xy^2 \cdot 3x^3z$

2. $3a^4b^3 \div 7a^2b^2 = \frac{3a^4b^3}{7a^2b^2} = \frac{3}{7}\, a^2b$

3. $40mn^3 \div 5m^4nr = \frac{40mn^3}{5m^4nr} = \frac{8n^2}{m^3r} = 8n^2m^{-3}r^{-1}$

   Recordando que un monomio es una expresión algebraica entera en la que, con respecto a la parte literal, solo se combinan por la multiplicación y la potenciación con exponente natural, el cociente del ejemplo 3 no es un monomio, sin embargo el proceso es válido en este caso.

De un polinomio por un monomio

Dado un polinomio P y un monomio A con $A \neq 0$, $P \div A$ si existe, es un polinomio Q tal que $P = A \cdot Q$

P, lo podemos expresar como suma de monomios $P = B_1 + B_2 \ldots B_n$

es decir $P \div A = \frac{P}{A} = \frac{B_1 + B_2 + \ldots + B_n}{A}$

De las propiedades de las fracciones tenemos que:

$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a} = \frac{a_1}{a} + \frac{a_2}{a} + \ldots + \frac{a_n}{a}$ extendiendo esta propiedad a expresiones algebraicas tenemos que:

$$\frac{B_1 + B_2 + \ldots + B_n}{A} = \frac{B_1}{A} + \frac{B_2}{A} + \ldots + \frac{B_n}{A}$$

Ejemplos

1. Dividir: $72x^3y-60x^2y^2+18xy^3$ entre $6xy$

$$(72x^3y - 60x^2y^2 + 18xy^3\ ) \ \div 6xy = \frac{72x^3y - 60x^2y^2 + 18xy^3}{6xy}$$

$$= \frac{72x^3y}{6xy} + \frac{-60x^2y^2}{6xy} + \frac{18xy^3}{6xy}$$

$$72x^3y - 60x^2y^2 + 18xy^3 \ \div \ 6xy \ = \ 12x^2 \ - 10xy \ + \ 3y^2$$

2. Dividir: $(3x^2+y)^2-a(3x^2+y)$ entre $3x^2+y$

$$\frac{(3x^2 + y\,)^2 \ - \ \ a(3x^2 + y\,)}{3x^2 + y} = \frac{(3x^2 + y\,)^2}{3x^2 + y} - \frac{a(3x^2 + y\,)}{3x^2 + y}$$

$$\frac{(3x^2 + y\,)^2 \ - \ \ a(3x^2 + y\,)}{3x^2 + y} = 3x^2 + y - a$$

De un polinomio entre un polinomio

Una forma de presentar el algoritmo para dividir polinomios es partiendo de una multiplicación y luego deducimos la operación de división.

Ejemplo

$$\begin{aligned}
&(x^2+5x-7)\ (3x-4)\\
&= x^2(3x-4)+5x(3x-4)+(-7)(3x-4)\\
&= (3x^3-4x^2)+(15x^2-20x)+(-21x+28)\\
&= 3x^3+11x^2-41x+28
\end{aligned}$$

Por consiguiente si $(3x^3+11x^2-41x+28)$ se divide por $(3x-4)$, el resultado es: (x^2+5x-7).
El polinomio $(3x^3+11x^2-41x+28)$ se llama **dividendo**, $(3x-4)$ es el **divisor** y (x^2+5x-7), el **cociente**.

El primer término del dividendo, $3x^3$, proviene de multiplicar el primer término del cociente, x^2, por el primer término del divisor $3x$. De modo que para obtener el primer término del cociente, x^2, dividimos el primer término del dividendo, $3x^3$, por el primer término del divisor, $3x$.

Multiplicando todo el divisor $(3x-4)$ por ese primer término del cociente, x^2 obtenemos $3x^2-4x^2$. Al restar $3x^3-4x^2$ del dividendo, resulta:

$$(3x^3+11x^2-41x+28)-(3x^3-4x^2)=15x^2-41x+28$$

La cantidad $15x^2-41x+28$ es el nuevo dividendo. El primer término, $15x^2$, del nuevo dividendo proviene de multiplicar el segundo término del cociente, $5x$, por el primero del divisor, $3x$. Así, que para obtener el segundo término del cociente, $5x$, se divide el primero del nuevo dividendo $15x^2$, por el primer término del divisor, $3x$. Multiplicando el divisor $3x-4$ por el segundo término del cociente, $5x$, se obtiene $15x^2-20x$. Restando $15x^2-20x$ del nuevo dividendo, resulta:

$$(15x^2-41x+28)-(15x^2-20x)=-21x+28$$

La cantidad $-21x+28$ es ahora el nuevo dividendo. Al dividir el primer término, $(-21x)$, de este nuevo dividendo por el primero del divisor, $3x$, se obtiene el tercer término, (-7), del cociente. Multiplicando el divisor $(3x-4)$ por el tercer término del cociente, (-7) se obtiene $-21x+28$.

Restando $(-21x+28)$ del dividendo $(-21x+28)$, resulta 0. Iniciemos nuevamente el problema disponiéndolo de una manera semejante a la de la división en aritmética.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 11x^2 - 41x + 28 & 3x - 4 \\ \hline & x^2 + 5x - 7 \end{array}$$

El primer término del cociente es:
$3x^3 \div 3x = x^2$

$$\begin{array}{r} -3x^3 + 4x^2 \\ \hline 15x^2 - 41x + 28 \\ -15x^2 + 20x \\ \hline -21x + 28 \\ +21x - 28 \\ \hline 0 \end{array}$$

$15x^2 - 41x + 28$ es el dividendo

El segundo término del cociente es:
$15x^2 \div 3x = 5x$

El tercer término del cociete es:
$(-21x) \div 3x = -7$

Ejercicio 2.4

1. Simplifique:

   a. $\dfrac{(x+y)^8}{(x+y)^4}$

   b. $\dfrac{x^6y^4}{x^3y^2}$

   c. $\dfrac{(4xy^2z)^4}{(-2x^2yz^3)^3}$

   d. $\dfrac{9a^2b^5}{36a^6b^{10}}$

   e. $\dfrac{(-6x^3y^2z^2)^3}{(-12x^2yz^5)^4}$

   f. $\dfrac{-6a^8b^7}{18a^4b^9}$

   g. $\dfrac{x^4y^2z^7}{2x^3y^4z^7}$

   h. $\dfrac{36a^{10}b^7}{-12a^2b^8}$

   i. $\dfrac{x^3y(3x^4+5)^3}{x^4y^9(3x^4+5)^7}$

2. Efectúe y simplifique:

   a. $\dfrac{4x^3+6x^2-10x}{2x}$

   b. $\dfrac{21x^5+7x^3-14x^2}{-7x^2}$

   c. $\dfrac{a^2b^5-a^3b^4+a^4b^3}{a^2b^3}$

   d. $\dfrac{-30a^2b^4-45a^2b^3}{-15a^2b^3}$

   e. $\dfrac{2x^4y^2-4x^3y^3+6x^2y^4}{-2x^3y^3}$

   f. $\dfrac{x^6-2x^4y^2-3x^2y^4}{-3x^3y^3}$

   g. $\dfrac{(x+3a)-2a(x+3a)}{(x+3a)}$

   h. $\dfrac{3a^4-6a^3+18a^2}{-3a^2}+(a-2)(a-3)$

   i. $\dfrac{4a^5-6a^4-8a^3}{2a^3}-(2a-1)(a+1)$

   j. $\dfrac{a^5-a^4-2a^3}{a^3}-(a+1)(a-2)$

3. Efectúe las siguientes divisiones:

   a. $(2a^4-3b^4-13a^2b^2+14ab^3)\div(a^2+2ab-3b^2)$

   b. $(19a^2-10a^3+a^5-14a+6)\div(a^2-2a+1)$

   c. $(3x^4+2x^3+3x-6x^2-2)\div(x^2+x-2)$

   d. $(17x^4+6x^5-9x^3-27x-8x-30)\div(8-x+6x^2)$

e. $(x^3-y^3)\div(x-y)$

f. $(x^4-16y^4)\div(x^2+4y^2)$

g. $(4x^4+3x^2y^2-5xy^3-6y^4)\div(2x^2+xy-2y^2)$

h. $(25x^2-4x^4+5x^5-11x+10)\div(x^2+3-2x)$

i. $(2x^4-11x^3+3x^5+10x+4)\div(x+x^2-2)$

j. $(28x^4-17x^3+20x+23x^2-21)\div(4x^2-3x+6)$

k. $\frac{1}{6}a^2+\frac{5}{36}ab-\frac{1}{6}b^2$ entre $\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b$

l. $\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{10}xy-\frac{1}{3}y^2$ entre $x-\frac{2}{5}y$

m. $\frac{1}{3}x^3-\frac{35}{36}x^2y+\frac{2}{3}xy^2-\frac{3}{8}y^3$ entre $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2$

n. $\frac{1}{16}a^3-\frac{5}{8}a^2b-b^3+\frac{5}{3}ab^2$ entre $\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b$

o. $\frac{3}{5}m^4+\frac{1}{10}m^3n-\frac{17}{60}m^2n^2+\frac{7}{6}mn^3-n^4$ entre $\frac{3}{2}m^2+2n^2-mn$

p. $\frac{3}{4}x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{37}{40}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{5}+\frac{19}{30}x$ entre $2x^3-\frac{1}{3}x+2$

q. $\frac{9}{4}a^4-a^3x+\frac{13}{18}ax^3-\frac{1}{12}a^2x^2-\frac{1}{3}x^4$ entre $\frac{3}{2}a^2-ax+\frac{2}{3}x^2$

r. $\frac{1}{3}x^3-\frac{35}{36}x^2y+\frac{2}{3}xy^2-\frac{3}{8}y^3$ entre $\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y$

4. Divida:

a. $a^{x+3}+a^x$ entre $a+1$

b. $x^{n+2}+3x^{n+3}+x^{n+4}-x^{n+5}$ entre x^2+x

c. $m^{a+4}-m^{a+3}+6m^{a+1}-5m^a+m^{a-1}$ entre m^2-2m+3

d. $a^{2n+3}+4a^{2n+2}+a^{2n+1}-2a^{2n}$ entre a^n+a^{n+1}

e. $x^{2a+5}+3x^{2a+3}+2x^{2a+4}-4x^{2a+2}+2x^{2a+1}$ entre $x^{a+3}-2x^{a+1}$

f. $a^{x+2}-2a^x+8a^{x-1}-3a^{x-2}$ entre $3a^{x-2}-2a^{x-1}+a^x$

g. $a^{2x}-4a^{2x-2}+5a^{2x-3}+2a^{2x-1}-2a^{2x-4}$ entre $a^x-a^{x-1}+a^{x-2}$

h. $m^{2a-2}-m^{2a-1}-4m^{2a}+2m^{2a+1}+2m^{2a+2}-m^{2a+3}\div m^{a-3}-m^{a-1}+m^{a-2}$

Productos notables

Al efectuar las siguientes multiplicaciones $755\times100=75.500$;

$$453\times11=4.983; \qquad 93\times87=8.100-9=8.091$$

Observe que no hemos hecho todo el proceso algorítmico porque existen procedimientos que lo simplifican.

A las multiplicaciones que les podemos aplicar procedimientos, que simplifiquen el algoritmo para hallar su producto, se les denomina productos notables.

En la multiplicación de polinomios algunos de los productos notables son:

$$1.\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Ejemplos

1. $(2x+5y^3)^2=(2x)^2+2(2x)(5y^3)+(5y^3)^2$

$$=4x^2+20xy^3+25y^6$$

2. $(5x+2y+4z)^2=([5x+2y]+4z)^2$

$$[(5x+2y)+4z]^2=(5x+2y)^2+2(5x+2y)(4z)+(4z)^2$$

$$=(25x^2+20xy+4y^2)+(10x+4y)(4z)+16z^2$$

$$(5x+2y+4z)^2=25x^2+20xy+4y^2+40xz+16yz+16z^2$$

$$2.\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Ejemplos

$$(x^2+2x-y+3)^2$$

$$[(x^2+2x)-(y-3)]^2=(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)(y-3)+(y-3)^2$$

$$=(x^4+4x^3+4x^2)-(2x^2y-6x^2+4xy-12x)+(y^2-6y+9)$$

$$(x^2+2x+y-3)^2=x^4+4x^3-2x^2y+10x^2-4xy+y^2+12x-6y+9$$

3. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Ejemplo

$$\begin{aligned}(3x^2+2y)^3 &= (3x^2)^3+3(3x^2)^2(2y)+3(3x^2)(2y)^2+(2y)^3\\ &= 27x^6+54x^4y+36x^2y^2+8y^3\end{aligned}$$

4. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Ejemplo

$$\begin{aligned}(5x^{2n}-4y^3)^3 &= (5x^{2n})^3-3(5x^{2n})^2(4y^3)+3(5x^{2n})(4y^3)^2-(4y^3)^3\\ &= 125x^{6n}-300x^{4n}y^3+240x^{2n}y^6-64y^9\end{aligned}$$

5. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Ejemplo

1. $$\begin{aligned}&= (x+y-z)(x-y+z)\\ &= [x+(y-z)][x-(y+z)]\\ &= x^2-(y-z)^2\\ &= x^2-(y^2-2yz+z^2)\\ &= x^2-y^2+2yz-z^2\end{aligned}$$

2. Calcular 93×87

$93\times87=(90+3)(90-3)=90^2-3^2=8.100-9=8.091$

6. $(x+m)(x+n)=x^2+(m+n)x+mn$

Ejemplo

1. $(x+9)(x-7) =$
$= x^2 + (9-7)x + 9(-7)$
$= x^2 + 2x - 63$

2- $(x^2-7a)(x^2-5a) =$
$= x^4 + (-7a-5a)x^2 + (-7a)(-5a)$
$= x^4 - 12ax^2 + 35a^2$

7. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

Ejemplo

1. $(3x+5)(7x-8) =$
$= 21x^2 + [3(-8) + 5 \times 7]x + 5(-8)$
$= 21x^2 + 11x - 40$

Esta regla de producto puede lograrse mentalmente según el esquema que se presenta en la siguiente figura:

Nota: si al desarrollar un producto notable no recuerda su fórmula, debe recurrirse al proceso algorítmico usual.

2. $(x+5)^2 = (x+5)(x+5) = x^2 + 5x + 5x + 25$
$= x^2 + 10x + 25$

Ejercicio 2.5

Efectúe:

1. $(2x^2 - 3y^2)^2$
2. $(a^2 - ab)^2$
3. $(a^2 + 3)(a^2 - 3)$
4. $(ax + xy)(ax - xy)$
5. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)$
6. $(a - b + c)(a + b + c)$
7. $(2x + 5)(3x - 2)$
8. $(4x - 2)(3x - 2)$
9. $(2c^2 + d^2)^3$
10. $(3m - 2n^2)^3$
11. $(a + b)^4$
12. $(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$
13. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$
14. $(a - b + c - d)^2$
15. $(2w - x + 2y - z)^2$
16. $(x + 7)^2$
17. $(a^4\, b^3\, c^2 + 1)(a^4\, b^3\, c^2 - 1)$
18. $(y^{n+1} + 12)^2$
19. $(3s^n + 1)^2$
20. $[(1 - x) + x^2]^2$
21. $[(1 - x) + x^2][(1 - x) - x^2]$
22. $[(t + 2) + t^3][(t + 2) - t^3]$
23. $(y^3 + 2u^2)(y^3 - 2u^2)$
24. $(2x^4 + 5y)(2x^4 - 5y)$
25. $[(x^2 + 2) + x][(x^2 + 2) - x]$
26. $(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 3)$

Cocientes notables

Al igual que en la multiplicación de polinomios podemos aplicar procedimientos que simplifiquen el algoritmo para hallar el cociente entre algunos polinomios, a estos procedimientos se les denominan cocientes notables.

Algunos de los cocientes notables son:

$$\frac{a^2-b^2}{a+b} = a-b$$

Ejemplo

1. Dividir $9x^2-y^2$ entre $3x+y$

$$\frac{9x^2-y^2}{3x+y} = \frac{(3x)^2-y^2}{3x+y} = 3x - y$$

2. Dividir $(a+b)^2-c^2$ entre $a+b+c$

$$\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)+c} = a + b - c$$

$$\frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b$$

Ejemplo

1. Dividir $1-x^4$ entre $1-x^2$.

$$\frac{1-x^4}{1-x^2} = \frac{1-(x^2)^2}{1-x^2} = 1+x^2$$

Se puede verificar que a^2+b^2 no es divisible entre $a+b$, ni entre $a-b$

$$\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2$$

Ejemplo

1. Dividir $8x^3+y^3$ entre $2x+y$

$$\frac{8x^3+y^3}{2x+y} = \frac{(2x)^3+y^3}{2x+y} = (2x)^2 - 2x(y) + y^2 = 4x^2 - 2xy + y^2$$

2. Dividir $27x^6+125y^9$ entre $3x^2+5y^3$

$$\frac{27x^6+125y^9}{3x^2+5y^3} = \frac{(3x^2)^3+(5y^3)^3}{3x^2+5y^3} = (3x^2)^2 - 3x^2\,(5y^3) + (5y^3)^2$$
$$= 9x^4 - 15x^2y^3 + 25y^6$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$$

Ejemplo

Dividir $1-64a^3$ entre $1-4a$

$$\frac{1-64a^3}{1-4a} = \frac{1-(4a)^3}{1-4a} = 1 + 4a + (4a)^2 = 1 + 4a + 16a^2$$

Al extender el cociente de la suma o diferencia de potencias iguales entre la suma o diferencia de sus bases se puede demostrar por inducción que:

La **diferencia** de potencias iguales, ya sean **pares** o **impares**, es siempre divisible por la diferencia de las bases.

$$\frac{a^n-b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1} \text{ para cualquier } n \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplo

1. $\frac{a^4-b^4}{a-b} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

2. $\frac{a^5-b^5}{a-b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$

La **diferencia** de potencias iguales **pares** siempre es divisible por la **suma** de sus bases.

$$\frac{a^n-b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1} \text{ para } n \text{ par}$$

Ejemplo

1. $\frac{a^4-b^4}{a+b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

2. $\frac{m^8-n^8}{m+n} = m^7 - m^6n + m^5n^2 - m^4n^3 + m^3n^4 - m^2n^5 + mn^6 - n^7$

3. $\frac{a^5-b^5}{a+b}$ no es exacta la división (por ser $n = 5$ impar).

La suma de potencias iguales impares siempre es divisible por la suma de sus bases.

$\frac{a^n+b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}$ si n es impar

Ejemplos

1. $\frac{a^7+b^7}{a+b} = a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6$

2. Hallar el cociente de x^5+32 entre $x+2$
   Como $32=2^5$ tenemos que

$$\frac{x^5+32}{x+2} = \frac{x^5+2^5}{x+2} = x^4 - 2x^3 + 2^2x^2 - 2^3x + 2^4$$

$$\frac{x^5+32}{x+2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$$

La suma de potencias iguales **pares** no siempre es divisible por la suma ni por la diferencia de las bases.

Ejemplo

1. $\frac{a^5+b^5}{a-b}$ no es exacta la división.
2. $\frac{a^4+b^4}{a+b}$ no es exacta la división.
3. $\frac{a^4+b^4}{a-b}$ no es exacta la división.

Ejercicio 2.6

1. Halle el cociente:

   a. $\frac{x^2-1}{x+1}$ b. $\frac{x^2-y^2}{x+y}$

   c. $\frac{x^2-4}{x+2}$ d. $\frac{a^2-4b^2}{a+2b}$

   e. $\frac{4x^2-9m^2n^4}{2x+3mn^2}$ f. $\frac{81a^6-100b^8}{9a^3+10b^4}$

   g. $\frac{x^{2n}-y^{2n}}{x^n+y^n}$ h. $\frac{a^{2x+2}-100}{a^{x+1}-10}$

i. $\frac{(x+y)^2-z^2}{(x+y)-z}$ j. $\frac{(a+x)^2-9}{(a+x)+3}$

k. $\frac{x^5-1}{x-1}$

2. Halle el cociente:

a. $\frac{1+a^3}{1+a}$ b. $\frac{x^3+y^3}{x+y}$

c. $\frac{8x^3+27y^3}{2x+3y}$ d. $\frac{64a^3+343}{4a+7}$

e. $\frac{a^3x^3+b^3}{ax+b}$ f. $\frac{n^3-m^3x^3}{n-mx}$

g. $\frac{x^6-27y^3}{x^2-3y}$ h. $\frac{1-x^{12}}{1-x^4}$

i. $\frac{125-343x^{15}}{5-7x^5}$ j. $\frac{n^6+1}{n^2+1}$

Factorización

Factorizar una expresión es transformarla en otra equivalente en forma de producto.

Ejemplo

1. $10 = 2\times5$
2. $x^2-2x = x(x-2)$

La factorización de cualquier número natural se desarrolla con el mismo procedimiento.

En la factorización de polinomios no existe un procedimiento general, de ahí que se deban desarrollar técnicas aplicables a ciertos polinomios; consideraremos solo binomios, trinomios y polinomios de cuatro términos.

Factorización de binomios

Factor común: la multiplicación más elemental que nos da como producto un binomio, resulta al aplicar la propiedad distributiva $a(b+c)=ab+ac$.

Factorizar un binomio de la forma $ab+ac$ es aplicar la propiedad distributiva:

$$ab + ac = a(b+c)$$

donde a es el **factor común**; observemos que a es múltiplo de ab y de ac .

Ejemplo

1. Factorizar $10b-30ab^2=10b(1-3ab)$
2. $x^4+7x^3=x^3(x+7)$
3. $(x^2+2)(m-n)+2(m-n)=(m-n)[(x^2+2)+2]=(m-n)(x^2+4)$

Como podemos notar, el factor común es el M.C.D. (Máximo Común Divisor) entre los términos, luego se divide cada uno de los términos del binomio entre el M.C.D. (Máximo Común Divisor) y se obtiene el otro factor.

Ejemplo

4. Si consideramos que el factor común puede contener coeficientes reales cualesquiera;

   Completar $3x^4-7 = 3\,(\quad\quad)$

   $3x^4-7 = 3\,(x^4-\frac{7}{3})$

5. Hallar el factor común a de tal manera que el factor $b+c$ contenga solo coeficientes enteros.

$$\frac{5}{4}\,x^3y^4 - \frac{3}{16}\,x^2y^2 = \frac{1}{16}\,x^2\,y^2(20xy^2 - 3)$$

Ejercicio 2.7

1. Factorice:

   a. a^2+ab b. x^2+x

   c. x^3-4x^4 d. $ab-bc$

   e. $2a^2x+6ax^2$ f. $9a^3x^2-18ax^3$

   g. $35m^2n^3-70m^3$ h. $24a^2xy^2-36x^2y^4$

   i. $x^4y^3z^2+3x^2y^4$

2. Factorice:

   a. $(x+y)(n+1)-3(n+1)$

   b. $(x+1)(x-2)+3y(x-2)$

   c. $(a+3)(a+1)-4(a+1)$

   d. $a(x-1)+(a+2)(x-1)$

   e. $(a+b-c)(x-3)-(b+c+a)(x-3)$

3. Dado un factor encontrar el factor B si consideramos coeficientes reales

   a. $3x^2-9x=\sqrt{3}x\cdot B$

   b. $7x^2-12x^2y=7x^2\cdot B$

   c. $3(m+n)^2-5n(m+n)=\frac{1}{15}(m+n)\cdot B$

   d. $\sqrt{5}x+5=\sqrt{5}\cdot B$

4. Dado $ab+ac$, halle el factor común a de tal manera que el factor $b+c$ contenga solo coeficientes enteros.

   a. $x^2y-\frac{4}{15}xy^2$

   b. $\frac{3}{25}xy^2-\frac{1}{5}x^2y^3z$

   c. $\frac{9}{16}x^2-\frac{15}{4}x^3m$

   d. $\frac{1}{15}x^2+1$

Binomio de la forma: $a^n - b^n$

Si $n=2$ tenemos una diferencia de cuadrados.

Recordemos que: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Dado a^2-b^2 tenemos que:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Donde a, es la raíz cuadrada de a^2 y b es la raíz cuadrada de b^2. Esquemáticamente: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, donde $a>b>0$.

Ejemplos

1. Factorizar x^2-25

   $x^2-25=x^2-5^2$; $a=x$ y $b=5$ por lo tanto, $x^2-25=(x+5)(x-5)$

2. $x^{2n}-9y^{4m}$

   $x^{2n}-9y^{4m} = (x^n)^2-(3y^{2m})^2$; $a=x^n$ y $b=3y^{2m}$ por lo tanto,
   $= (x^n-3y^{2m})\ (x^n+3y^{2m})$

3. Factorizar

   $\frac{1}{100} - x^{2n}$

   $\frac{1}{100} - x^{2n} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 - (x^n)^2$

   $\left(\frac{1}{10} + x^n\right)\left(\frac{1}{10} - x^n\right)$

4. Factorizar

   $(m+x)^2-(x+2)^2$ sea $a=m+x$ y $b=x+2$

   $= [(m+x)+(x+2)][(m+x)-(x+2)]$
   $= (m+x+x+2)(m+x-x-2)$
   $= (2x+m+2)(m-2)$

5. Factorizar $m^4-81 = (m^2)^2-9^2$

   $= (m^2+9)(m^2-9)$
   $= (m^2+9)(m+3)(m+3)$

6. x^2-5 no se puede factorizar si asumimos que los coeficientes son números enteros, pero, si los coeficientes numéricos son números reales tenemos que:

   $x^2-5=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

   Si $n=3$ tenemos una diferencia de cubos.

   Recordemos que $\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$ por lo tanto:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Donde a es la raíz cúbica de a^3 y b es la raíz cúbica de b^3.

Ejemplo

1. Factorizar $8x^3-y^3$

$$\begin{aligned} 8x^3-y^3 &= (2x)^3-y^3;\ a=2x\ \ b=y \\ &= (2x-y)[(2x)^2+(2x)y+y^2) \\ &= (2x-y)(4x^2+2xy+y^2) \end{aligned}$$

2. Factorizar $27x^6-(2y-3z)^3$

   Observemos que: $a=3x^2$ y $b=2y-3z$ por lo tanto

$$(3x^2)^3-(2y-3z)^3=[3x^2-(2y-3z)][(3x^2)^2+3x^2(2y-3z)+(2y-3z)^2]$$

$$=[3x^2-2y+3z][9x^4+6x^2y-9x^2z+4y^2-12yz+9z^2]$$

3. Factorizar x^3-6. Si asumimos que los coeficientes son números reales tenemos que: $x^3-6=(x-\sqrt[3]{6})(x^2+\sqrt[3]{6}x+\sqrt[3]{6^2})$

   Para $n=4$ tenemos que:

$$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$

$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

Para cualquier n entero positivo se puede demostrar por inducción que:

$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}$ de dónde se deduce que:

$$a^n - b^n = (a-b)(\, a^{n-1} + a^{n-2}\, b^1 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Donde a es la raíz enésima de a^n y b la raíz enésima de bn.

Ejemplo

1. Factorizar $a^7 - 128y^7$.

   Descomponiendo 128, en factores primos se tiene que: $128 = 2^7$, por lo tanto: $a^7 - 128y^7 = a^7 - (2y)^7$

   Observemos que $a = a;\ \ b = 2y$ y $n = 7$

   $a^7 - 128y^7 = a^7 - (2y)^7$
   $a = a;\ \ b = 2y$ y $n = 7$

$$\begin{aligned} a^7 - (2y)^7 &= (a-2y)[(a^6 + a^5(2y) + a^4(2y)^2 + a^3(2y)^3) + a^2(2y)^4 + a(2y)^5 + (2y)^6] \\ &= (a-2y)[a^6 + 2a^5y + a^4 4y^2 + a^3 8y^3 + a^2 16y^4 + 32ay^5 + 64y^6] \\ &= (a-2y)[a^6 + 2a^5y + 4a^4 4y^2 + 8a^3y^3 + 16a^2y^4 + 32ay^5 + 64y^6] \end{aligned}$$

Ejercicio 2.8

Factorice:

1. $x^{2n} - y^2$
2. $a^2 - 4$
3. $1 - 4m^2$
4. $4a^2 - 9$
5. $1 - 49a^2b^2$
6. $a^{10} - 49b^{12}$
7. $64 - a^6$
8. $1 - 216m^3$
9. $x^6 - b^9$
10. $1 - 343n^3$
11. $a^3b^3 - x^6$
12. $x^6 - 8y^{12}$
13. $100m^2n^4 - 169y^6$
14. $196x^2y^4 - 225z^{12}$

15. $1 - 9a^2b^4c^6d^8$
16. $a^6 - 125b^{12}$
17. $x^{12} - y^{12}$
18. $1 - 27a^3b^3$
19. $a^5 - 1$
20. $a^{21} - b^7$
21. $a^5 - 243$
22. $1 - 243x^5$
23. $a^5 - b^5c^5$
24. $m^7 - a^7x^7$
25. $\frac{1}{4} - 9a^2$
26. $\frac{1}{16} - \frac{4x^2}{49}$
27. $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2z^4}{81}$
28. $4x^{2n} - \frac{1}{9}$
29. $16x^{6m} - \frac{y^{2n}}{49}$
30. $a^{2n}b^{4n} - \frac{1}{25}$
31. $1 - a^{3n+6}$
32. $m^{3m} - n^9$
33. $y^3 - (\frac{1}{125})$
34. $8x^3 - 1$
35. $343\,x^3 - 27$
36. $8x^3 - y^{3n}$
37. $8x^6 - 729$
38. $216 - x^{12}$
39. $a^{3n} - (\frac{1}{64})$
40. $1 - x^6$
41. $1 - 128a^7$
42. $x^{10} - 32y^5$
43. $1 - 128x^{14}$
44. $32 - m^5$
45. $243 - 32b^5$

Factorice utilizando como coeficientes números reales.

46. $x^2 - 50$ b. $x^3 - 16$ c. $x^5 - 2$

Binomio de la forma: $a^n + b^n$

Haciendo un proceso análogo al anterior, Para $n=2$ el cociente;

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b}$$ no es exacto.

Si $n = 3$ tenemos una suma de cubos en el numerador. Recordemos que: $\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$ por lo tanto,

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Donde a es la raíz cúbica de a^3 y b es la raíz cúbica de b^3.

Ejemplo

Factorizar $27x^3+8y^9$

$27x^3 + 8y^9 = (3x)^3 + (2y^3)^3$

Observe que: $a= 3x$ y $b=2y^3$

$$(3x)^3 + (2y^3)^3 = (3x + 2y^3)[(3x)^2 - (3x)(2y^3) + (2y^3)^2]$$
$$= (3x + 2y^3)(9x^2 - 6xy^3 + 4y^6)$$

Para $n = 4$, el cociente:

$\frac{a^4 + b^4}{a + b}$ no es exacto.

Para cualquier n entero positivo **impar**, se puede demostrar por el teorema del residuo que:

$$\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}\, b + \ldots - a\, b^{n-2} + b^{n-1}$$

de donde se deduce que:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b^1 + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

donde a es la raíz enésima de a^n y b la raíz enésima de b^n.

Ejemplo

Factorizar $32a^5+243b^{10}$. Descomponiendo 32 y 243 en factores primos, tenemos que:

$32 = 2^5$ y $243 = 3^5$, luego:

$$= 32a^5 + 243b^{10} = (2a)^5 + (3b^2)^5$$
$$= (2a+3b^2)[(2a)^4-(2a)^3(3b^2)+(2a)^2(3b^2)^2-(2a)(3b^2)^3+(3b^2)^4]$$
$$= (2a+3b^2)[16a^4-(8a^3)(3b^2)+(4a^2)(9b^4)-(2a)(27b^6)+81b^8]$$
$$= (2a+3b^2)[16a^4- 24a^3b^2+36a^2b^4-54ab^6+81b^8]$$

Ejercicio 2.9

Factorice:

1. $27\mathrm{m}^3 + 64\mathrm{n}^9$
2. $343x^3 + 512y^6$
3. $x^9 + \mathrm{y}^6$
4. $a^{6n} + 125b^{12}$
5. $x^{12} + y^9$
6. $1 + 27a^3b^6$
7. $1 + x^{14}$
8. $1 + 512a^9$
9. $x^{10} + 32y^5$
10. $1 + 128x^{14}$
11. $32 + m^5$
12. $243 + 32\mathrm{b}^5$
13. $\frac{1}{32} + 243x^5$
14. $a^5 + \frac{b^5c^5}{243}$
15. $y^{14n} + a^7x^7$

Factorización de trinomios

Factor común: dado, $ax+bx+cx$, aplicando la propiedad distributiva lo podemos expresar:

$ax+bx+cx= x\ (a+b+c)$, x es el factor común.

Ejemplo

Factorizar $72xy^2-180x^2y^3-120x^3y^4$

El máximo divisor común entre, 72, 180 y 120 es 12, por lo tanto el factor común es $12xy^2$.

$$72xy^2-180x^2y^3-120x^3y^4= 12xy^2(6-15xy-10x^2y^2)$$

Ejercicio 2.10

Factorice:

1. $4x^3 - 8x^2 + 2x$
2. $a^3 - a^2x + ax^2$
3. $x^3 + x^5 - x^7$
4. $34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$
5. $93a^3x^2y - 62a^2x^3y^2 - 124a^2x$
6. $a^2b^2c^2 - a^2c^2x^2 + a^2c^2y^2$
7. $55m^2n^3x + 110m^2n^3x^2 - 220m^2y^3$
8. $64a^3x^2y - 48a^2x^3y^2 - 128a^2x$
9. $4a^2x^4 + 8a^2x^6 - 16a^2x^2$
10. $x(a + 2) - a - 2 + w(a + 2)$
11. $(1 + 3a)(x + 1) - 2a(x + 1) + 3(x + 1)$
12. $(3x + 2)(x + y - z) - (3x + 2) - (x + y - 1)(3x + 2)$

Trinomio cuadrado perfecto

Recordemos que $(a+b)^2= a^2+2ab+b^2$ y $(a-b)^2= a^2-2ab+b^2$

Dado $a^2+2ab+b^2$ o $a^2-2ab+b^2$ debemos llegar a :

$$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2 \quad \text{o } a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$$

$a^2 \pm 2ab + b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto, para identificarlo dos de sus términos son cuadrados perfectos (es decir que tienen raíz cuadrada exacta) y el otro término debe ser el doble producto de sus raíces cuadradas.

Esquemáticamente: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ para los números positivos a y b.

Ejemplo

1. Factorizar $x^2+4xy+4y^2$

   $x^2+4xy+4y^2=x^2+4xy+(2y)^2$

   Observe que $a=x$ y $b=2y$; el doble producto de las raíces cuadradas es:

   $2(x)(2y) = 4xy$ que es el otro término, por lo tanto:

   $$x^2+4xy+(2y)^2=(x+2y)^2$$

2. Factorizar: $m^4-m^2+\frac{1}{4}$

   $m^4-m^2+\frac{1}{4} = (m^2)^2-m^2+\left(\frac{1}{4}\right)= (m^2)^2 -m^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

   Observe que $a= m^2$ y $b =\frac{1}{2}$; el doble producto de las raíces cuadradas es:

   $2(m^2)\left(\frac{1}{2}\right)=m^2$ que es el otro término, por lo tanto:

   $m^4-m^2+\frac{1}{4} =\left(m^2-\frac{1}{2}\right)^2$

3. Factorizar: $(x+y)^2 - 2(x+y)(c+x) + (c+x)^2$;
   $a = x + y$ y $b = c + x$

$$\begin{aligned}(x+y)^2 - 2(x+y)(c+x) + (c+x)^2 &= ([x + y] - [c + x])^2\\ &= (x + y - c - x)^2\\ &= (y - c\ )^2\end{aligned}$$

Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción

Ejemplos

1. Factorizar: $a^4 + 3a^2 + 4$

   En principio verificamos si es un trinomio cuadrado perfecto:

   $a^4 + 3a^2 + 4 = (a^2)^2 + 3a^2 + 2^2$.
   Hallamos el doble producto entre a^2 y 2:
   $2(a^2)(2) = 4a^2;\ 4a^2 \neq 3a^2$

   No es trinomio cuadrado perfecto, pero si sumamos a^2 lo es; como a^2 tiene raíz cuadrada exacta, al restarla da origen a una diferencia de cuadrados, lo que nos permite seguir el procedimiento.

   $a^4 + 3a^2 + 4 + a^2 - a^2 - (a^4 + 4a^2 + 4) - a^2$
   $(a^2+2)^2 - a^2 = [(a^2+2) + a][(a^2+2) - a] = (a^2+2+a)(a^2+2-a)$

   ordenando tenemos:

   $$= (a^2 + a + 2)\ (a^2 - a + 2)$$

2. Factorizar $81x^4+4y^4$

   $81x^4 + 4y^4 = (9x^2)^2 + (2y^2)^2$

   El doble producto es $2(9x^2)(2y^2)$ como $36x^2y^2$ tiene raíz cuadrada exacta, sumamos y restamos $36x^2y^2$,

   $81x^4 + 4y^4 = 81x^4 + 4y^4 + 36x^2y^2 - 36x^2y^2$

   $= (81x^4 + 36x^2y^2 + 4y^4) - 36x^2y^2$

   $= (9x^2 + 2y^2)^2 - 36x^2y^2$ aplicando diferencia de cuadrados.

   $= [(9x^2 + 2y^2) + 6xy]\ [(9x^2 + 2y^2) - 6xy\ ]$

   $81x^4 + 4y^4 = (9x^2 + 6xy + 2y^2)(9x^2 - 6xy + 2y^2)$

Algunas veces es posible que un binomio o trinomio se pueda convertir en un trinomio cuadrado perfecto sumándole una expresión; si a su vez esta expresión tiene raíz cuadrada exacta al restarla da origen a una diferencia de cuadrados.

Ejercicio 2.11

Factorice:

1. $a^2 - 10a + 25$
2. $1 - 2a^3 + a^6$
3. $1 + 14x^2y + 49x^4y^2$
4. $a^2 - 24am^2x^2 + 144m^4x^4$
5. $\frac{a^2}{4} - ab + b^2$
6. $1 + \frac{2b}{3} + \frac{b^2}{9}$
7. $a^4 - a^2b^2 + \frac{b^4}{4}$
8. $\frac{1}{25} + \frac{25x^4}{36} - \frac{x^2}{3}$
9. $16x^6 - 2x^3y^2 + \frac{y^4}{16}$
10. $\frac{n^2}{9} + \frac{2mn}{3} + m^2$
11. $144 + 23n^6 + 9n^{12}$
12. $64a^4 - 169a^2b^4 + 81b^8$
13. $1 - 126a^2b^4 + 169a^4b^8$
14. $49c^8 + 167c^4m^2n^2 + 144m^4n^4$
15. $x^4 + 64y^4$
16. $a^4 + 324b^4$
17. $4 + 625x^8$
18. $1 + 4n^4$
19. $81a^4 + 64b^4$
20. $x^8 - 5x^4y^2 + 4y^4$
21. $a^4 - 16a^2b^2 + 36b^4$
22. $c^4 - 45c^2 + 100$
23. $a^4 + a^2 + 4$
24. $x^8 + 3x^4 + 4$
25. $a^4 - 3a^2b^2 + b^4$
26. $a^4 - 3a^2b^2 + 9b^4$
27. $x^8 + 4x^4y^4 + 16y^8$
28. $25a^4 + 54a^2b^2 + 49b^4$
29. $81m^8 + 2m^4 + 1$
30. $4a^8 - 53a^4b^4 + 49b^8$
31. $25x^4 - 139x^2y^2 + 81y^4$
32. $4 - 108x^2 + 121x^4$
33. $9(x - y)^2 + 12(x - y)(x + y) + 4(x + y)^2$
34. $4(1 + a)^2 - 4(1 + a)(b - 1) + (b - 1)^2$

Trinomio de la forma: x^2+bx+c

Recordemos que $(x+m)(x+n) = x^2+(m+n)x+mn$

Si tenemos un trinomio de la forma x^2+bx+c y existen números enteros m y n tales que: $b = m+n$ y $c = mn$ entonces:

$$x^2+bx+c = x^2+(m+n)x+mn$$

En esencia se trata de encontrar dos números m y n que multiplicados den como resultado el término independiente c y que sumados den como resultado b, el coeficiente de x.

Ejemplos

1. **Factorizar**: x^2+5x+6

   Es fácil hallar dos números que multiplicados den 6 y sumados den 5; $m = 3$ y $n = 2$

   $$x^2+5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

2. **Factorizar**: $x^2-13x+30$

   Hallamos dos números m y n que multiplicados den 30 y sumados den (-13) necesariamente m y n deben ser negativos. ¿Por qué?

   $$x^2 - 13x + 30 = (x - 10)(x - 3)$$

3. **Factorizar**: $x^2-13x-30$

   Hallamos dos números m y n tales que multiplicados den (-30) necesariamente deben ser de signos diferentes. ¿Por qué?

   Al ser de signos diferentes su suma algebraica es una resta.

   $a + (-b) = a - b$

   $$x^2 - 13x - 30 = (x - 15)(x + 2)$$

4. Factorizar: $x^2+3x-10$

Debemos encontrar dos números m y n que multiplicados su producto sea, (-10) y que restados, su diferencia sea $(+3)$, luego:

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$$

5. Factorizar: $x^2+26x+144$

Es poco probable que por simple inspección como en los casos anteriores; encontrar m y n tales que la suma sea 26 y el producto 144, la dificultad estriba en que hay varias combinaciones de dos números que multiplicados su producto es 144.

Para poderlas tener en cuenta es necesario hacer la descomposición en factores primos de 144. Veamos:

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & \\ \end{array}$$

Tenemos que $144 = 72 \times 2$ pero no cumple que la suma sea 26; continuemos:

$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & \\ \end{array}$ Tenemos que $144 = 36 \times 4$ pero su suma no es 26; continuemos:

$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & \\ \end{array}$ Tenemos que $144 = 18 \times 2^3 = 18 \times 8$ estos sí cumplen la condición de que la suma dé 26.

Por lo tanto, $x^2+26x+144 = (x+18)(x+8)$

6. Factorizar: $x^2-18x+72$

Haciendo el procedimiento del ejercicio anterior se hace necesario hacer la descomposición total del número 72.

$72 \mid 2$	$72 \mid 2$	$72 \mid 2$
$36 \mid$	$36 \mid 2$	$36 \mid 2$
$\mid$	$18 \mid$	$18 \mid 2$
$\mid$	$\mid$	$\mid 9$
36 y 2	18 y 4	9 y 8
No es solución	No es solución	No es solución

$72 \mid 2$	$72 \mid 2$
$36 \mid 2$	$36 \mid 2$
$18 \mid 2$ 24 y 3	$18 \mid 2$ 71 y 1
$9 \mid 3$ No es solución	$9 \mid 3$ No es solución
$3 \mid$	$3 \mid 3$
$1 \mid$	$1 \mid$

Hacemos otras combinaciones, por ejemplo agrupamos el primer y último factor primo:

(2×3) y los restantes $(2\times2\times3)$ en otro factor.

$72 = (2\times3)(2\times2\times3) = 6\times12$ y $6+12 = 18$

$72 = 2\times2\times2\times3\times3$ 6 y 12.

Esta es la solución: $x^2-18x+72=(x-12)(x-6)$.

7. **Factorizar**: a^6+7a^3-44

   $a^6+7a^3-44 = (a^3)^2+7a^3-44$
   observe que a^3 hace las veces de x
   $a^6+7a^3-44 = (a^3+11)(a^3-4)$

8. Factorizar: $(5a)^2-7(5a)+12=(5a-\ \ )(5a-\ \ )$

   Observe que $5a$ hace las veces x, por lo tanto, el ejercicio se reduce a encontrar dos números m y n que multiplicados den 12 y sumados de -7 veces $(5a)$.

   $(5a)^2-7(5a)+12=(5a-4)(5a-3)$

Trinomio de la forma: ax^2+bx+c

Los polinomios de la forma $(ax)^2+b(ax)+ac$ lo factorizamos,

$(ax+m)(ax+n)$ donde $b=m+n$ y $ac=m\cdot n$

El problema se reduce a expresar ax^2+bx+c de la forma, $(ax)^2+b(ax)+ac$; para ello es suficiente multiplicar ax^2+bx+c por a y dividirlo por a.

Ejemplo

Factorizar: $6x^2-11x-10$

Multiplicamos el polinomio por 6 y lo dividimos entre 6, así:

$$\frac{6\,(6x^2-11x-10)}{6} = \frac{(6x)^2-11(6x)-60}{6}$$

$$\frac{(6x-15)\,(6x+4)}{6} = \frac{\cancel{3}\,(2x-5).\,\cancel{2}\,(3x+2)}{\cancel{3}\,.\,\cancel{2}}$$

$$6x^2-11x-10 = (2x-5)\,(3x+2)$$

Ejercicio 2.12

Factorice:

1. $x^2+7x+10$
2. $x^2+8x+12$
3. a^2+4a+3
4. $y^2+9y+20$
5. x^2-9x+8
6. x^2+3x+2
7. $30m^2+17am-21a^2$
8. $16a-4-15a^2$
9. $11xy-6y^2-4x^2$
10. $18a^2+17ay-15y^2$
11. $4x^2+7mnx-15m^2n^2$
12. $14x^4-45x^2-14$
13. $a^2-2a-35$
14. $a^2+33-14a$
15. $c^2-13c-14$
16. $x^2-15x+54$
17. $x^2-17x-60$
18. $m^2-20m-300$
19. $m^2-2m-168$
20. $m^2-41m+400$

21. $x^2 + 12x - 364$
22. $x^4 - 40x^2 + 144$
23. $x^4 - 32x^2 + 256$
24. $x^4 - 3x^2 - 340$
25. $x^2 + 12xy + 32y^2$
26. $x^2 - 6xy + 9y^2$
27. $x^2 + 5xy - 50y^2$
28. $2x^2 + 3x - 2$
29. $6x^2 + 7x + 2$
30. $12x^2 - x - 6$
31. $y^2 - 4y + 3$
32. $x^2 + 10x + 21$
33. $m^2 - 12m + 11$
34. $n^2 + 6n - 135$
35. $y^2 + y - 306$
36. $n^2 - 6n - 40$
37. $8a^2 - 14a - 15$
38. $m - 6 + 15m^2$
39. $27ab - 9b^2 - 20a^2$
40. $(7a + 5b)^2 - 11(7a + 5b) + 30$
41. $(2x + 5)^2 + 6(2x + 5) - 16$
42. $(2x - 3y)^2 - 9(2x - 3y) - 36$
43. $36n^2 - 42n + 10$ sugerencia: haga $36n^2 = (6n)^2$ y $42n = 7(6n)$
44. $81x^2 - 27x - 180$
45. $9x^2 - 8xy - y^2$

Polinomios de cuatro o más términos

Cubo perfecto de binomios

Recordemos que: $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

y $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Dados: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ o $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ debemos llegar a:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3 \text{ o } a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = (a-b)^3$$

Donde a, es la raíz cúbica de a^3 y b es la raíz cúbica de b^3.

Ejemplo

1. Factorizar: $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

Debemos verificar que dos de los términos del polinomio son cubos (que tienen raíces cúbicas exactas).

$$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=x^3+6x^2y+(2y)^3 \text{ ; } a=x \text{ y } b=2y$$

Debemos verificar que $3a^2b$ y $3ab^2$ sean los términos restantes

$3a^2b= 3(x)^2(2y)= 6x^2y$ y $3ab^2= 3(x)(2y)^2= 3x(4y^2)= 12xy^2$

Como coinciden se tenemos que; $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = (x + 2y)^3$

2. Factorizar $x^3-15x^2y+75xy^2-125y^3$

$x^3 - 15x^2y + 75xy^2 - 125y^3 = x^3 - 15x^2y + 75xy^2 - (5y)^3$; $a = x$ y $b = 5y$

Como $-3a^2b = -3(x^2)(5y) = -15x^2y$ y $3ab^2 = 3x(5y)^2 = 75xy^2$

tenemos que: $x^3 - 15x^2y + 75xy^2 - 125y^3 = (x - 5y)^3$

Combinación de métodos

Consiste en agrupar los términos en binomios o trinomios de manera tal, que se puedan aplicar los casos estudiados.

Ejemplo

1. Factorizar: $ax - bx + ay - by$

Agrupando $(ax - bx) + (ay - by)$ sacando factor común de cada término tenemos $(ax - bx) + (ay - by) = x(a - b) + y(a - b)$

$$ax - bx + ay - by = (a - b)(x + y)$$

2. Factorizar: $a^2 + 2ab + b^2 - 1$

Agrupando $a^2 + 2ab + b^2 - 1$

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 - 1 &= (a^2 + 2ab + b^2) - 1 \\ &= (a + b)^2 - 1 \\ &= ([a + b] + 1)([a + b] - 1) \\ &= (a + b + 1)(a + b - 1) \end{aligned}$$

3. Factorizar: $a^2 + ax + bx - b^2$

Agrupando $a^2 + ax + bx - b^2 = (a^2 - b^2) + (ax + bx)$
$= (a + b)(a - b) + x(a + b)$
$= (a + b)(a - b + x)$

Ejercicio 2.13

Factorice:

1. $27 - 27x + 9x^2 - x^3$
2. $1 + 3a^2 - 3a - a^3$
3. $125x^3 + 1 + 75x^2 + 15x$
4. $27m^3 + 108m^2n + 144mn^2 + 64n^3$
5. $1 + 12a^2b^2 - 6ab - 8a^3b^3$
6. $8 + 36x + 54x^2 + 27x^3$
7. $a^6 + 3a^4b^3 + 3a^2b^6$
8. $64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$
9. $125x^{12} + 600x^8y^5 + 960x^4y^{10} + 512y^{15}$
10. $m^3 - 3am^2n + 3a^2mn^2 - a^3n^3$
11. $3m - 2n - 2nx^2 + 3mx^2$
12. $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$
13. $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$
14. $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$
15. $2x^2y + 2xz^2 + y^2z^2 + xy^3$
16. $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$
17. $4am^3 - 12amn - m^2 + 3n$
18. $3 - x^2 + 2abx^2 - 6ab$

19. $3a^2 - 7b^2x + 3ax - 7ab^2$

20. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$

21. $3a^3 - 3a^2b + 9ab^2 - a^2 + ab - 3b^2$

22. $3x^3 + 2axy + 2ay^2 - 3xy^2 - 2ax^2 - 3x^2y$

23. $x - x^2 + x^3 - x^4$

24. $a^2 - b^2 + 2b - 1$

25. $27x^7 - 10x^5 + 15x^3 - 5x^2$

26. $x^{15} - x^{12} + 2x^9 - 3x^6$

27. $9a^2 - 12ab + 15a^3b^2 - 24ab^3$

28. $2a^2x + 2ax^2 - 3ax$

29. $a^2 + ab + ax + bx$

30. $ax - 2bx - 2ay + 4by$

31. $20ax - 5bx - 2by + 8ay$

32. $3 - x^2 + 2abx^2 - 6ab$

33. $a^3 + a^2 + a + 1$

34. $3a^2 - 7b^2x + 3ax - 7ab^2$

35. $2am - 2an + 2a - m + n - 1$

36. $6mx - 4by - 4bx - 12m + 6my + 8b$

37. $a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y$

38. $2x^3 - nx^2 + 2xz^2 - nz^2 - 3ny^2 + 6xy^2$

39. $4x^2 - y^2 + 2ax^2 + axy$

40. $a^2b^3 - n^4 + a^2b^3x^2 - n^4x^2 - 3a^2b^3x + 3n^4x$

41. $9x^2 - 1 + 16a^2 - 24ax$

42. $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$

43. $m^2 - x^2 - 2xy - y^2$

44. $9 - n^2 - 25 - 10n$

45. $1 - a^2 - 9n^2 - 6an$

46. $2x^2 + 8xy - 7xz + 8y^2 - 14yz + 3z^2$

47. $-a^2 + 25m^2 - 1 - 2a$

48. $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2$

49. $16x^3y^2 - 8x^2y - 24x^4y^2 - 40x^2y^3$

50. $(a + b - 1)(a + 1) - a^2 + 1$

51. $4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2$

52. $3x^2 - 7xy + 2y^2 + 19x - 13y + 20$

53. $6x^2 + xy - 2y^2 - x + 11y - 15$

Mínimo común múltiplo y Máximo divisor común

Entre polinomios

Recordemos el procedimiento utilizado para hallar el Mínimo Común Múltiplo (M.C.M) y el Máximo Divisor Común (M.D.C) entre números enteros positivos.

Ejemplo. Hallar el M.C.M y el M.D.C. entre 12, 18 y 30.

1. Hacemos la descomposición en factores primos :

12	2
6	2
3	3
1	

18	2
9	3
3	3
1	

30	2
15	3
5	5
1	

$12 = 2^2 \cdot 3$ $\quad 18 = 2 \cdot 3^2$ $\quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Para hallar el M.C.M. debemos tomar todos los factores; cuando hayan factores repetidos se toma el de mayor exponente puesto que este es múltiplo de los que tengan menor exponente que él. Así el M.C.M. $(12,18,30) = 2^2.3^2.5 = 180$

Para hallar el Máximo Divisor Común escogeremos los factores comunes a todos los números tomando el de menor exponente porque este es divisor de los que tengan mayor exponente que él.

$$\text{M.D.C. } (12,18,30) = 2{\cdot}3 = 6$$

Estos procedimientos los podemos extender a los polinomios.

Ejemplo

Hallar el MCM y M.D.C. entre $x^2 - 16$; $x^2 - 7x + 12$; $x^2 - 8x + 16$

Factorizándolos tenemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 16 &= (x+4)(x-4) \\ x^2 - 7x + 12 &= (x-4)(x-3) \\ x^2 - 8x + 16 &= (x-4)^2 \end{aligned}$$

Aplicando el mismo procedimiento de los números naturales

MCM = $(x+4)(x-4)^2(x-3)$ M.D.C. = $(x-4)$

Ejercicio 2.14

Halle el M.C.M. y el M.D.C. entre:

1. $2x^2 + 3x - 2; 6x^2 - 7x + 2$
2. $a^2 + ab - 2b^2; 3a^2 + 4ab - 4b^2$
3. $x^2 - x - 2; x^2 + 4x + 3; x^2 + x - 6$
4. $(3n - 2)^2; 135n^3 - 90n^2; 12n - 8$
5. $x^4 - 16; x^2 + 5x + 6; x^2 + x - 6$
6. $x - y; x^2 - y^2; x^3 - y^3; x^4 - y^4$
7. $6x^2; 3xy^2; 12x^3y$

8. $x^4 - 1; x^3 + 1; 2x^2 + 2$

9. $x^3 - 9x + 5x^2 - 45; x^4 + 2x^3 - 15x^2$

10. $x^2 + x - 2; x^2 - 4x + 3; x^2 - x - 6$

11. $2x^2 - 3x - 2; 4x^2 + 4x + 1$

12. $a^2 + ab - 6b^2; 3a^2 - 4ab - 4b^2$

13. $y^2 - 5y - 14; y^2 + 4y + 4; y^2 + 7y + 10$

14. $x^2 - 9; x^2 + 5x + 6; x^2 + x - 6$

15. $x^2 - 25; x^3 - 125$

16. $x + y; x^3 + y^3; x^5 + y^5$

17. $a^4 + a^3b; a^3 - ab^2; a^4 + 2a^3b + a^2b^2$

18. $64x^2y^3; 48xy^2; 240x^3yz$

19. $16y^4 - 1; 8y^3 + 1; 4y + 2$

20. $4a^2 - b^2; 8a^3 + b^3; 4a^2 + 4ab + b^2$

21. $2x^2 + 2x - 4; 2x^2 - 8x + 6; 2x^3 - 2$

22. $x^2 - 2x - 8; x^2 - x - 12; x^3 - 9x^2 + 20x$

23. $a^2 + a; a^3 - 6a^2 - 7a; a^6 + a$

24. $x^2 + ax - 6a^2; x^2 + 2ax - 3a^2; x^2 + 6ax + 9a^2$

25. $2a^2 - am + 4a - 2m; 2am^2 - m^3; 6a^2 + 5am - 4m^2; 16a^2 + 72am - 40m^2$

26. $2x^2 - 4xy + 2ax - 4ay;\ 6xy - 12by - 12y^2 + 6bx; 3xy + 3ab + 3ay + 3bx$

27. $2m^3 + m^2 - 3m; m^2 - n - m + mn; 2m^2 + 2mn + 3m + 3n$

28. $ax - 2bx + ay - 2by; x^2 + xy; x^2 - xy$

29. $(a - 1)^2; (a + 1)^2; (a - 2)(a + 1)$

30. $x^2 - 2xy + y^2; x^2 + 2xy + y^2; x^2 - y^2; x^2 - 3xy + 2y^2; 2x^2 + 3xy + y^2$

Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es la que, tanto el numerador como el denominador, son polinomios con coeficientes racionales y el denominador diferente de cero.

Ejemplo

$$\frac{5a+2b}{3a^2+7b}$$

Si A, B, C y D son fracciones algebraicas, B y D diferentes de cero, tenemos:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \quad \text{si solo si} \quad A\times D = B\times C$$

De la definición de igualdad de fracciones se tiene que:

1. $\frac{A}{B} = \frac{D\cdot A}{D\cdot B}$ (amplificación)

De igual forma si existe una expresión entera C que divide a A y a B tenemos que:

2. $\frac{A}{B} = \frac{C\cdot M}{C\cdot N}$ por lo tanto $\frac{A}{B} = \frac{M}{N}$ (simplificación)

3. $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$ y $\frac{-A}{-B} = \frac{A}{B}$

Ejemplo

1. Simplificar: $\frac{12x^2y\,z^5}{16x^2y^7z^2} = \frac{3z^3}{4y^6}$

2. Simplificar: $\frac{x^2-x-12}{16-x^2} = \frac{(x-4)(x+3)}{(4+x)(4-x)}$

$$= \frac{-(4-x)(x+3)}{(4+x)(4-x)}$$

Simplificando $\frac{x^2-x-12}{16-x^2} = \frac{-(x+3)}{(4+x)} = -\frac{x+3}{x+4}$

Ejercicio 2.15

Simplifique:

1. $\frac{8x^5}{12x^2}$
2. $\frac{21a^3}{14ab\mathrm{b}}$
3. $\frac{-12a^2b^2}{18a^3b^2}$
4. $\frac{-a^4b^5\mathrm{c}^4}{-a^3b^4\mathrm{c}^8}$
5. $\frac{(2a^3b)^3}{(6a^2b^2)^2}$
6. $\frac{(-10x^4)^3}{(-15x^5)^2}$
7. $\frac{12x^2(x-2)^2}{16x(x-2)^3}$
8. $\frac{x+2}{x-2}$
9. $\frac{12(x-2)^3}{18(2-x)}$
10. $\frac{(x+2)(x+4)}{(2x+8)}$
11. $\frac{(x+4)(3x-1)}{3(x-1)(x+4)}$
12. $\frac{6x-12}{6}$
13. $\frac{6x^3-3x^2}{6x^2}$
14. $\frac{ab+ac}{ab-ac}$
15. $\frac{2a^2b-2ab^2}{4a^3-4a^2b}$
16. $\frac{3ab}{2a^2x+2a^3}$
17. $\frac{10a^2b^3c}{80\,(a^3-a^2b)}$
18. $\frac{3x^2-4x-15}{x^2-5x+6}$
19. $\frac{2ax+ay-4bx-2by}{ax-4a-2bx+8b}$
20. $\frac{a^2-a-20}{a^2-7a+10}$
21. $\frac{8n^3-125}{25-20n+4n^2}$
22. $\frac{6-x-x^2}{15+2x-x^2}$

Operaciones

Las fracciones algebraicas con respecto a la adición, multiplicación, sustracción y división cumple las mismas propiedades de los números racionales.

Si A, B, C y D son expresiones algebraicas, B y D diferentes de cero definimos las operaciones entre las fracciones $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ y $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$ así:

Adición

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$$

Como BD es múltiplo de B y de D, algunas veces es conveniente reemplazar BD por el mínimo común múltiplo entre B y D.

Ejemplo

Efectúe y simplifique $\frac{x^2}{x^2 - 36} + \frac{5 - x}{x^2 - 12x + 36}$

$$\frac{x^2}{x^2 - 36} + \frac{5 - x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{x^2}{(x + 6)(x - 6)} + \frac{5 - x}{(x - 6)^2}$$

El M.C.M. entre $(x + 6)(x - 6)$ y $(x - 6)^2$ es $(x + 6)(x - 6)^2$

$$\frac{x^2}{(x + 6)(x - 6)} + \frac{5 - x}{(x - 6)^2} = \frac{x^2(x - 6) + (5 - x)(x + 6)}{(x + 6)(x - 6)^2}$$

$$= \frac{x^3 - 6x^2 + 5x - x^2 + 30 - 6x}{(x + 6)(x - 6)^2}$$

$$= \frac{x^3 - 7x^2 - x + 30}{(x + 6)(x - 6)^2}$$

Multiplicación

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Ejemplo:

Efectúe y simplifique $\frac{m^2 - 49}{m^2 - 64} \cdot \frac{m^3 - 512}{m^2 - 10m + 21}$

Solución:

$$\frac{m^2 - 49}{m^2 - 64} \cdot \frac{m^3 - 512}{m^2 - 10m + 21} = \frac{(m^2 - 49)(m^3 - 512)}{(m^2 - 64)(m^2 - 10m + 21)}$$ factorizando:

$$= \frac{(m + 7)(m - 7)(m - 8)(m^2 + 8m + 64)}{(m + 8)(m - 8)(m - 7)(m - 3)}$$

simplificando:

$$= \frac{(m + 7)(m^2 + 8m + 64)}{(m + 8)(m - 3)}$$

$$= \frac{m^3 + 15m^2 + 120m + 468}{m^2 + 5m - 24}$$

Sustracción

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD - BC}{BD}$$

Ejemplo:

Efectuar $\frac{x^2-5}{x^2-9} - \frac{x-3}{x+3}$

$$\frac{x^2-5}{x^2-9} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{x^2-5}{(x+3)(x-3)} - \frac{x-3}{x+3}$$

$$= \frac{1(x^2-5)-(x-3)(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2-5-(x^2-6x+9)}{(x+3)(x-3)}$$

$$\frac{6x-14}{(x+3)(x-3)} = \frac{6x-14}{x^2-9}$$

División

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Ejemplo:

Efectuar $\frac{y-8}{y-15} \div \frac{y^2-64}{y-7}$

$$\frac{y-8}{y-15} \div \frac{y^2-64}{y-7} = \frac{(y-8)(y-7)}{(y-15)(y^2-64)}$$

$$= \frac{(y-8)(y-7)}{(y-15)(y+8)(y-8)} \quad \text{simplificando,}$$

$$= \frac{y-7}{(y-15)(y+8)} = \frac{y-7}{y^2-7y-120}$$

Fracciones compuestas

Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división pueden combinarse, una forma es cuando aplicamos la propiedad distributiva, otra forma cuando en la fracción algebraica el numerador y/o el denominador contienen operaciones, para simplificarla; simplificamos el numerador y el denominador independientemente y finalmente, simplificamos el cociente.

Ejemplo

Simplificar: $\dfrac{1-\frac{b^2}{a^2}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$

$$\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}} = \frac{\frac{a^2-b^2}{a^2}}{\frac{a^2-b^2}{ab}}$$ Efectuando la división tenemos:

$$= \frac{(a^2-b^2)ab}{(a^2-b^2)a^2}$$ Simplificando tenemos:

$$= \frac{b}{a}$$

Ejercicio 2.16

Efectúe y simplifique:

1. $\dfrac{x}{x+2} + \dfrac{3}{x+2}$
2. $\dfrac{3x}{5x-4} - \dfrac{4}{5x-4}$
3. $\dfrac{4x}{4x-3} - \dfrac{3}{4x-3}$
4. $\dfrac{2x+1}{3x-7} - \dfrac{x+8}{3x-7}$
5. $\dfrac{5x^2-4}{8x^3} + \dfrac{x^2+4}{8x^3}$
6. $\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{2}{x-1}$
7. $\dfrac{3x+1}{4x-2} - \dfrac{x+1}{4x-2}$

8. $\dfrac{2x^2+x}{x^2-9} - \dfrac{x^2-2x}{x^2-9}$

9. $\dfrac{2x^2}{2x^2+5x-3} - \dfrac{x}{2x^2+5x-3}$

10. $\dfrac{16x^2+3}{16x^2+16x+3} - \dfrac{3-4x}{16x^2+16x+3}$

11. $\dfrac{x^2-3}{x^2-8x+12} + \dfrac{2x-1}{x^2-8x+12} - \dfrac{x+2}{x^2-8x+12}$

12. $\dfrac{22x+15}{12x^2+52x-9} - \dfrac{20-30x}{12x^2+52x-9} - \dfrac{4-2x}{12x^2+52x-9}$

13. $\dfrac{3}{x} - \dfrac{7}{2x} + \dfrac{6}{5x}$

14. $\dfrac{7}{x} + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{10}{x^2}$

15. $\dfrac{x-2}{4x} + \dfrac{x+5}{10x}$

16. $\dfrac{x+6}{9x^2} - \dfrac{3x+10}{15x^2}$

17. $x + 4 + \dfrac{5}{x-2}$

18. $2x + 1 - \dfrac{4}{2x+1}$

19. $\dfrac{x}{2x+3} + \dfrac{1}{x-2}$

20. $\dfrac{3x}{3x-1} - \dfrac{2x}{2x+1}$

21. $\dfrac{3x}{x^2+x-2} + \dfrac{x}{x+2}$

22. $\dfrac{3x}{x^2-2x-8} + \dfrac{4}{x^2-4}$

23. $\dfrac{x+1}{x^2+x-12} - \dfrac{2}{x^2+5x-24}$

24. $\dfrac{7x+14}{3x^2+10x-8} - \dfrac{x+6}{3x^2+x-2}$

25. $\dfrac{2x-7}{x^2-7x+12} + \dfrac{x-11}{x^2+2x-15} - \dfrac{1}{x-4}$

26. $\dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{x^2-7x+12}$

27. $\dfrac{3x-2}{2x^2-5x-3} - \dfrac{x-2}{6x^2+x-1} - \dfrac{2x+2}{3x^2-10x+3}$

28. $\dfrac{1}{2x^2+11x+15} + \dfrac{6x+7}{3x^2+7x-6} - \dfrac{19}{6x^2+11x-10}$

29. $\dfrac{x-7}{x^2+x-6} - \dfrac{3x-5}{2x^2+5x-3} + \dfrac{4x-5}{2x^2-5x+2}$

30. $\dfrac{28}{x^3} \cdot \dfrac{x^2}{42} \cdot \dfrac{3x}{5}$

31. $\dfrac{4a^2b^3}{21x^2y^4} \cdot \dfrac{7x^2y^8}{a^3b^6}$

32. $\left(\dfrac{2x}{-y}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{y}{3x}\right)^2$

33. $\dfrac{(3x^3y)^2}{(2x^2y)^3} \cdot \dfrac{(-2^2xy^2)^3}{(x^2y^3)^2}$

34. $\dfrac{6x^3-30x}{6x^2+2x} \cdot \dfrac{3x^2+x}{4x^2-20}$

35. $\dfrac{xy^5}{x^2+6x+8} \cdot \dfrac{x^2+3x-4}{xy^2}$

36. $\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-9x+14} \cdot \dfrac{x^2-10x+16}{x^2+2x-15}$

37. $\dfrac{x^2-10x-24}{x^2+x-12} \cdot \dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x-16}$

38. $\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{a+x} + \dfrac{1}{a-x}\right) \div \left(\dfrac{a+x}{a-x} - \dfrac{a-x}{a+x}\right)$

39. $\dfrac{4x^2+8x+3}{6x^2-x-2} \cdot \dfrac{6x^2-7x+2}{6x^2+7x-3}$

40. $\dfrac{2x^2-7xy+6y^2}{2x^2-11xy+12y^2} \cdot \dfrac{x^2-xy-12y^2}{2x^2-9xy+10y^2}$

41. $\dfrac{12x^2-11x+2}{8x^2-14x+3}\cdot\dfrac{4x^2-16x+15}{20+7x-6x^2}$

42. $\dfrac{(x-y)^2-16}{3(x-y)^2-11(x-y)-4}\cdot\dfrac{6\,(x-y)^2-7\,(x-y)-3}{2(x-y)^2+5(x-y)-12}$

43. $\left(6+\dfrac{2}{x}\right)\left(\dfrac{x}{9x^2-1}\right)$

44. $\left(x-\dfrac{9}{x}\right)\left(1-\dfrac{3}{x+3}\right)$

45. $\left(x-\dfrac{3}{4x-1}\right)\left(x-\dfrac{1}{4x+3}\right)$

46. $\left(x-1-\dfrac{3}{x+1}\right)\left(2x+5+\dfrac{9}{x-2}\right)$

47. $\left(4-\dfrac{9}{x^2}\right)\div\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

48. $\left(3-\dfrac{4}{3x+2}\right)\div\left(4-\dfrac{7}{3x+2}\right)$

49. $\left(x-\dfrac{4}{3x+4}\right)\div\left(x+\dfrac{2}{3x-5}\right)$

50. $\left(x-3+\dfrac{6}{2x+1}\right)\div\left(x+1-\dfrac{6}{2x+1}\right)$

51. $\dfrac{\frac{7}{8}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{36}+\frac{1}{18}}$

52. $\dfrac{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{9}}{\frac{2}{x}-\frac{1}{3}}$

53. $\dfrac{\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x}-3}{\frac{16}{x^2}-\frac{2}{x}-3}$

54. $\dfrac{x+2}{x+1-\frac{5}{x-3}}$

55. $\dfrac{x-\dfrac{2}{2x-3}}{2x-1-\dfrac{8}{2x-3}}$

56. $\dfrac{x-6+\dfrac{22}{2x+3}}{x-5+\dfrac{11}{2x+3}}$

57. $\dfrac{x-4-\dfrac{1}{x-4}}{x-2-\dfrac{9}{x-2}}$

58. $\dfrac{\dfrac{2x-1}{2x+1}-\dfrac{2x+1}{2x-1}}{\dfrac{2x-1}{2x+1}+\dfrac{2x+1}{2x-1}}$

59. $[\,2x+1-\dfrac{2x+4}{3x-1}\,]\div[(\,3x+4+\dfrac{1}{2x+1}\,).(\,3x+5+\dfrac{4}{x-1}\,)]$

60. $\dfrac{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x}{x+y}}{\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{x}{x+y}}$

61. $\dfrac{\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}}{\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}}$

62. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}}$

63. $\dfrac{x-\dfrac{x^2+y^2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} \div \dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$

Racionalización

Algunas veces es necesario transformar expresiones irracionales en racionales.

Este proceso de transformación se denomina racionalización y se fundamenta en las siguientes propiedades:

1. $\sqrt[n]{x^r}.\sqrt[n]{x^s}=\sqrt[n]{x^{r+s}}$ y $\sqrt[n]{x^n}=x$
2. $(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1})=x^n-a^n$

Ejemplo

1. $\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}+a)=x-a^2$

2. Racionalizar $\sqrt{x+h}-\sqrt{h}$

   $a=\sqrt{x+h}$ y $b=\sqrt{h}$; aplicamos el producto notable,

   $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, es decir multiplicamos la expresión dada por:

   $\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}}$, que equivale a multiplicar la expresión por 1.

   $$\sqrt{x+h}-\sqrt{h}=(\sqrt{x+h}-\sqrt{h}).\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}}$$

   $$= \frac{x+h-h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}}$$

   $$= \frac{x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}}$$

3. $$\underbrace{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2})}_{(a-b)}\underbrace{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}_{(a^2+a.b+b^2)}=a^3-b^3$$

   $$= \sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{2^3}=x-2$$

4. Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

   En este caso necesitamos obtener en el denominador una quinta potencia de una raíz quinta, para ello multiplicamos la expresión dada por $\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}}=1$, es decir $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\ \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}}=\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}}=\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$

5. Efectuar y simplificar $\frac{x}{1+\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

Racionalizando el denominador de cada uno de los sumandos tenemos:

$$\frac{x}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} =$$

$$\frac{x - x\sqrt{x}}{1-x} + \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1}$$

$$\frac{x - x\sqrt{x}}{1-x} + \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1} =$$

$$\frac{(x - x\sqrt{x})(x+1) + 2\sqrt{x+1}(1-x)}{1-x^2}$$

Ejercicio 2.17

1. Simplifique y reduzca los términos semejantes:

   a. $7\sqrt{5x^3} + x\sqrt{20x} + x\sqrt{2x} - 2x\sqrt{72x}$

   b. $x\sqrt[3]{2x} - 3\sqrt{x} + \sqrt[3]{16x^4} - 5\sqrt{256x}$

2. Efectúe y simplifique:

   a. $2\sqrt{x} \,.\, 7\sqrt{x}$

   b. $5\sqrt{x}.\, 8\sqrt{x}$

   c. $5\sqrt{2x}.\, 9\sqrt{2x}$

   d. $5\sqrt{3x} \,.\, 2\sqrt{2x}$

   e. $5\sqrt[3]{x^2}.\, \sqrt[3]{2x}$ f. $\sqrt{2x}\,(\sqrt{x+1})$

   g. $\sqrt{2x+1} \,.\, \sqrt{2x-1}$

   h. $\sqrt{2x+5} \,.\, \sqrt{2x-5}$

i. $\sqrt{x-4}\,.\,\sqrt{x-9}$

j. $\sqrt[3]{5x}\,.\,\sqrt[3]{25x^2}$

k. $\sqrt[3]{4x}\,.\,\sqrt[3]{-6x^2}$

l. $\sqrt[3]{-15x^2}\,.\,\sqrt[3]{-18x^2}$

m. $\sqrt{3x}\,.\,\sqrt[4]{9x}$

n. $\sqrt{3x^2}.\,\sqrt[3]{9x^2}$

o. $\sqrt{2x}\,.\,\sqrt[4]{4x^3}$

3. Efectúe y simplifique:

a. $(3+\sqrt{x}\,).\,(3-\sqrt{x}\,)$

b. $(2+\sqrt{x}\,)\,.\,(2-\sqrt{x}\,)$

c. $(\sqrt{x}+1)\,.\,(\sqrt{x}-1)$

d. $(\sqrt[3]{x}-9)\,.\,(\sqrt[3]{x}+9)$

e. $\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2\sqrt{7}\,).\,(3\sqrt{x}+\sqrt{7}\,)$

f. $(3\sqrt{x}-4\sqrt{3})(4\sqrt{x}-3\sqrt{3})$

g. $(\sqrt{1+x})^2$

h. $(1+\sqrt{x})^2$

i. $(2\sqrt{6}-\sqrt{x})^2$

j. $(\sqrt{3+\sqrt{x}}+1)\,(\sqrt{3+\sqrt{x}}-1)$

k. $(\sqrt[3]{x}+5)(\sqrt[3]{x^2}-5.\sqrt[3]{x}+25)$

l. $(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})^2$

m. $(\sqrt{x+3}+7\sqrt{x-5})^2$

n. $(3\sqrt{2x+1}-3\sqrt{x-3})^2$

o. $(\sqrt{x}+7)\div\sqrt{x}$

p. $\dfrac{8-2x^2+2\sqrt{4-x^2}}{1-\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}}$

q. $\dfrac{\sqrt{a}}{\dfrac{\sqrt{(a-b)^3}}{(x+1)^2}-\dfrac{a-b}{x+1}} - \dfrac{\sqrt{a^2-ab}}{\dfrac{\sqrt{(a-b)^3\,(x-1)}}{x^2-1}-a+b}$

r. $\dfrac{(x^2-y^2)\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y^2}}$

s. $\dfrac{(x-1)^2}{2\sqrt{x+1}}+2(x-1)\sqrt{x+1}$

4. Encuentre el factor de racionalización de:

a. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}$

b. $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$

c. $\sqrt{x}-2$

d. $\sqrt{x-2}$

e. $\sqrt[3]{x}+2$

f. $\sqrt[3]{x+2}$

g. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}$

h. $\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}$

i. $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}$

j. $\sqrt[4]{x - 2}$

k. $\sqrt[3]{2 + \sqrt{x}}$

l. $\sqrt[7]{x^3}$

5. Racionalice el denominador y simplifique:

a. $\frac{3}{\sqrt{x+3}}$

b. $\frac{2}{\sqrt[4]{4x}}$

c. $\sqrt{\frac{8}{3x}}$

d. $\sqrt[7]{\frac{5}{3x^4}}$

e. $\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}$

f. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}}$

g. $\frac{9-x}{\sqrt{x}-3}$

h. $\frac{x^3-729}{\sqrt{x}-3}$

i. $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

j. $\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$

k. $\frac{x-9}{\sqrt[3]{3+\sqrt{x}}}$

l. $\frac{\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1-a^2}}$

m. $\frac{4x^2-1}{\sqrt[3]{2x}-1}$

6. Racionalice el numerador:

a. $\frac{2\sqrt{x}-3}{4x-9}$

b. $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

c. $\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{x}$

d. $\frac{(2-\sqrt{x-3})}{x^2-49}$

e. $\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

f. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

g. $\frac{\sqrt[3]{(x+a)^2}-\sqrt[3]{a^2}}{x}$

h. $\frac{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt[3]{3}}{x-1}$

Recapitulación

Factorice o simplifique:

1. $m^2 - 30m - 675$
2. $(4x)^2 - 2(4x) - 528$
3. $(5c)^2 - 9(5c) + 18$
4. $x^2 + x - 30$
5. $x^2 - xy - 30y^2$
6. $6x^2 + 30x + 24$
7. $7x^2 + 7x - 42$
8. $bx^2 + 14bx + 45b$
9. $x^2y^2 - 2xy^2 - 15y^2$
10. $x^2y^2 + 18xy + 32$
11. $x^2y^2 + 4xy - 45$
12. $x^4 + 7x^2 + 12$
13. $x^4 + 7x^2 - 8$
14. $x^4 - 7x^2 + 6$
15. $x^4 - 10x^2 + 9$
16. $(7m)^2 - 16(7m) + 60$
17. $(5w)^2 + 12(5w) + 32$
18. $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$
19. $x^2 - y^2$
20. $a^2 - 40$
21. $1 - 4m^2$
22. $a^2 - 25$
23. $4a^2 - 9$
24. $1 - 49a^2b^2$
25. $a^2b^8 - c^2$
26. $a^{10} - 49b^{12}$
26. $100m^2n^4 - 169y^6$
28. $196x^2y^4 - 225z^{12}$
29. $1 - 9a^2b^4c^6d^8$
30. $\frac{1}{4} - 9a^2$
31. $\frac{1}{16} - \frac{4x^2}{49}$
32. $\frac{x^4}{100} - \frac{y^2z^4}{81}$
33. $4x^{2n} - \frac{1}{9}$
34. $16x^{6m} - \frac{y^{2n}}{49}$
35. $a^{2n}b^{4n} - \frac{1}{25}$
36. $a^2 + 2ab + b^2 - x^2$
37. $m^2 + 2mn + n^2 - 1$
38. $n^2 + 6n + 9 - c^2$
39. $a^2 + 4 - 4a - 9b^2$
40. $a^2 - 6ay + 9y^2 - 4x^2$

41. $9x^2 - 1 + 16a^2 - 24ax$
42. $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$
43. $m^2 - x^2 - 2xy - y^2$
44. $9a^2 - n^2 - 25 - 10n$
45. $1 - a^2 - 9n^2 - 6an$
46. $9x^2 - 9a^2 - 4m^2 + 12am$
47. $-a^2 + 25m^2 - 1 - 2a$
48. $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2$
49. $a^2 + 4b^2 + 4ab - x^2 - 2xy - y^2$
50. $m^2 - x^2 + 9n^2 + 6mn - 4ax - 4a^2$
51. $x^4 - 16y^2$
52. $8x^3 - y^3 - 4x^2 + y^2$
53. $x^2 - y^2 + 4 + 4x - 1 - 2y$
54. $4a^2 - 9x^2 + 49b^2 - 30xy - 25y^2 - 28ab$
55. $4b^2 + 4ab - x^2 - 2ax$
56. $m^2 - a^2 - 2a - 1$
57. $2am - x^2 - 9 + a^2 + m^2 - 6x$
58. $16a^2 - 1 - 10m + 9x^2 - 24ax - 25m^2$
59. $64w^2 - 49x^2 + 9b^2 + 70xy - 25y^2 - 48wb$
60. $x^2 - y^2 + 4 + 4x - z^2 - 2yz$
61. $a^2 - 2ab + b^2 - 49x^2$
62. $m^2 - 2mn + n^2 - 1$
63. $-n^2 + 6n - 9 + c^2$
64. $-x^2 - 10xy^2 - 25y^4$
65. $4a^2x - 4b^2x - a^3 + b^3$
66. $n^4 + n^2m^2 + m^4$
67. $4a^2 + 9b^2 - 12ab$
68. $25a^2 + 54a^2b^2 + 49b^2$
69. $x^4 + 64y^4$
70. $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
71. $(x - y)^3 - (x + y)^3$
72. $a^3 - 3a^2b + 5ab^2$
73. $x^3 - 4x + x^2 - 4$
74. $x^5 + x^3 - 2x$
75. $36x^4 - 109x^2y^2 + 49y^4$
76. $4x^8 + y^8$
77. $1 + 12a^2b - 6ab - 8a^3b^3$
78. $(m - 2)^3 + (m - 3)^3$
79. $x^8 - 6x^4y^4 + y^8$
80. $a^3 - a^2 - a + 1$
81. $a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a$
82. $81m^8 + 2m^4 + 1$
83. $a^4 + 324b^4$
84. $125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3$
85. $(2x - y)^3 + (3x + y)^3$

86. $x^4 + 4x^2 - 21$

87. $x^3 - x + x^2y - y$

88. $x^5 - x$

89. $c^4 - 45c^2 + 100$

90. $4m^4 + 81n^4$

91. $8 + 36x + 54x^2 + 27x^3$

92. $8(a + b)^3 + (a - b)^3$

93. $a(x + 1) - b(x + 1) + c(x + 1)$

94. $(a + b)(a^2 - b^2) - (a^2 - b^2)$

95. $x^8 + x^4 - 2$

96. $4a^8 - 53a^4b^4 + 49b^8$

97. $4 + 625x^8$

98. $a^6 + 3a^4b^3 + 3a^2b^6 + b^9$

99. $64(m + n)^3 - 125$

100. $n^2 + n - 42$

101. $x^4 - x^3 + x^2 - x$

102. $a^4 + a^3 - 9a^2 - 9a$

103. $49 + 76n^2 + 64n^4$

104. $64 + a^{12}$

105. $3a^{12} + 1 + 3a^6 + a^{18}$

106. $9a^2 - x^2 - 4 + 4x$

107. $25x^4 - 139x^2y^2 + 81y^4$

108. $1 + 4n^4$

109. $m^3 - 3am^2n + 3a^2mn^2 - a^3n^3$

110. $1 - 9x^2 + 24xy - 16y^2$

111. $x - 3x^2 - 18x^3$

112. $49x^8 + 76x^4y^4 + 100y^8$

113. $64x^8 + y^8$

114. $1 + 18a^2b^3 + 108a^4b^6 + 216a^6b^9$

115. $(a^2 + 1)^2 + 5(a^2 + 1) - 24$

116. $bx^2 - b - x^2 + 1$

117. $4 - 108x^2 + 121x^4$

118. $81a^4 + 64b^4$

119. $64x^9 - 125y^{12} - 240x^6y^4 + 300x^3y^8$

120. $(x + y)^2 + x + y$

121. $x^{2n+2} - x^2y^{2n}$

122. $121x^4 - 133x^2y^4 + 36y^8$

123. $4 - (a^2 + b^2) + 2ab$

124. $3a^5 + 3a^3 + 3a$

125. $x^3 - y^3 + x - y$

126. $a^2 - b^2 + a^3 - b^3$

127. $\frac{2x^2 - 9x - 5}{10+3x - x^2}$

128. $\frac{a^2 + a - 2}{n - an - m + am}$

129. $\frac{3mx - nx - 3my + ny}{ny^2 - nx^2 - 3my^2 + 3mx^2}$

130. $\frac{a^2 - b^2}{b^3 - a^3}$

131. $\frac{3ax - 3bx - 6a + 6b}{2b - 2a - bx + ax}$

132. $\frac{2x^3 - 2x^2y - 2xy^2}{3y^3 + 3xy^2 - 3x^2y}$

133. $\frac{2x^3 - 2xy^2 + x^2 - y^2}{2xy^2 + y^2 - 2x^3 - x^2}$

134. $\frac{n +1 - n^3 - n^2}{n^3 - n - 2n^2 + 2}$

135. $\frac{x^2 - 4}{2x + 4}$

136. $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3}$

137. $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8}$

138. $\frac{3x^2 - 2x^2 - 1}{3x^2 + 4x + 1}$

139. $\frac{18x^2 - 45x - 8}{18x^2 - 33x - 40}$

140. $\frac{6 - 5x - x^2}{x^2 + 7x - 8}$

141. $\frac{3x^4 + 14x^2 - 24}{x^4 + 4x^2 - 12}$

142. $\frac{x + 2}{x - 2}$

143. $\dfrac{12\,(x-2)^3}{18(2-x)}$

144. $\dfrac{22}{34} \cdot \dfrac{51}{55} \div \dfrac{45}{81}$

145. $\dfrac{8a^3}{9b^4} \div \dfrac{4a}{3b^5}$

146. $\dfrac{4a^2b^4}{9x^4y^2} \div \dfrac{8a^4b^9}{27x^3y^6}$

147. $\left(\dfrac{32}{25a^3} \div \dfrac{16a^2}{50a^4b}\right) \cdot \dfrac{a}{b^3}$

148. $\dfrac{a^3b^4}{x^4\,y} \div \left(\dfrac{a^2b^3}{xy^2} \cdot \dfrac{a^4b}{x^2y^3}\right)$

149. $\dfrac{64x^6}{16x^2-16y^2} \div \dfrac{4x^5}{3xy+3y^2}$

150. $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-3x-4} \div \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-6x+8}$

151. $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9} \div \dfrac{x^2+10x+24}{x^2+3x-18}$

152. $\dfrac{3x^2-8x+4}{4x^2-5x-6} \div \dfrac{3x^2+x-2}{4x^2+7x+3}$

153. $\dfrac{6x^2+13x+6}{6x^2+5x-6} \div \dfrac{6x^2-23x-18}{4x^2-20x+9}$

154. $\dfrac{10+9x-x^2}{x^2-7x-8} \div \dfrac{x^2-8x-20}{x^2-10x+16}$

155. $\dfrac{x^2-xy-12y^2}{x^2-3xy-18y^2} \div \dfrac{4y^2+7xy-2x^2}{x^2-7xy+6y^2}$

156. $\left(\dfrac{2x^2-15x+18}{6x^2+35x+36} \cdot \dfrac{6x^2+31x+18}{3x^2-20x+12}\right) \div \dfrac{2x^2-13x+15}{9x^2+15x+4}$

157. $\left(\dfrac{9x^2-4}{4x^2+23x+28} \div \dfrac{12x^2-17x+6}{8x^2+2x-21}\right).\left(\dfrac{4x^2+13x-12}{12x^2-19x-18}\right)$

157. $\left(\dfrac{9x^2-4}{4x^2+23x+28} \div \dfrac{12x^2-17x+6}{8x^2+2x-21}\right).\left(\dfrac{4x^2+13x-12}{12x^2-19x-18}\right)$

158. $\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{12x^2-4x}{4x^2-11x-3}\right) \div \left(\dfrac{3x^2+8x-3}{x^2-9}\right)$

159. $\dfrac{a+1}{a^2+a+1} - \dfrac{2a^3-1}{a^4+a^2+1} + \dfrac{a-1}{a^2-a+1}$

160. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

161. $\dfrac{x+y}{(y-z)(z-x)} + \dfrac{y+z}{(z-x)(x-y)} + \dfrac{z+x}{(x-y)(y-z)}$

162. $\dfrac{x^3-1}{x^3-2x^2-3x} \cdot \dfrac{x+1}{x^2+x-2} \div \dfrac{x^2+x+1}{x^3-x^2-6x}$

163. $\dfrac{b-c}{a^2-(b-c)^2} + \dfrac{c-a}{b^2-(c-a)^2} + \dfrac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$

164. $\dfrac{x^2+xy-xz}{(x+y)^2-z^2} \div \left(\dfrac{x}{(x+z)^2-y^2} \cdot \dfrac{xy-y^2-yz}{(x-y)^2-z^2}\right)$

165. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$

166. $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

167. $\dfrac{2x}{x^2-9} + \dfrac{x}{x^2+6x+9} - \dfrac{3}{x+3}$

168. $\dfrac{x+5}{5-x} - \dfrac{x-5}{x+5} + \dfrac{2x^2+30}{x^2-25}$

169. $\dfrac{x^3+x^2-12x}{x^2-3x} \cdot \dfrac{3x^2-10x+3}{3x^2+11x-4}$

170. $\dfrac{n^3-8}{n+2} \cdot \dfrac{2n^2+8}{n^3-4n} \cdot \dfrac{n^3+2n^2}{n^3+2n^2+4n}$

171. $\dfrac{\dfrac{x+2}{2x^2-3x-2}}{1-\dfrac{4}{2x+1}}$

Resumen del capítulo 2

Operación aritmética

$$ab+ac = a(b+c) \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} + \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{2ad}{bc} \qquad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc} \qquad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b}$$

$$a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c} \qquad \frac{a-b}{c-d} = \frac{b-a}{d-c} \qquad \frac{ab+ac}{a} = b+c$$

Factores especiales

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a) \qquad x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2) \qquad x^4-a^4=(x^2-a^2)(x^2+a^2)$$

Operación aritmética

Álgebra: fórmulas de productos notables.

$$(x+y)(x-y) = x^2-y^2$$

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

3 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones

Objetivos

- Identificar y resolver ecuaciones e inecuaciones de primero y segundo grado en una variable.
- Identificar y resolver desigualdades de valor absoluto con sus respectivas propiedades.
- Aplicar las ecuaciones e inecuaciones en la resolución de problemas.
- Identificar un sistema de ecuaciones lineales con dos variables y algunos métodos para determinar el conjunto solución.
- Identificar un sistema de ecuaciones lineales con tres variables y algunos métodos para determinar el conjunto solución.
- Analizar e identificar las posibilidades que pueden presentarse al resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas.
- Aplicar los sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables, para el planteamiento y resolución de problemas.

Ecuaciones, inecuaciones

Una expresión algebraica de la forma:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, es un polinomio de grado n, se denota $Pn(x)$ y se define como:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ , a_n \neq 0$$

donde los coeficietes: $a_n, a_{n-1}, \ldots a_2, a_1, a_0$, son reales o complejos. En el polinomio $Pn(x)$, c es una raíz del polinomio $Pn(x)$, o una solución de la ecuación polinomial $Pn(x)=0$ si se cumple que $P(c)=0$.

Ejemplo

Sea el polinomio

$Pn(x) = -x^3+4x^2-3x$.

Es un polinomio de grado 3, en donde,

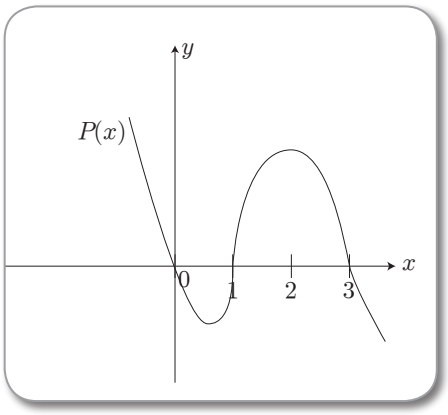
$n=3$, $a_3=-1$, $a_2=4$, $a_1=-3$ y $a_0=0$

$P_{(x)} = 0$ si $-x^3+4x^2-3x=0$;

$x^3-4x^2+3x=0$;

$\Rightarrow \ x(x^2-4x+3)=0$;

$x=0$ ó $x^2-4x+3=0$; así $x=0$ ó $(x-3)(x-1)=0$



Las raíces del polinomio $P(x)$ son $x=0$, $x=3$ y $x=1$, ya que al reemplazar estos valores en el polinomio lo anulan, es decir, $P(0)=0$, $P(3)=0$ y $P(1)=0$. En la gráfica se observa que una raíz real de $P(x)$ es una intersección con el eje x

Definición: los polinomios $Pn(x)$ y $Qn(x)$ son iguales si tienen el mismo grado y sus coeficientes son iguales, es decir;

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \Rightarrow$$

$$P_n(x) = Q_n(x) \Leftrightarrow a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ ...,\ a_2 = b_2,\ a_1 = b_1 \text{ y } a_0 = b_0$$

Ecuación e identidad

Sea $(x+3)^2 = x^2+6x+9$

y $(x+a)\ (x-a) = x^2 - a^2$

Observemos que la igualdad se cumple **para cualquier valor de** x, a este tipo de igualdades se denominan **identidades**, si dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son idénticos se nota $P(x)\equiv Q(x)$, en particular, $P(x)\equiv 0$ significa que el polinomio $P(x)$ es idénticamente igual a cero, es decir, es el número cero.

De $P(x) \equiv Q(x)$ se tiene que $P(x)-Q(x) \equiv 0$ es decir $0 = 0$

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$; $P(x) \neq Q(x)$. Es posible que $P(x)$ sea igual a $Q(x)$ para algunos valores de x.

Ejemplo

$2x-5 = x+2$ se cumple para $x = 7$

Si $P(x) = Q(x)$, para algún o algunos valores de x, esta igualdad se denomina una **ecuación algebraica** con una incógnita, x .

Si $P(x) = Q(x)$, sumando el inverso aditivo de $Q(x)$ en cada uno de los miembros, tenemos que:

$$P(x) + [-Q(x)] = Q(x) + [-Q(x)]$$

$P(x)-Q(x) = 0$ es decir, la ecuación $P(x)=Q(x)$ la podemos expresar como $P(x)-Q(x)=0$

$P(x)=Q(x)$ **si y solo si** $P(x)-Q(x)=0$

Si $P(x)-Q(x)=T_n(x)$

$T_n(x)=0$, **se denomina una ecuación con una incógnita de grado** n**.**

Si $T_n(x)$ está definido en los números reales, resolver la ecuación $T_n(x)=0$, consiste en hallar todos los valores numéricos de la incógnita x, que convierten la ecuación en una igualdad numérica.

Todo número que cumpla esta condición se llama **raíz o solución** de la ecuación, por eso, resolver la ecuación $T_n(x)$ significa determinar el conjunto de todas sus raíces o soluciones.

Ejemplo

1. En la ecuación $5x+3=23$; $x=4$ es una solución porque al reemplazarla en la ecuación, esta se convierte en una igualdad numérica

$$5(4)+3 = 23$$
$$23 = 23$$

2. En la ecuación $x^3 - 3x + 2 = 0$; $x = 1$ y $x = -2$ son soluciones de la ecuación.
   Si $x=1$ entonces $1^3 - 3(1) + 2 = 0$
   $0 = 0$
   Si $x=-2$ entonces $(-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0$
   $-8 + 6 + 2 = 0$
   $0 = 0$

3. La igualdad $x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ no es una ecuación porque **cualquiera** sea el número real que tome x, tenemos una igualdad numérica, en este caso tenemos una **identidad**.

4. La ecuación $x^2+1=0$ no tiene solución real, porque cualquiera que sea el valor numérico real que le asignemos a x, no se cumple la igualdad.

5. La ecuación $x-1=x+1$, al resolverla tenemos que: $0 = 2$ (**absurdo**) Significa que no existe solución para x.

Ecuaciones de primer grado

Si $T(x)$ es un polinomio de primer grado, obtenemos la ecuación.

$a_1x+a_0=0$ aplicando **propiedades de los números reales** tenemos:

$$a_1x + a_0 + (-a_0) = 0 + (-a_0) \quad \text{inverso aditivo,}$$
$$a_1x + 0 = -a_0 \quad \text{modulativa para la suma,}$$
$$a_1x = -a_0$$
$$\frac{1}{a_1}\,a_1x = \frac{1}{a_1}(-a_0) \quad \text{inverso multiplicativo,}$$
$$1.x = \frac{-a_0}{a_1} \quad \text{modulativa producto por lo tanto,}$$
$$x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$$

La ecuación de primer grado con una incógnita tiene una sola raíz o solución,

$$x_1 = -\frac{a_0}{a_1}.$$

Ejemplos

1. Resolver

$3x+11=5$

Sumando el inverso aditivo de 11 en cada uno de los miembros de la ecuación lados, tenemos:

$$3x + 11 + (-11) = 5 + (-11)$$
$$3x + 0 = 5 - 11$$
$$3x = -6$$

multiplicando cada uno de los miembros de la ecuación, por el inverso multiplicativo de 3, tenemos:

$$\tfrac{1}{3}.3x = \tfrac{1}{3}(-6)$$
$$x = -2$$

2. Resolver $\frac{2x-3}{7} = \frac{3}{4}x + 1$

$$\frac{2x-3}{7} = \frac{3}{4}x + 1$$
$$\frac{2x-3}{7} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{1}$$
$$\frac{2x-3}{7} = \frac{3x+4}{4}$$

$$4(2x-3)=7(3x+4)$$
$$8x-12=21x+28$$
$$8x-12+12-21x=21x+28+12-21x$$
$$8x-21x=28+12$$
$$-13x=40$$
$$x=-\frac{40}{13}$$

3. Resolver para x $\quad \frac{2x+a}{bx-2}=\frac{2}{5}$

$$5(2x+a)=2(bx-2)$$
$$10x+5a=2bx-4$$
$$10x-2bx=-4-5a$$
$$x(10-2b)=-4-5a$$
$$x=\frac{-4-5a}{10-2b}$$

4. Resolver la ecuación: $\frac{4}{x-10}=\frac{2}{8x-24}$

$$4(8x-24)=2(x-10)$$
$$32x-96=2x-20$$
$$32x-2x=-20+96$$
$$30x=76$$
$$x=\frac{76}{30}\Rightarrow x=\frac{38}{15}$$

5. Resolver la ecuación: $\quad \frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{6}{x+1}$

En esta ecuación el Mínimo Común Multiplo (MCM) es $(x-1)(x+1)=x^2-1$, además se observa que $x\neq 1$y $x\neq -1$ porque cuando uno de estos valores hace cero a dos de los denominadores.

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{6}{x+1}$$
$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{6}{x+1}$$
$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{x+1-6(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$2 = x + 1 - 6(x-1)$$
$$2 = x + 1 - 6x + 6$$
$$2 = -5x + 7$$
$$5x = 7 - 2$$
$$x = 1$$

Como $x \neq 1 \Rightarrow$ la ecuación no tiene solución, la anterior solución se denomina solución extraña.

6. **Resolver** para h, $V = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$$V - 2\pi r^2 = 2\pi rh$$

$$\frac{V-2\pi r^2}{2\pi r} = h$$

7. **Resolver** para a la ecuación: $S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$

$$S = \frac{2V_0 t + at^2}{2}$$

$$2S = 2V_0 t + at^2$$

$$2S - 2V_0 t = at^2$$

$$a = \frac{2S-2V_0 t}{t^2}$$

8. **Resolver** para i en la ecuación: $P = P_0(1+0.01i)^2$

$$P = P_0(1+0.01i)^2$$
$$\frac{P}{P_0} = (1+0.01i)^2$$
$$\pm\sqrt{\frac{P}{P_0}} = 1+0.01i$$
$$\pm\sqrt{\frac{P}{P_0}} - 1 = 0.01i$$
$$\pm\frac{\sqrt{\frac{P}{P_0}}-1}{0.01} = i$$
$$\pm\frac{\sqrt{\frac{P}{P_0}}-1}{\frac{1}{100}} = i$$
$$i = 100(\sqrt{\frac{P}{P_0}} - 1)$$

9. **Resolver** la ecuación: $|2x+5|=9$

Recordemos que $|x| = |-x|$, por lo tanto $|2x+5|= 9$ significa que:

$$2x+5 = 9 \text{ ó } -(2x+5) = 9$$
$$x = 2 \text{ ó } x = -7$$

El conjunto solución de la ecuación es: $\{2,-7\}$.

10. **Resolver** la ecuación: $|3x + \frac{2}{3}| = 5$

$$3x + \tfrac{2}{3} = 5 \quad \text{ó} \quad 3x + \tfrac{2}{3} = -5$$
$$3x = 5 - \tfrac{2}{3} \quad \text{ó} \quad 3x = -5 - \tfrac{2}{3}$$
$$3x = \tfrac{15}{3} - \tfrac{2}{3} \quad \text{ó} \quad 3x = -\tfrac{15}{3} - \tfrac{2}{3}$$
$$3x = \tfrac{13}{3} \quad \text{ó} \quad 3x = -\tfrac{17}{3}$$
$$x = \frac{\frac{13}{3}}{3} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-\frac{17}{3}}{3}$$
$$x = \tfrac{13}{9} \quad \text{ó} \quad x = -\tfrac{17}{9}$$

El conjunto solución de la ecuación es: $S = \{\frac{13}{9}\ ,\ -\frac{17}{9}\}$

Verifiquemos la ecuación anterior:

Si $x = \frac{13}{9} \Rightarrow |3(\frac{13}{9}) + \frac{2}{3}| = |\frac{13}{3} + \frac{2}{3}| = |\frac{15}{3}| = 5$

Si $x = -\frac{17}{9} \Rightarrow |3(-\frac{17}{9}) + \frac{2}{3}| = |-\frac{17}{3} + \frac{2}{3}| = |-\frac{15}{3}| = 5$

Ejercicio 3.1

1. Resuelva:

   a. $3x - 7 = 12$

   b. $7 - 9x = 34$

   c. $2x - 5 = 7x + 4$

   d. $3x + 7 = 7x + 19$

   e. $x - 13 + 5x = 2x + 5$

   f. $3x + 1 - x = 2x + 4$

   g. $-3x - 1 + 2x - 3 = x$

   h. $x - 3(x + 4) = 2$

   i. $3(x - 2) = 2(x - 6)$

   j. $8 - 4(2x - 7) = 8(x - 3)$

   k. $y^2 + 3 - (y + 1)(y + 2) = 0$

   l. $3(x + 1) + x^2 = x^2 + 18$

   m. $-6x^2 + 5x + 3x(2x - 3) = 3x + 11$

   n. $4x + (x - 2)(x - 7) - 3 = x^2 + 5$

2. Resuelva:

   a. $\frac{1}{4}\,x = 10 - x$

   b. $\frac{2}{3}x + \frac{7}{5} = \frac{9}{2}$

   c. $\frac{2z - 5}{4} + \frac{4z - 1}{3} = \frac{2z - 3}{2}$

   d. $\frac{x - 3}{4} - \frac{2x - 1}{5} = 5$

   e. $\frac{x}{5} + \frac{x + 5}{2} = 6$

   f. $\frac{x + 5}{4} - \frac{3x}{2} = x$

g. $\frac{1}{2}x - 9 = \frac{3}{4}x - 5$

h. $\frac{1}{3}(x + \frac{3}{5}) + \frac{1}{5}(x + 2) = x + 1\frac{3}{4}$

i. $0{,}3x + 0{,}055 = -0{,}033 - 0{,}5x$

j. $\frac{3x - 11}{9} + 2 = 0$

k. $\frac{x + 1}{2} - \frac{2x}{5} = \frac{x - 1}{2}$

l. $\frac{3x - 2}{5} = \frac{x + 1}{2} - \frac{3 - 7x}{10}$

m. $\frac{2x}{4} + \frac{3(x - 5)}{6} = 7$

n. $\frac{5(y - 3)}{4} = \frac{y}{5} - 2$

o. $\frac{2(x - 0{,}12)}{6} - \frac{3(x + 2{,}4)}{4} + 12(1{,}2) = 0$

p. $\frac{9(x - 2)}{4} - \frac{7(x - 1)}{3} = 6x + 1$

q. $0{,}8(4y - 5{,}5) - 2{,}1(2y - 4) = 0{,}25(3y - 5)$

r. $\frac{1 - 3x}{4} = \frac{1 - x}{2} - \frac{1 - 2x}{3}$

3. a. Para qué valor de x, $\frac{3(x-7)}{4}$ es igual a i. 10 ii. -9 iii. 0

   b. Para qué valor de w, $\frac{3(w+1)}{4} + \frac{-w+1}{6}$ es igual a i. 0 ii. -1

   c. Para qué valores de x, $\frac{-5x + 7}{3x - 4}$ es igual a i. $-3/7$ ii. $\frac{-10x + 7}{6x - 1}$

4. Resuelva: para x las siguientes ecuaciones con coeficientes literales.

   a. $3ax + 5a = 7a$

   b. $2(3x + 2a) - 3(x + 3a) = 4a$

   c. $a(2x + 5) - b(3x - 2) = 0$

   d. $\frac{x-8a}{3} = 2(3a - 2x)$

   e. $mnx - a = anx - m$

   f. $6ax - b^2 + 2ab = a^2 + 6bx$

   g. $ax + b + cx = d$

   h. $ax + bx = c$

   i. $\frac{4a-x}{3} = \frac{x-4a}{2}$

   j. $\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{b}$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones para y:

a. $\frac{2y}{b} = \frac{b}{2} - 3n$

b. $(ay + b^2) = a^2 + by$

c. $(y - a)^2 - (y + b)^2 = 2ab$

d. $2by + a^2 = 4b^2 + ay$

e. $\frac{y}{ab} - \frac{y}{bc} = \frac{1}{ac}$

f. $5by - 7a = 2ay + 4b$

6. Despejar la incógnita indicada:

a. $\mathrm{A} = \frac{1}{2}bh$; para b

b. $\mathrm{A} = \mathrm{P}(1 + rt)$; para t

c. $\mathrm{I} = \mathrm{P}rt$; para r

d. $v = k + gt$; para k

e. $h = \frac{1}{2}\, gt^2$; para g

f. $\mathrm{F} = \frac{kmM}{d^2}$; para m

g. $\mathrm{F} = \frac{9}{5}\,\mathrm{C} + 32$; para C

h. $\mathrm{S} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$; para a

i. $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\,(b + c)h$; para b

j. $\mathrm{L} = a + (n - 1)\, d$; para n

k. $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$; para t

l. $\frac{ax + b}{cx - d} = 2$; para x

7. Verifique si el valor asignado a x es solución dada:

a. $6x^2 - 5x - 6 = 0; \quad x = \frac{3}{2}$

b. $x^3 - 3x - 2 = 0; \quad x = 2$

c. $\frac{3x - 7}{3x + 14} = 5\,; \quad x = -2$

8. Resuelva:

a. $|2x - 7| = 5$

b. $|x + 1| = 4$

c. $|8 - 5x| = 3$

d. $|2x + 3| = 5$

e. $|4x - 6| = 2$

f. $|7 + 2x| = 5$

g. $|-5x - 8| = 12$

h. $|3x - 5| = |7x - 2|$

i. $|3(x - 2) + 5| = 6$

j. $|2x + 1| = |3x|$

k. $|x - 6| = |3 - 2x|$

l. $\left|\frac{x+2}{2x-5}\right| = 1$

m. $|x - 2| = 3$

n. $|2x + 3/4| = 3/4$

o. $|2x - 1| = 1/2$

p. $|x - 1| = |x - 2|$

q. $|8x - 5| = 3$

r. $|4x + 6| = 2$

s. $|5x - 48| = 12$

t. $|x - 15| = |7x - 2|$

u. $|2x - 1| = |3x + 9|$

v. $|x + 6| = |3 + 2x|$

w. $|-x + 9| = |7x - 6|$

x. $|x + 3| = |2x - 6|$

y. $|3 - 2x| = |x + 4|$

z. $|3x - 8| = 0$

z*. $|(x - a)(x - b)| = 0$

Solución de problemas

Lenguaje verbal y expresiones algebraicas

El uso de símbolos para simplificar el lenguaje verbal, construyendo un lenguaje algebraico es muy útil en el planteamiento y solución de problemas en matemática.

Ejemplos

	Expresión verbal	**Expresión algebraica**
1.	a. Un número cualquiera.	x
	b. La suma de dos números.	$x + y$
	c. La diferencia de dos números.	$x - y$
	d. El producto de dos números.	$x \, . \, y$
	e. El cociente de dos números .	$\frac{x}{y}$
	f. Un número x aumentado en 2.	$x + 2$
	g. Un número x disminuído en $\frac{1}{3}$.	$x - \frac{1}{3}$

h. x excede a y en 15. $x = y + 15$ ó $x - y = 15$

i. x es el tripe de y. $x = 3y$

j. El siguiente entero de n. $n+1$

k. Si n es par el siguiente par. $n+2$

l. a es la mitad de b. $a = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}b$ ó $b = 2a$

m. x es la tercera parte de la diferencia entre el doble de a y la mitad de b. $x = \frac{2a - \frac{b}{2}}{3} = \frac{1}{3}\left(2a - \frac{b}{2}\right)$

n. a es el número cuyo dígito de las unidades es $3x$ y el de las decenas es $2x$. $a = 10(2x) + 3x$

o. x es la distancia recorrida en t horas a una velocidad de 70 Km/h. $x = 70\text{t}$

p. El perímetro de un rectángulo es de x ms de largo y 10 ms de ancho. $(x + 10) + (x + 10) = 2x + 20$

q. El 30% de x: $\frac{30}{100}x = \frac{3}{10}x = 0{,}3x$

r. El 25% más de p:
$p + \frac{25}{100}p = p + \frac{1}{4}p = p(1 + \frac{1}{4}) = p(1 + 0{,}25) = 1{,}25p$
Observemos que para hallar el 25% más de p, multiplicamos a p por 1,25

s. El 30% menos de x: $x - \frac{30}{100}x = x - 0{,}3x = x(1 - 0{,}3) = 0{,}7x$
Observemos que para hallar el 30% más de x, multiplicamos a x por 0,7.

Determinación de variables

2. Determine las variables y encuentre la expresión algebraica de las siguientes afirmaciones:

a. La suma de dos números es 20.

Sean x e y los números $x+y=20$ o $y=20-x$.

b. La suma de tres números impares consecutivos. Sea n el menor de los números, como son impares los otros números son:

n, $n+2$ y $n+4$, por lo tanto su suma es: $n+(n+2)+(n+4)=3n+6$

c. Un número de tres cifras cuyo dígito de las unidades supera en 3 al de las decenas, y el de las centenas es 1 unidad menor que el de las decenas. Exprese la suma de sus dígitos.

Observemos que el número de las decenas está relacionado con el número de unidades y de centenas, hagamos: x el número de decenas, por lo tanto:

$x+3$ el número de unidades y
$x+1$ el número de centenas

La suma de los dígitos es: $(x-1)+x+(x+3)$, y el número es:

$$\begin{aligned} 10^2(x-1)+10^1x+(x+3) &= 100 \\ &= 100(x-1)+10x+(x+3) \\ &= 111x-97 \end{aligned}$$

d. El perímetro y el área de un rectángulo si su largo es el doble de ancho. x es el ancho y $2x$ es el largo, por lo tanto, el perímetro es: $2(2x)+2x=6x$ y el área es: $2x\cdot x=2x^2$

e. Si tenemos monedas de $100 y $500 hallar su valor si hay 70 monedas en total.

Sean: x es el número de monedas de $100; y es el número de monedas de $500; por lo tanto: $100x$ es el valor de las x monedas de $100; $500y$ es el valor de las y monedas de $500; luego: $x+y=70$ es decir $y=70-x$ y el valor total de las 70 monedas es: $100x+500(70-x)$

f. Una fracción cuyo denominador excede al numerador en 5.

Sea x el numerador, por lo tanto el denominador es $x+5$, y la fracción es: $\dfrac{x}{x+5}$

g. El cociente entre 92 y x, es 7 y el residuo es 5.

$$\frac{92}{x} = 7 + \frac{5}{x} \quad \text{o} \quad 92 = 7x + 5$$

h. Una persona efectúa un trabajo en x horas, ¿qué parte del trabajo puede desarrollar en 12 horas?

En una hora puede hacer $\frac{1}{x}$ parte del trabajo; qué hace en 12 horas es $12.\ \frac{1}{x} = \frac{12}{x}$

i. A desarrolla un trabajo en 72 días y B desarrolla el mismo trabajo en 96 días. Qué parte del trabajo hacen, si trabajan juntos durante x días?

Si A y B trabajan durante x días, la parte del trabajo que realizan; son respectivamente $\frac{x}{72}$ y $\frac{x}{96}$; por lo tanto si trabajan juntos: realizarán: $(\frac{x}{72} + \frac{x}{96})$ parte del trabajo.

j. Un capital de 200 millones de pesos se invierte en dos alternativas A y B a tasas de interés del 3,5% y 3% mensual respectivamente. Expresar la rentabilidad mensual.

Sea x la inversión en la alternativa A, por lo tanto $200-x$ será la inversión en la alternativa B. La rentabilidad mensual es $0{,}035x+0{,}03(200-x)$

Verificación de la solución de un problema

3. En los siguientes problemas verifique si la solución dada cumple las condiciones del problema.

a. La edad actual de A es el triple de la de B y dentro de 10 años será el doble. ¿Es la edad actual de A, 30 años?

Si la edad actual de A es 30 años, la edad actual de B es 10 años, por ser la edad de A el triple de la de B. Dentro de 10 años A tendrá 40 años y B tendrá 20 años, es decir, la edad de A será el doble de la de B. Por lo tanto, la edad actual de A es 30 años.

b. El número cuyo dígito de las decenas es el doble del de las unidades y al intercambiar las cifras se disminuye en 27 es 84.

Si el número es 84, la cifra de las decenas, 8, es el doble del de las unidades, al intercambiar las cifras, obtenemos el número 48 y el número se disminuye en: $84-48=36$, por lo tanto, 84 no es la solución.

c. El número cuyo 20% más equivale al doble del número disminuido en 4.000 es 10.000. El 20% más de 10.000 es 10.000(1,2) $=$12.000;

12.0000 debe ser equivalente a $2(10.000)-4.000=16.000$. Como $12.000 \neq 16.000$ entonces 10.000 no es solución.

d. Una persona realizó dos inversiones por un total de $10.000. En una de las inversiones obtuvo un 10% de utilidad, y en la otra tuvo una pérdida del 12%. Si la inversión total dejó una pérdida de $540, las cantidades invertidas fueron de $3.000 y $7.000, respectivamente.

Las cantidades invertidas suman $10.000; la inversión de $3.000 genera una utilidad del 10%, es decir, $300 y la inversión de $7.000 genera una pérdida del 12%, decir, $840. La inversión total genera una pérdida de $540, por lo tanto, $3.000 y $7.000 son la solución del problema.

Ejercicio 3.2

1. Exprese algebraicamente cada una de las siguientes afirmaciones;
   a. x es 3 unidades mayor que el doble de r.
   b. Un número y supera en 5 al triple de un segundo número z.
   c. El x% más de 10.000
   d. El 4,5% más de P.
   e. El 0,5% menos de F.
   f. La suma de tres pares consecutivos, si el mayor es M.
   g. La suma de tres enteros consecutivos si el segundo en la relación de orden es x.
   h. La cantidad de plata contenida en x número de libras de una aleación con plata de ley 900.
   i. El interés que un capital C en un trimestre a una tasa de interés trimestral del 8%.
2. Determine las variables y encuentre la expresión algebraica de las siguientes afirmaciones:
   a. Una fracción cuyo numerador es 2 unidades menor que su denominador.

b. Si un hombre puede realizar un trabajo en 40 horas, ¿qué parte del trabajo puede desarrollar en 7 horas?

c. Si el agua que sale de una llave puede llenar una piscina en 30 horas, y otra llave en x, ¿qué parte de la piscina se llenará en 7 horas si ambas llaves se abren al mismo tiempo?

3. En los siguientes problemas verifique si la solución dada cumple las condiciones del problema.

a. Dos automóviles parten de un mismo punto en direcciones opuestas. Si uno de ellos viaja con una rapidez promedio de 10 km/h mayor que el otro, y al cabo de 8 horas se encuentran distanciados 800 kms.,¿ la rapidez de cada uno de los automóviles es de 55 km/h y 45 km/h?

b. Un ciclista recorre una distancia de ida con una rapidez de 30 km/h y de regreso a 35 km/h. Si tardó 30,5 horas; ¿fue la distancia recorrida de 991,25 kilómetros?.

c. Un tren viaja a 40 km/h., Un pasajero va desde el final del tren hasta el frente y regresa a la parte posterior, en 3 minutos. Si la rapidez del pasajero es de 20 km/h, ¿es la longitud del tren de 1 kilómetro?

d. La base de un rectángulo excede en 6 ms., a su altura; si el perímetro es de 96 ms. ¿Es la altura del rectángulo de 27 metros?

e. Si dos lados opuestos de un cuadrado aumentan en 6 cms. cada uno y los otros dos se disminuyen en 3 cms. cada uno, el área se incrementa en 33 cms^2, ¿es la medida del lado del cuadrado 20 cms?

f. La base de un cuadro sin marco mide el doble de su altura. Si el marco tiene 5 cms. de ancho y 1.100 cms^2. de área, ¿la base del cuadro mide 80 cms?

g. Si dos ángulos son complementarios y uno de ellos mide 6° más que el doble del otro. ¿Es la medida del ángulo menor 28°?

h. Dos cantidades de dinero que suman $300.000, ganan respectivamente, 24% y 36% de interés anual. Si generan un interés de $93.600 la suma invertida al 24%, ¿es $120.000?

i. Si tengo $1'000.000 invertidos al 6%, la cantidad que debo invertir al 7,5% para que el interés de ambas inversiones sea de $240.000, ¿es de $2'400.000?.

j. El número que debe restarse al numerador y sumarse al denominador de la fracción $\frac{59}{103}$ para obtener una fracción igual a $\frac{2}{7}$, ¿es 23?

k. El dígito de las unidades de un número de dos cifras supera en 2 al de las decenas. Si el número se divide entre la suma de sus dígitos, el cociente es 4 y el residuo es 3.¿Es 35 el número?

l. B demora el doble de lo que A tarda en realizar un trabajo. Si trabajando juntos terminan el trabajo en 4 horas; ¿tardará A en hacer el trabajo 6 horas?

m. Un tanque se llena al abrir una llave en 10 minutos, y 15 minutos al abrir otra. Si se abren al tiempo las dos llaves, ¿llenan el tanque en 6 minutos?

n. Un número excede en 94 a otro. Si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 4 y el residuo es 13. ¿Es el número mayor 121?

Un método para la solución de problemas

Para resolver problemas que conducen al planteamiento de ecuaciones se sugiere seguir los siguientes pasos:

1. Determinar las incógnitas y representarlas con variables.
2. Expresar algebraicamente en término(s) de las variable(s) la información que proporciona el problema.
3. Plantear y resolver la ecuación.
4. Verificar si la solución dada cumple las condiciones del problema.

Ejemplo 1

El interés anual producido por $24.000 excede en $156 al producido por $17.000. Si la tasa anual que se aplica a los $17.000 es el 1,8% mayor, que la aplicada a los $24.000. ¿Cuál es la tasa anual de interés aplicada a cada cantidad?

1. Determinamos las incógnitas y las representamos con variables. Sea x% la tasa de interés anual que aplicamos a los \$24.000, por lo tanto $(x+1{,}8)$% será la tasa de interés anual que aplicamos a los \$17.000.

2. Expresamos algebraicamente en términos de la variable la información que proporciona el problema.

   El interés que producen los \$24.000 es: $24.000 \times \frac{x}{100}$, y el interés que producen los \$17.000 es: $17.000 \times \frac{(x+1{,}8)}{100}$

3. Planteamos la ecuación y la resolvemos.
   Como el interés que producen los \$24.000 excede en \$156 a los intereses que producen los \$17.000, tenemos:

   $24.000 \times \frac{x}{100} - 17.000 \times \frac{(x+1{,}8)}{100} = 156$; multiplicando por 100 tenemos $24.000x - 17.000(x+1{,}8) = 15.000$

$$\begin{aligned} 24.000x - 17.000x - 30.600 &= 15.600 \\ 7.000x &= 15.600 + 30.600 \\ 7.000x &= 46.200 \\ x &= 46.200/7.000 \\ x &= 6{,}6 \end{aligned}$$

   6,6% es la tasa de interés de los \$24.000 y 6,6% + 1,8% = 8,4% el interés de los \$17.000.

4. Verificamos que la solución dada cumple las condiciones del problema.

   La tasa de interés que se aplica a los \$17.000 (8,4%) es 1,8% mayor que la aplicada a los \$24.000 (6,6%). Al 6,6%, \$24.000 genera un interés de 24.000 × 0,066 1.584; y al 8,4%, \$17.000 genera un interés de 17.000 × 0,084 = 1.428 y el interés de los \$24.000 excede en \$156 al de los \$17.000, esto es: 1.584−1.428 =156

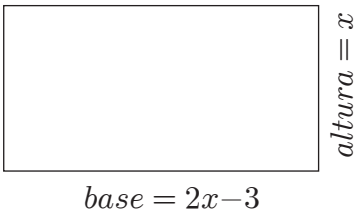
Ejemplo 2

La base de un rectángulo es 3 ms. menor que el doble de la altura, y el perímetro es de 42 ms. Hallar las dimensiones del rectángulo.

Solución:

Sea x la altura, como la base es 3 ms. menor que el doble de la altura, la base es:$(2x-3)$. Como el perímetro es 42, planteamos la ecuación:

$$\begin{aligned} 2x+2(2x-3)&=42\\ 2x+4x-6&=42\\ 6x&=48\\ x&=8 \end{aligned}$$



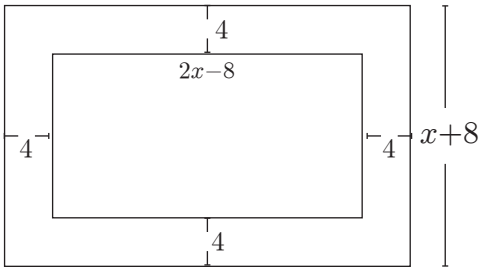
La altura del rectángulo es de 8 ms. y la base es $2(8)-3=13$
Dejamos al lector la verificación del problema.

Ejemplo 3

La base de una pintura rectangular sin tener en cuenta su marco, es 8 decímetros menor que el doble de su altura. Si el marco tiene 4 dms., de ancho y un área de 816 dms^2, hallar las dimensiones de la pintura sin el marco.

Solución:

Sea x la altura sin el marco, por lo tanto la base es $(2x-8)$.
Con marco la altura es $(x+8)$ y la base $[(2x-8)+8]=2x$



Resumiendo

	Altura	**Base**	**Área**
Sin marco	x	$(2x-8)$	$x(2x-8)$
Con marco	$(x+8)$	$2x$	$2x(x+8)$

El área de la pintura incluyendo el marco, menos el área de la pintura sin el marco, es igual al área del marco, es decir:

$$\begin{aligned} 2x(x+8)-x(2x-8) &= 816 \\ 2x^2+16x-2x^2+8x &= 816 \\ 24x &= 816 \\ x &= 34 \end{aligned}$$

La altura de la pintura es de 34 dms., y la base es de $2(34)-8=60$ dms.

Ejemplo 4

¿Qué número debe sumarse al numerador y al denominador de la fracción 25/73 para que resulte una fracción igual a 3/7?
Sea x el número que hay que sumar

$$\begin{aligned} \frac{25+x}{73+x} &= \frac{3}{7} \\ 7(25+x) &= 3(73+x) \\ 175+7x &= 219+3x \\ 7x-3x &= 219-175 \\ 4x &= 44 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

El número que debe sumarse tanto al numerador como al denominador es 11.

Ejemplo 5

El denominador de una fracción simple excede al numerador en 9. Si se suma 4 al numerador y 5 al denominador, la fracción es 2/3. Encontrar la fracción.

Sea x el numerador de la fracción, entonces el denominador de la fracción es $x+9$, por lo tanto la fracción es: $\frac{x}{x+9}$

Al sumar 4 al numerador y 5 al denominador obtenemos la fracción $\frac{x+4}{x+14}$ como esta fracciones es igual a $\frac{2}{3}$ planteamos la ecuación

$$\frac{x+4}{x+14} = \frac{2}{3}$$

Resolviendo la ecuación tenemos que $x = 16$ y la fracción es $\frac{16}{25}$.

Ejemplo 6

El dígito de las decenas de un número de dos cifras excede en 3 al de las unidades. Si el número se divide entre la suma de sus dígitos, el cociente es 6 y el residuo es 7. Hallar el número.

Sea x el dígito de las unidades, por lo tanto $(x+3)$ es el dígito de las decenas.
La cantidad que representa el número es $(x+3).10^1+10^0x = 11x+30$ y la suma de los dígitos es $(x+3)+x=2x+3$.
Como el cociente entre el número $(11x+30)$ y la suma de los dígitos $(2x+3)$, es 6 y el residuo es 7, planteamos la ecuación:

$$\frac{11x+30}{2x+3} = 6 + \frac{7}{2x+3}$$

Resolviendo la ecuación tenemos que $x=5$, por lo tanto el número es 85.

Ejemplo 7

Si A es capaz de realizar un trabajo en 3 días y B puede realizarlo en 6 días. ¿Cuánto demorarán efectuando juntos ese trabajo?

A	B	A y B
3 días	6 días	x días
A puede efectuar $\frac{1}{3}$ del trabajo en 1 día.		
B puede efectuar $\frac{1}{6}$ del trabajo en 1 día.		

A y B juntos pueden hacer$\frac{1}{x}$ del trabajo en 1 día. Planteamos la ecuación:

$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$; Resolviendo la tenemos que: $x=2$.

Por consiguiente, A y B emplearán 2 días para llevar a cabo el trabajo juntos.

Ejemplo 8

Un tanque puede ser llenado por una llave en 15 horas, y desocupado por un desagüe en 20 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el tanque si la llave y el desagüe se abren simultáneamente?

Llave	Desagüe	Llave y desagüe
15 horas	20 horas	x horas
La llave llena $\frac{1}{15}$ del tanque en 1 hora.		
El desagüe desocupa $\frac{1}{20}$ del tanque en 1 hora.		
Simultáneamente se llena $\frac{1}{x}$ del tanque en 1 hora.		

Planteamos la ecuación, teniendo en cuenta que en una hora la cantidad de líquido que hay en el tanque es igual a la que entra de la llave menos la que sale por el desagüe, es decir,

$\frac{1}{15}-\frac{1}{20}=\frac{1}{x}$; resolviendo la ecuación $x=60$

Por consiguiente, el tanque se llena en 60 horas.

Ejercicio 3.3

1. Halle un número tal que:
   a. Su doble aumentado en 17 es igual a 71.
   b. Su triple disminuido en 11 es igual a 64.
   c. Su triple excede en 16 a su tercera parte.
   d. Nueve veces el número excede en 100 a cinco veces él mismo.
   e. Sus dos terceras partes excede en 7 a su mitad.
   f. Su cuarta parte sea siete unidades menor que su tercera parte.
2. Halle dos números tales que:
   a. Uno es la cuarta parte del otro y su suma es 250.
   b. Uno es 5 veces el otro y su diferencia es 600.
   c. Su suma es 240 y su diferencia es 160.
   d. El mayor excede al doble del menor en 30 y su suma es 135.
   e. El triple del menor excede al doble del mayor en 50 y su suma es 350.
   f. El menor es los 3/5 del mayor y su suma es 800.
   g. Su suma es 100 y el doble del mayor es igual al triple del menor.
   h. Su diferencia es 25. Si el triple del menor excede en 5 a la mitad del mayor.
   i. Sean enteros consecutivos y la diferencia de sus cuadrados sea 31.
   j. Sean pares consecutivos y la diferencia de los cuadrados sea 84.
   k. Su diferencia sea 8 y la de sus cuadrados exceda en 20 a trece veces el número mayor.
3. Halle tres números tales que:
   a. Sean enteros consecutivos y su suma sea 540.
   b. Sean pares consecutivos y su suma sea 510.
   c. La suma sea 44; el segundo sea el doble del primero y el tercero 4 unidades menor que el primero.
   d. La suma sea 78; el segundo sea el doble del primero y el tercero el triple del primero.
   e. La suma sea 94; el segundo es 2 unidades menor que el primero y el terceros es 6 unidades mayor que el primero.
   f. Sean enteros consecutivos y la suma del segundo con el tercero sea 9 unidades menor que el triple del primero.
4. Halle un número entero de dos cifras tal que:

a. La suma de sus dígitos es 13 y el número excede en 2 al quíntuplo de la suma de sus dígitos.
b. El dígito de las unidades es 2 unidades menor que el dígito de las decenas y ocho veces la suma de sus dígitos excede en uno al número.

5. Halle un número entero de tres cifras tal que:
   a. La suma de los dígitos sea 15, el dígito de las unidades sea el cuádruplo del de las centenas y el doble del dígito de las decenas sea igual a la suma del dígito de las unidades con el dígito de las centenas.
   b. La suma de los dígitos sea 20; el dígito de las unidades exceda en uno al de las centenas y el cuádruplo del dígito de las centenas exceda en 2 al doble de la suma del dígito de las unidades con el de las decenas.
   c. El dígito de las unidades es el doble del de las centenas, la suma de los dígitos es 19 y si se intercambian el dígito de las unidades con el de las centenas, el número se incrementa en 396.
6. Una persona tiene:
   a. $3.400 en monedas de $50 y $100. Si tiene en total 47 monedas. ¿Cuántas monedas tiene de cada denominación?
   b. $99.000 en billetes de $1.000, $5.000 y $10.000; si tiene 26 billetes, y la cantidad de billetes de $1.000 es el doble de la de $5.000 ¿Cuántos billetes tiene de cada denominación?
   c. Tiene $12.000 en monedas de $50, $100 y $200. Si en total tiene 95 monedas y el número monedas de $100 es el doble de las de $50. ¿Cuántas monedas tiene de cada denominación?
7. Si usted invierte en bonos y acciones así:
   a. 84 millones de pesos. Si la tasa de interés mensual de los bonos es del 2,59% y, la tasa de interés de las acciones es del 3,99%. Si la inversión total dejó una rentabilidad del 3,09% mensual. ¿Cuánto invirtió en bonos y cuanto en acciones?
   b. 400 millones de pesos. Si la tasa de interés mensual de los bonos es del 2,79% y, la tasa de interés de las acciones es del 3,09%. Si la inversión total dejó una rentabilidad de $11'760.000 mensual ¿Cuánto invirtió en bonos y cuánto en acciones?
   c. 250 millones de pesos. Si la tasa de interés semestral de los bonos es del 12%, la inversión total deja una rentabilidad de $27'000.000 semestrales y en bonos se invierten $20'000.000 más que en acciones, halle la tasa de interés semestral de las acciones.

8. La recaudación por la venta de:
   a. 35.000 boletas para un partido de fútbol fue de $64'500.000. Si se vendieron boletas a $1.600 y $2.200. ¿Cuántas boletas de cada clase fueron vendidas?
   b. 58.000 boletas para un partido de fútbol fue de $100'000.000. Si se vendieron boletas de $2.800, $2.000 y $1.200, y la cantidad de boletas de $2.000 fue de 5.000 más que las de $2.800. ¿Cuántos boletas de cada precio fueron vendidas?
9. De un rectángulo se tiene que:
   a. La altura mide 10 cms. menos que la base. Si el perímetro mide 1,8 ms. Halle sus dimensiones.
   b. La base mide 4 ms. más que el doble de la altura, y el perímetro es de 146 ms. Halle sus dimensiones.
   c. Sus lados son iguales, y si dos de, sus lados opuestos se incrementan en 3 cms., cada uno y los otros dos lados se disminuyen en 2 cms, cada uno, el área se aumenta en 8 cms^2. Halle el lado.
   d. Corresponde a un cuadro, en el que su base sin el marco mide el doble de su altura. Si el marco tiene 6 cms., de ancho y su área es de 1.656 cms^2. Halle las dimensiones del cuadro sin el marco.
10. A puede caminar cierta distancia en 20 minutos, y B puede caminar la misma distancia en 30 minutos. Si A parte 5 minutos después de B; cuanto tiempo habrá estado caminando B, antes de que lo alcance A.

Ecuaciones cuadráticas

Si a, b y c son constantes y $a \neq 0$, entonces una ecuación cuadrática es una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$.

Algunas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver por medio de factorización y mediante la siguiente propiedad de los números reales.

Propiedad
El producto de dos números reales a y b es 0, si y solo si, uno de los dos factores es 0, es decir; $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ ó $b=0$

Ejemplos

1. Resolver $x^2+5x-14=0$

Factorizando tenemos: $(x+7)(x-2)=0$

$$x+7=0 \quad \text{ó} \quad x-2=0$$

$$x=-7 \quad \text{ó} \quad x=2$$

2. Resolver $6x^2-5x-6=0$

Factorizando: $(2x-3)(3x+2)=0$

$$2x-3=0 \quad \text{ó} \quad 3x+2=0$$

$$x=3/2 \quad \text{ó} \quad x=-2/3$$

3. Resolver $4x^2-20x+25=0$

Factorizando: $(2x-5)^2=0$

$$(2x-5)(2x-5)=0$$

$$2x-5=0 \quad \text{ó} \quad 2x-5=0$$

$x=5/2$ ó $x=5/2$ por lo tanto,

$$x=5/2$$

$x=5/2$ es una única solución con multiplicidad 2.

4. Resolver $4x^2=81$

Factorizando: $4x^2-81=0$

$$(2x+9)(2x-9)=0$$

$$2x+9=0 \quad \text{ó} \quad 2x-9=0$$

$$x=-9/2 \quad \text{ó} \quad x=9/2$$

5. Resolver: $x^2-7=0$

Si asumimos que podemos tomar coeficientes reales,

Factorizando $(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) = 0$

$$x + \sqrt{7} = 0 \quad \text{ó} \quad x - \sqrt{7} = 0$$

$$x = -\sqrt{7} \quad \text{ó} \quad x = \sqrt{7}$$

En general, para factorizar $ax^2 + bx + c$, recordemos que se transforma en el polinomio $\frac{1}{a}[(ax)^2 + b(ax) + ac] = 0$

Por lo tanto la ecuación; $ax^2+bx+c = 0$ queda:

$$\frac{1}{a}[(ax)^2 + b(ax) + ac] = 0$$

$$[(ax)^2 + b(ax) + ac] = 0$$

$(ax+m)(ax+n) = 0$, donde $m+n = b$ y $m \cdot n = c$

Si no existen los enteros m y n, tenemos que buscar un procedimiento más general, veamos:

Si $(ax)^2 + b(ax) + ac = 0$ observemos que $(ax)^2$ tiene raíz cuadrada exacta y aparece el término $b(ax)$ que contiene su raíz cuadrada ax lo que motiva a completar el trinomio cuadrado perfecto en la expresión $(ax)^2+abx$

$(ax)^2+abx+z^2=(ax+z)^2$, hallamos z^2, observemos que $2axz=abx$, por lo tanto $z = \frac{b}{2}$ y $z^2 = \frac{b^2}{4}$.

Resumiendo, si: $ax^2+bx+c=0$
multiplicando cada miembro por $(ax)^2+abx+ac = 0$
$(ax)^2+abx=-ac$ sumando en cada miembro $b^2/4$.

$$(ax)^2 + abx + \frac{b^2}{4} = -ac + \frac{b^2}{4}$$

$$(ax + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

$$(ax + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4} = 0$$

$$\left\{(ax+\tfrac{b}{2}+\sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4}}\right\}\left\{(ax+\tfrac{b}{2})-\sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4}}\right\}=0$$

$$ax+\tfrac{b}{2}+\sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4}}=0 \quad \text{ó} \quad ax+\tfrac{b}{2}-\sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4}}=0$$

$$ax=-\tfrac{b}{2}-\tfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2} \quad \text{ó} \quad ax=-\tfrac{b}{2}+\tfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

$$x=\tfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{ó} \qquad x=\tfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Estas dos soluciones se recogen en la expresión:

$$x=\tfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Observemos que este procedimiento lo podemos extender a cualquier coeficiente real.

El discriminante

La existencia y el número de soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c.(a\neq 0)$ depende de la expresión b^2-4ac, esta expresión se denomina **discriminate** y se denota $\boldsymbol{D}$.

$$D=b^2-4ac$$

La ecuación de segundo grado según el discriminante (D). Según sea el discriminante, D, tenemos tres posibilidades:

1. Si $D>0$, entonces existen dos soluciones reales y diferentes.

Ejemplo

Resolver $6x^2-5x-6=0$
En esta ecuación $a=6$; $b=-5$; $c=-6$

$$x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.6.(-6)}}{2.6}$$

$$x = \frac{5\pm\sqrt{25+144}}{12}$$

$$x = \frac{5\pm\sqrt{169}}{12}$$

$$x_1 = \frac{5+13}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-13}{12} = \frac{-8}{12} = \frac{-2}{3}$$

Verifiquemos que $x=3/2$ y $x=-2/3$ son soluciones de: $6x^2-5x-6=0$

Para $3/2$

$$6(3/2)^2-5(3/2)-6 = 0$$
$$6(9/4)-5(3/2)-6 = 0$$
$$27/2-15/2-12/2 = 0$$
$$0 = 0$$

Para $x=-2/3$,

$$6(-2/3)^2 -5(-2/3)-6 = 0$$
$$6(4/9)+10/3-6 = 0$$
$$8/3+10/3-18/3 = 0$$
$$0 = 0$$

2. Si $D=0$ entonces $x = \frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}$, es decir tenemos una solución real de multiplicidad dos, $x = -\frac{b}{2a}$

Ejemplo

Resolver $9x^2-12x+4 = 0$

En esta ecuación $a=9$; $b=-12$; $c = 4$

$$x = \frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4.9.4}}{2.9}$$

$$x = \frac{12\pm\sqrt{144-144}}{18}$$

$$x = \frac{12\pm\sqrt{0}}{18}, \qquad x_1 = x_2 = \frac{12+0}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

3. Si $D<0$, no existe solución en los números reales.

Ejemplo

Resolver $4x^2+20x+41=0$

En esta ecuación $a=4;\ b=20;\ c=41$

$$x=\frac{-20\pm\sqrt{(20)^2-4.4.41}}{2.4}$$

$$x=\frac{-20\pm\sqrt{400-656}}{8}$$

$$x=\frac{-20\pm\sqrt{-256}}{8}$$ no existe en los números reales porque:

$$\sqrt{-256}\notin\mathbb{R}$$

Consideraremos este caso más adelante.

Existen otras ecuaciones que su solución conduce a resolver una ecuación de segundo grado, que se denominan **ecuaciones con radicales**.

Ejemplo

1. Resolver la ecuación: $\sqrt{x+3}=5$

$$(\sqrt{x+3})^2=(5)^2$$

$$x+3=25$$

$$x=25-3$$

$$x=22$$

2. Resolver la ecuación: $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$

$$(\sqrt{2x+1})^2 = (\sqrt{x+3})^2$$

$$2x+1 = x+3$$

$$2x - x = 3 - 1$$

$$x = 2$$

3. Resolver: $\sqrt{5x+1} = \sqrt{x+1} + 2$

$$5x+1 = x+1+4\sqrt{x+1}+4$$

$$5x - x + 1 - 1 - 4 = 4\sqrt{x+1}$$

$$4x - 4 = 4\sqrt{x+1}$$

$$x - 1 = \sqrt{x+1}$$

$$(x-1)^2 = (\sqrt{x+1})^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = x + 1$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 3$$

Al verificar las soluciones se tiene:

a) Si $x = 0 \Rightarrow \sqrt{5(0)+1} = \sqrt{0+1} + 2$

$\sqrt{1} = \sqrt{1} + 2$ como se consideran raíces positivas,

$1 \neq 3$, por lo tanto 0 no es solución.

b) Si $x = 3 \Rightarrow \sqrt{5(3)+1} = \sqrt{3+1} + 2$

$$\sqrt{16} = \sqrt{4} + 2$$

$$4 = 2 + 2$$

$$4 = 4$$

Luego la solución es $x = 3$.

Propiedades

Si tenemos la ecuación $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$. Cuyas soluciones son:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Observemos que: $x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b}{a}$

y, $x_1.x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{c}{a}$

Resumiendo: si x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c = 0$ entonces $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

En particular si $a = 1$, tenemos la ecuación $x^2+bx+c = 0$; si x_1 y x_2 son sus raíces o soluciones entonces $x_1+x_2 = -b$ y $x_1 \cdot x_2 = c$

Ejemplo

Hallar la ecuación cuyas soluciones son $x_1 = 8$ o $x_2 = 7$
Si $a = 1, b = -(8+7) = -15$ y $c = 8.7 = 56$, por lo tanto la ecuación es:
$x^2-15x+56 = 0$

Otra forma más general para hallar la ecuación es:

Si $x = 8$ ó $x = 7$ entonces,

$x-8 = 0$ o´ $x-7 = 0$ por lo tanto,

$(x-8)(x-7) = 0$, efectuando el producto

tenemos que:

$x^2-15x+56 = 0$

Ejercicio 3.4

1. Resuelva cada una de las ecuaciones factorizando, en caso de no poder factorizar utilice la fórmula general.

   a. $x^2 - 3x + 2 = 0$

   b. $3y^2 + 2y - 80 = 0$

   c. $(x-2)^2 + 2 = x$

   d. $(x-3)(x+2) = 6$

   e. $\frac{x-1}{x+3} + \frac{x-2}{x+1} = 1$

   f. $\frac{3x-5}{x+1} = \frac{2(x+4)}{2x-3}$

   g. $9u^2 - 12u - 1 = 0$

   h. $2(x+2)^2 - (x-1)^2 = 2x + 7$

   i. $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

   j. $x^2 - 2bx + b^2 - a = 0$

2. Resuelva las ecuaciones siguientes completando cuadrados:

   a. $x^2 - x - 12 = 0$

   b. $6z^2 + z - 2 = 0$

   c. $x^2 + 5x + 3 = 0$

   d. $x^2 - 2x - 1 = 0$

   e. $x^2 - 8x + 3 = 0$

   f. $x^2 + 7x - 5 = 0$

   g. $4x^2 - 10x + 7 = 0$

   h. $3x^2 + 12x + 5 = 0$

   i. $3x^2 + 5x + 4 = 0$

   j. $5x^2 - 4x + 7 = 0$

3. En la siguiente deducción encuentre el error:

   Si $a = b$ y $a \neq 0$ entonces $a^2 \cdot a = a^2 \cdot b$

   $a^3 = a^2 \cdot b$ restando a cada lado b^3 tenemos,

   $a^3 - b^3 = a^2.b - b^3$ factorizando:

   $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = b(a^2 - b^2)$

   $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = b(a+b)(a-b)$ dividiendo entre $(a-b)$,

   $(a^2 + ab + b^2) = b(a+b)$ como $b = a$, remplazando tenemos:

   $a^2 + a^2 + a^2 = a^2 + a^2$

   $3a^2 = 2a^2$ dividiendo entre a^2

   $3 = 2$ ¡ABSURDO!

4. Halle la ecuación que tenga como solución:

   a. $x = 3$ o $x = -5$ b. $x = 1/2$ o $x = -2/3$

   c. $x = -5$ y con multiplicidad de 2

   d. $x = 2 + \sqrt{2}$ o $x = 2 - \sqrt{2}$

   e. $x = 3$ o $x = -5$ o $x = 1$ f. $x = 2b$ o $x = -\frac{a}{b}$

   g. $x = 1$ con multiplicidad de 2 o $x = -2$

5. Resuelva y compruebe la solución:

   a. $\sqrt{x+2} + \sqrt{9x+7} = 7$ b. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} = -1$

   c. $\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 2$ d. $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+5} = 5$

   e. $\sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{6x}}} = 2$ f. $\sqrt{x - \sqrt{1-x}} + \sqrt{x} = 1$

   g. $\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x+10} + \sqrt{x-1} = 0$

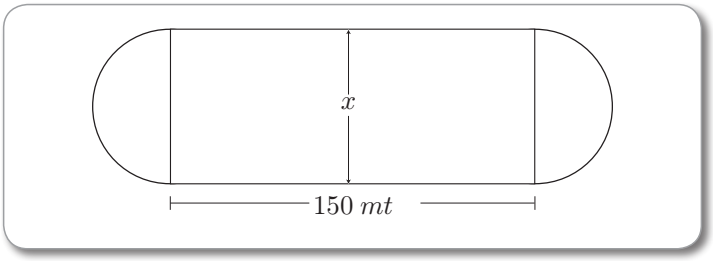
   h. $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} - \sqrt{x+8} = 0$

   i. $\sqrt{x+6} + x - 6 = 0$ j. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x+8} + 1 = 0$

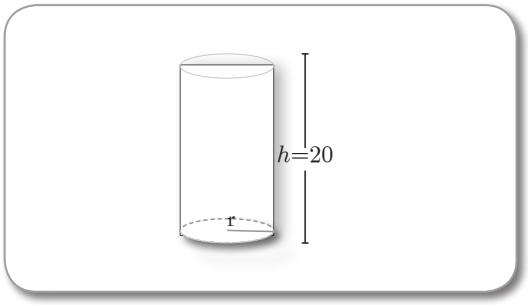
   k. $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} - 2\sqrt{2} = 0$

6. Halle dos números tales que:
   a. Su diferencia sea 8 y la suma de sus cuadrados 544.
   b. Su suma es 17 y su producto excede en 19 a la diferencia de sus cuadrados.
   c. Su suma sea 30 y la de sus cuadrados exceda en 150 al cuadruplo del producto de los números.
   d. Su suma sea 10 y la de sus inversos multiplicativos o recíprocos $\frac{5}{12}$.
   e. Su suma es 14 y la diferencia de sus recíprocos es $-\frac{1}{24}$.
7. Compré cierto número de cuadernos en $20.000, si el precio de cada cuaderno se incrementa en $500 compraría 2 cuadernos menos por el mismo dinero. ¿Cuántos cuadernos compré?

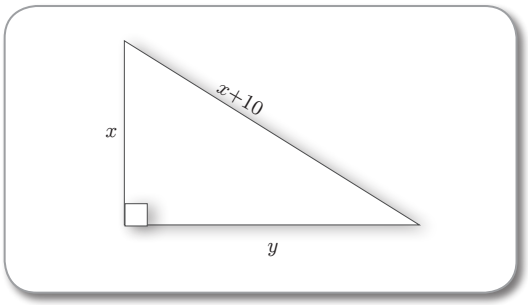
8. Un servicio tiene un costo fijo de $1'200.000; si dos usuarios más toman el servicio, el costo por usuario se reduce en $20.000. Halle el costo por usuario, si los dos usuarios adicionales toman el servicio.
9. Un contrato por $30'000.000 se acuerda entregar en un número de días fijo. Si el contrato se retrasa 10 días, se tiene un sobrecosto de $1'000.000 por cada día de retraso, y el costo promedio diario se incrementa en $50.000. ¿En cuántos días se acordó entregar el contrato?
10. Halle las dimensiones de un rectángulo en el que:
    a. La base mide 4 metros, más que su altura, y el área es de 320 m^2.
    b. La base excede en 3 ms., al doble de su altura y el área es 560 m^2.
    c. La base es el doble de la altura; y, si aumentamos la base en 5 y disminuimos la altura en 2, el área es la misma.
    d. La base excede en 2 m., a su altura, si la altura se disminuye en 2 ms., y la base se reduce a su mitad obtengo un cuadrado cuya área es 32 m^2, menor que la del rectángulo.
11. Se desea construir una caja abierta de base cuadrada, si la altura es de 20 cm y la capacidad es de 12.500 cm^3. Si el cm^2 de la base tiene un costo de $12 y el de las caras laterales es de $10. Halle el costo de la caja.
12. Un lancha que viaja con rapidez constante recorre 120 km., río abajo, gasta 3,5 horas en el viaje de ida y regreso. Si la velocidad de la corriente es de 10 km/h. Halle la rapidez con que viaja la lancha.
13. Si el precio de venta de un lápiz es de $144 y el porcentaje de utilidad sobre el costo es igual al precio de costo. Halle el precio de costo.
14. A tarda 5 horas más que B en realizar un mismo trabajo. Si trabajando juntos tardan 6 horas. ¿En cuánto tiempo hace cada uno el trabajo?
15. A tarda el triple de B en realizar un mismo trabajo. Si trabajando juntos tardan 6 horas. ¿En cuánto tiempo hace cada uno el trabajo?
16. Una pista atlética como se ilustra en la siguiente figura, tiene un perímetro de 800 metros y los lados, rectas que son paralelas, miden 150 metros de largo cada una. Determinar la distancia entre los lados paralelos.



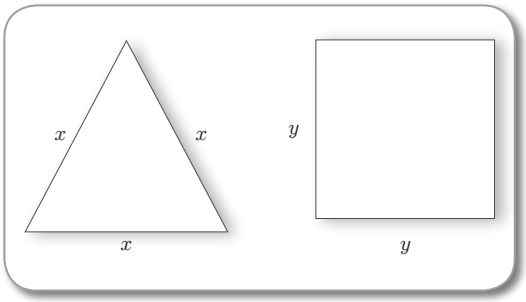
17. Una lata cilíndrica tiene un volumen de 100π cm., y mide 20 cm., de altura. ¿Cuál es el radio de la lata?



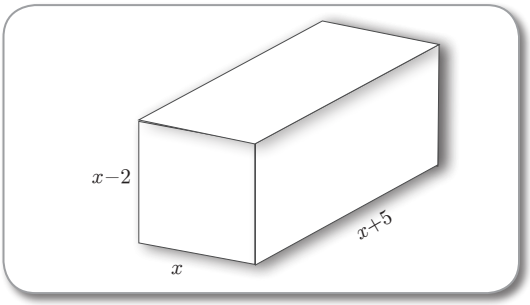
18. Un predio tiene la forma de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es 10 m., más que uno de los catetos como se ilustra en la figura siguiente. Si el perímetro del predio es de 500 m. Determinar la medida de los catetos.



19. Una cuerda de 25 cm., de largo, se corta en dos partes. Con una parte se forma un triángulo equilátero y con la otra parte de la cuerda se forma un cuadrado. Si las dos figuras formadas tienen áreas iguales, ¿cuál es la longitud de cada cuerda?



20. Las dimensiones de una caja: la altura 2 cm., menos que el ancho y el largo 5 cm., más que el ancho. Si el volumen de la caja es de 420 cm^3 ¿cuáles son las medidas de las dimensiones de la caja?

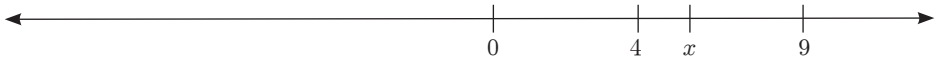


Intervalos

Los números racionales cumplen también los nueve axiomas vistos. Es necesario un axioma que permita introducir los números irracionales **(axioma de completez).**

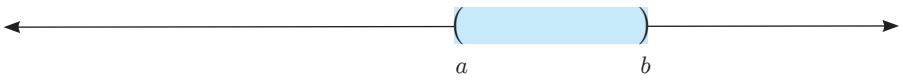
La representación geométrica de los números reales nos permite tener una imagen de:

1. Si está entre dos números reales, por ejemplo 4 y 9, se nota que $4<x<9$, y se representa así:

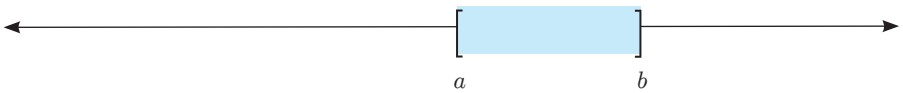


2. De todos los números reales comprendidos entre a y b, que pueden ser:

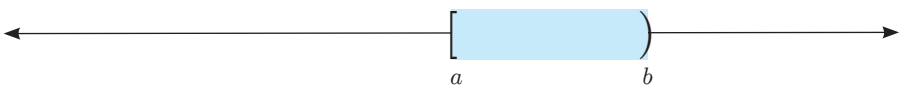
   a. $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$, se denomina un **intervalo abierto.**



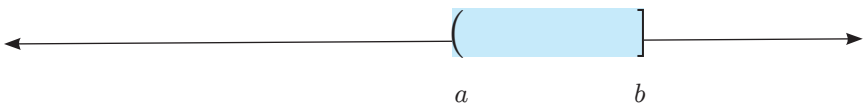
   b. $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x\leq b\}$, se denomina un **intervalo cerrado.**



   c. $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x<b\}$, se denomina un intervalo **cerrado** en a y **abierto** en b.



   d. $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\leq b\}$, se denomina un intervalo **abierto** en a y **cerrado** en b.



Operaciones entre intervalos

Como los intervalos son conjuntos de números reales podemos desarrollar las operaciones entre conjuntos.

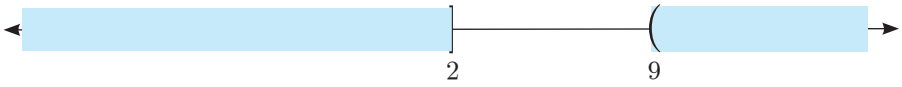
Ejemplo.

Dados A= $(2, 9]$, B= $[5, 11]$, y C= $[11, 18)$.

Hallar A^c ; A∪B ; A∩B; A∩C ; B∩C.

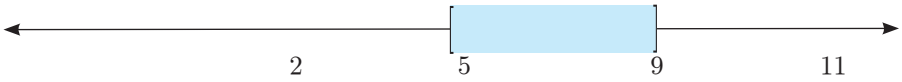
A^c : Como $A = (2,9] = \{x \mid x > 2 \text{ y } x \leq 9\}$ tenemos que:

$$A^c = \{x \leq 2 \text{ o } x > 9\} = (-\infty, 2] \cup (9, \infty)$$



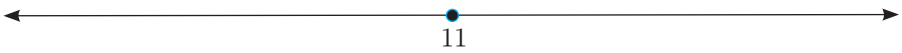
$$A \cup B = \{(2, 9] \cup [5, 11]\} = (2, 11]$$

$$A \cap B = \{(2, 9] \cap [5, 11]\} = [5, 9]$$



$$A \cap C = \{(2, 9] \cap [11, 18)\} = \Phi$$

$$B \cap C = \{[5, 11] \cap [11, 18)\} = \{11\}$$



Ejercicio 3.5

1. Exprese en la notación de intervalos y represente en la recta real los siguientes conjuntos:

   a. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$

   b. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

   c. $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\}$

   d. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10\}$

   e. $\{x \in \mathbb{R} \mid 6 < x \leq 13\}$

   f. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -9\}$

   g. $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 8\}$

   h. $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 2\}$

   i. $\{x \in \mathbb{R} \mid -9 \leq x \leq 9\}$

   j. $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 8\}$

2. Exprese como conjunto los siguientes intervalos.

   a. $(-\infty, 3]$ b. $(-9, -5)$

   c. $[-2, \infty)$ d. $[0, 5)$

   e. $[-2, -7]$ f. $(-5, 5]$

   g. $[5, 5]$ h. $(-\infty, \infty)$

3. En los ejercicios siguientes represente en la recta real la expresión como un intervalo y expréselo en notación de conjuntos.

   a. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5 \text{ o } x \leq -5\}$ b. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{o } x > -2\}$

   c. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 6 \text{ y } x > 1\}$ d. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ y } x > 1\}$

   e. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \text{ o } x > 8\}$ f. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 8 \text{ y } x \leq 4\}$

4. Efectúe:

   a. $[1,2] \cap [-2,3)$ b. $(0,\infty) \cup (-5,0]$

   c. $(-\infty, -1) \cup [-1,\infty)$ d. $(-3,3) \cap (3,7)$

   e. $(-1,1) \cap [-5,6)$ f. $(-\infty,2) \cup (-\infty,8)$

   g. $(-5,3) \cup (-1,5]$ h. $[3,\infty) \cap [-2,\infty)$

5. Represente en la recta real cada uno de los conjuntos siguientes:

   a. $[-1,2)$ b. $(-\infty, -1) \cap (-\infty, -4)$

   c. $[3,10] \cup (7,9)$ d. $(0,5) \cup (2,7)$

   e. $(0,\infty) \cap (2, \infty)$ f. $[3, 9) \cup (9, 12)$

Inecuaciones con una variable

Dados dos polinomios enteros $P(x)$ y $Q(x)$; $P(x) \neq Q(x)$. Es posible que existan valores de x tales que $P(x)>Q(x)$ o $P(x)\geq Q(x)$

Ejemplo

1. $2x-5>x+2$ se cumple para $x>7$

   Si $P(x)>Q(x)$, para algún o algunos valores de x, esta desigualdad se denomina una **inecuación algebraica** con una variable, x.

   Si $P(x)>Q(x)$ sumando el inverso aditivo de $Q(x)$ a ambos lados tenemos:

$P(x)+[-Q(x)]>Q(x)+(-Q(x))$ es decir, $P(x)-Q(x)>0$

es decir, la inecuación $P(x)>Q(x)$ la podemos expresar como:

$P(x)-Q(x)>0$

$P(x)>Q(x)$ si y solo si $P(x)-Q(x)>0$

Si $P(x)-Q(x)>T_n(x)$

$T_n(x)>0$ se denomina una **inecuación con una variable de grado n**

Si $T_n(x)$ está definido en los números reales, resolver la inecuación $T_n(x)>0$, consiste en hallar todos los valores numéricos de la incógnita x, que convierten la inecuación en una desigualdad numérica .

Si el conjunto solución es el conjunto vacío decimos que la inecuación no tiene solución.

Ejemplo

Determinar el conjunto solución de la desigualdad $x^2<0$

Al intentar resolver la desigualdad $x^2<0$, vemos que no existe un número real x distinto de 0, tal que al elevarlo al cuadrado su resultado sea menos que cero o negativo.

Luego el conjunto solución de $x^2<0$ es vacío.

Propiedades de las desigualdades

Sean $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ polinomios que toman valores reales que cumplen las siguientes propiedades de orden en los números reales:

1. Si $P(x)<Q(x)$ y a es cualquier número real, entonces: $P(x)+a<Q(x)+a$.
2. Si $P(x)<Q(x)$ y a es cualquier número real positivo, entonces: $P(x)(a)<Q(x)(a)$.
3. Si $P(x)<Q(x)$ y a es cualquier número real negativo, entonces: $P(x)(a)>Q(x)(a)$.
4. Si $P(x) < Q(x)$ y $P(x) > 0$ y $Q(x) > 0$, entoces : $\frac{1}{P(x)} > \frac{1}{Q(x)}$
5. Si $P(x) < Q(x)$ y $P(x) < 0$ y $Q(x) < 0$, entoces : $\frac{1}{P(x)} < \frac{1}{Q(x)}$

Inecuaciones de primer grado

Resolver la desigualdad $a_1x + a_0 > 0 \quad (a_1 \neq 0)$

$$a_1x + a_0 > 0$$

$$a_1x + a_0 + (-a_0) > 0 + (-a_0)$$

$$a_1x > -a_0$$

Si $a_1 > 0$ entonces, $x > -\frac{a_0}{a_1}$, por lo tanto $x \in \left(-\frac{a_0}{a_1}, \infty\right)$

Si $a_1 < 0$ entonces, $x < -\frac{a_0}{a_1}$, por lo tanto $x \in \left(-\infty, \frac{a_0}{a_1}\right)$

Ejemplos

1. Resolver $2x + 7 > 15$

$$2x + 7 + (-7) > 15 + (-7)$$

$$2x > 8$$

Como $2 > 0$, $\frac{1}{2}.2x > \frac{1}{2}.8$

$$x > 4 \text{ es decir, } x \in (4, \infty)$$

2. Resolver $-2x+9>17$

$$-2x+9+(-9)>17+(-9)$$
$$-2x>8$$

Como $-1/2<0$ entonces $-\frac{1}{2}.(-2x)<-\frac{1}{2}.8$

$$x<-4 \text{ es decir, } x\in(-\infty,-4)$$

3. Resolver $-3x+7>0$ y $5x+7>0$

$$-3x+7>0 \text{ y } 5x+7\geq 0$$
$$x<7/3 \text{ y } x\geq -7/5$$
$$x\in[(-\infty,7/3)\cap[-7/5,\infty)]=[-7/5,7/3)$$

Inecuaciones de segundo grado

Resolver $ax^2+bx+c>0$

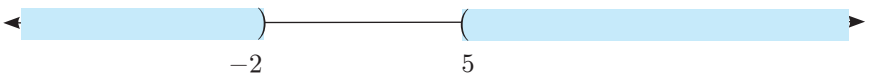
a. Si ax^2+bx+c se puede factorizar en los enteros.

Ejemplo

1. Resolver $x^2-3x-10>0$
$(x-5)(x+2)>0$

Como tenemos dos factores, $x-5$ y $x+2$ para que su producto sea positivo o mayor que cero es necesario que: o ambos factores sean positivos o ambos factores sean negativos, es decir:

$$(x-5>0 \text{ y } x+2>0) \text{ o } (x-5<0 \text{ y } x+2<0)$$
$$(x>5 \text{ y } x>-2) \text{ o } (x<5 \text{ y } x<-2)$$



$$x\in(5,\infty) \quad \text{o} \quad x\in(-\infty,-2)$$

$$x\in[(-\infty,-2)\cup(5,\infty)]$$

Existe un método, **el método gráfico**, que consiste en determinar el intervalo para el cual, cada uno de los factores es positivo; el complemento de este intervalo desde luego, corresponde al intervalo en el que el factor es negativo, veamos:

Ejemplo

2. Resolver: $x^2 - 3x - 10 > 0$

$$(x-5)(x+2) > 0$$

¿Cuándo $x - 5 > 0$?

Si $x - 5 > 0$ entonces $x > 5$

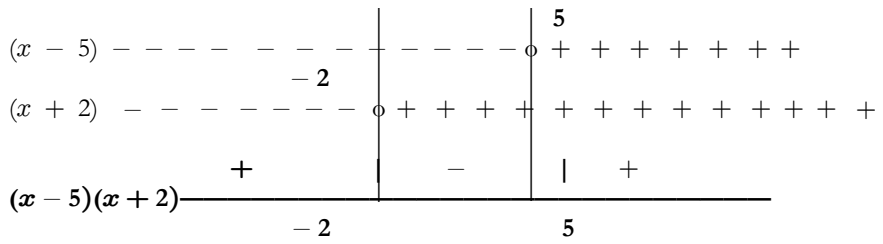
Es decir, $x + 5$ es positivo cuando $x > 5$

¿Cuándo $x + 2 > 0$?

Si $x + 2 > 0$ entonces $x > -2$

Es decir, $x + 2$ es positivo cuando $x > -2$

Graficando tenemos:


5
(x − 5) − − −

Ejemplos

1. $x^2 + 4 > 0$ se cumple para cualquier número real.

2. $-x^2 + 6x > 10$ no tiene solución en los reales.

Podemos generalizar a inecuaciones de grado n, cocientes de polinomios, siempre que sea posible obtener sus raíces.

3. Resolver $\frac{7-x}{x^2-9} \geq 0 \Rightarrow \frac{7-x}{(x+3)(x-3)} \geq 0$

   ¿Cuándo $7 - x > 0$?

   Si $7 - x > 0$ tenemos que $-x > -7$ por lo tanto $x < 7$

   Es decir, $7-x$ es positivo cuando $x < 7$

   ¿Cuándo, $x + 3 > 0$?

   Si $x + 3 > 0$ entonces $x > -3$

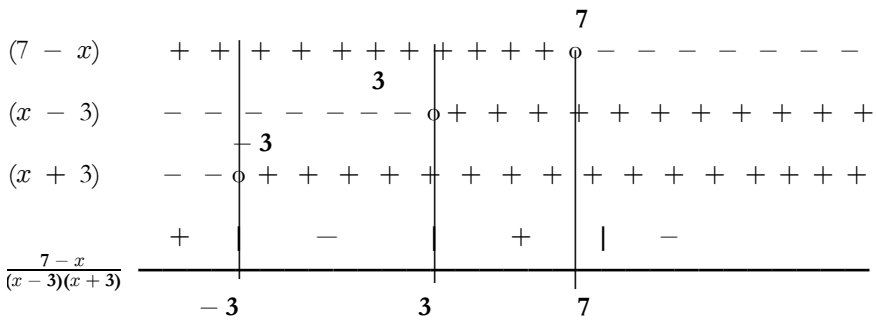
   Es decir, $x + 3$ es positivo cuando $x > -3$

   ¿Cuándo $x - 3 > 0$?

   Si $x-3>0$ entonces $x>3$

   Es decir, $x - 3$ es positivo $x > 3$ cuando 3.

   Graficando tenemos:



Solución: $x \in \{(-\infty, -3) \cup (3,7)]\}$

Ejercicio 3.6

1. Resuelva:

   a. $3x - 8 \leq 13$

   b. $\frac{4}{x} < \frac{3}{5}$

   c. $-2x + \frac{7}{3} < 4 + x$

   d. $\frac{8}{3}x + \frac{7-x}{2} < -1$

   e. $2x - 6 < \frac{3x+8}{5}$

   f. $x - 8 \leq \frac{3x}{4} + \frac{2-x}{5}$

   g. $2x + \frac{6-3x}{4} < 4$

   h. $3x + 8 \geq \frac{3x+2}{4} + \frac{2-x}{5}$

2. Resuelva:

   a. $2x < 10$ y $6 - x < 3$

   b. $6x + 1 > 9 - 2x$ y $x > 9 - 2x$

   c. $2x - 1 > 7 - 2x$ o $2x < -4$

   d. $\Big(2x + 4 < 0$ o $5x > 20\Big)$ y $\Big(x > -5$ y $3x - 17 < 4\Big)$

3. Resuelva:

   a. $(x + 7)(x - 2) \geq 0$

   b. $(2x - 9)(x + 1) < 0$

   c. $(5x - 6)(2x + 1) > 0$

   d. $(\frac{2x}{5} - 1)(3x + 5) \leq 0$

   e. $x(x + 8) \geq 0$

   f. $x\,(7 - 2x) < 0$

   g. $8x(3x - 2) \geq 0$

   h. $x^2 - 4x - 21 < 0$

   i. $(5x - 7)^2 > 0$

   j. $x^2 + 7x < 8$

   k. $x^2 - 3x - 5 < 5$

   l. $6x^2 - 5x - 1 > 5$

   m. $(4 - x)(2x + 5) \geq 0$

   n. $(-4x + 5)(-x - 3) < 0$

   o. $x^3 - x < 0$

   p. $x^4 - 3x^3 + 2x^2 > 0$

   q. $\frac{1}{x} < x$

   r. $x + \frac{1}{x} \geq 1$

   s. $(-x + 1)(x - 2)(x + 3) > 0$

   t. $(2x - 7)(2 - 3x)(4x - 3) \leq 0$

4. Resuelva:

a. $\frac{x+3}{x-8} > 0$

b. $\frac{x-3}{x+7} \geq 0$

c. $\frac{2x-5}{3x} \leq 0$

d. $\frac{x-10}{x+8} \leq 2$

e. $\frac{2x+3}{x-1} \leq 1$

f. $\frac{(x-2)(x+4)}{x+10} \geq 0$

g. $\frac{x-1}{x+2} < 1$

h. $\frac{x+1}{x} > 0$

i. $\frac{(x+4)(x-1)}{3x-4} \geq 1$

j. $\frac{(x+1)^2}{x} > 0$

k. $\frac{2-x}{x+1} < \frac{3}{2}$

l. $\frac{x}{3-x} < 2$

m. $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$

5. Resuelva:

a. $\frac{x-2}{x+1} < 3$ y $\frac{3-x}{x-2} < 5$

b. $\frac{2}{x-1} < 4$ y $\frac{3x}{x-2} \geq 7$

c. $\frac{x+2}{x-1} < 7$ o $\frac{3x}{x-2} \geq 7$

d. $\frac{2x+6}{3} - \frac{x}{4} < 5$ y
$15 - 3x < 4 + 2x$

e. $x(3x-1) - (3x-2)(x+1) > 2$ y
$x(2x-1) - (x+4)(2x+3) \leq 0$

f. $2x(x-4) - (x-5)(2x+1) > 1$ y
$3x(x+3) - (x+4)(3x-2) > 1$

g. $x(2x+3) - (2x-1)(x+1) \geq 3$ y
$x(x-1) - (2x+3)(2x-3) \geq 5$

h. $5(x-2) < 6(2x-3) - 13$ y
$6 + 4(x-6) \geq 3(2x-5)$

6. Encuentre el conjunto solución de cada una de las desigualdades siguientes:

   a. $x + 3 \leq 4$

   b. $2x + 6 \geq x - 2$

   c. $7 + 3(2 - 7x) < 3 - 2(10x - 6)$

   d. $2x(x - 1) \geq (2x + 1)(x - 2)$

   e. $8x(x-2) + 19x \leq (4x+3)(2x-1)$

   f. $2x + 2x(x-8) > (2x-1)(x-7)$

   g. $(x-4)(x+2) \leq 3 - x(1-x)$

   h. $(2x+1)(x-2) - 2x(x-3) > 2x$

   i. $(3x-1)(x+1) - (3x+2)(x-3) \geq 8x$

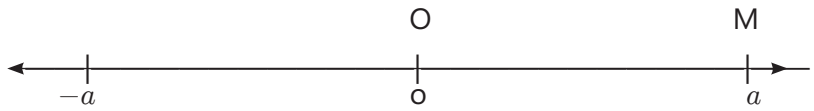
   j. $(2x-3)^2 - (2x+1)^2 \leq 5 - 17x$

Inecuaciones con valor absoluto

Valor absoluto

En los 10 axiomas vistos se hace referencia a las características algebraicas de los números reales. Otro concepto importante es el de distancia.

Como geométricamente la representación de los números reales se hace por puntos de una recta, eligiendo un punto O para representar el cero y otro a la derecha del cero para representar el 1, esta elección determina la **escala** y de acuerdo con esta escala, dado un punto M le asignamos el número real a, si a es positivo el número real que le corresponde geométricamente mide la longitud del segmento OM y la distancia entre O y M. Observe que la distancia entre 0 y a es la misma que entre 0 y $-a$; este hecho geométrico sugiere la siguiente definición:



Definición: si a es un número real, el valor absoluto de a que se nota $|a|$ y se define como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Propiedades

1. $|x|=|-x|$

Ejemplo

1. $|7|=|-7|=7$
2. Hallar x si, $|2x-7|=5$

Si, $|2x-7|=5$ esto significa que, $2x-7=5$ ó $2x-7=-5$

Sumando a cada lado $+7$ tenemos: $2x=12$ ó $2x=2$

Multiplicando a cada lado por 1/2: $x=6$ ó $x=1$

3. Como $-(x-y)=y-x$, tenemos que:

1. $|x-y|=|y-x|$

Geométricamente significa que la distancia entre x e y, es igual a la distancia entre y y x.

2. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

Ejemplo

$$|(-5)\times 7| = |(-5)|\times|7|$$
$$|-35| = 5\times 7$$
$$35 = 35$$

---

3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$

Ejemplo

$$\left|\frac{-12}{4}\right| = \frac{|-12|}{|4|}$$
$$|-3| = \frac{12}{4}$$
$$3 = 3$$

---

4. $|x+y| \leq |x| + |y|$ **Desigualdad triangular**

Ejemplo

$$|7+(-4)| \leq |7| + |(-4)|$$
$$|3| \leq 7+4$$
$$3 \leq 11$$

5. Para $a>0$, $|x|<a$ significa que, $-a<x<a$, es decir, $x\in(-a,a)$

Ejemplo

1. Hallar los valores de x que cumplan $|2x-3| < 9$

   Esto es que: $|2x-3| < 9$, equivale a:

   $2x-3 > -9$ y $2x-3<9$

   $2x > -6$ y $2x < 12$

   $x > -3$ y $x < 6$

   $x \in [(-3,\infty) \cap (-\infty, 6)]$

   $x \in (-3, 6)$

Presentando las desigualdades simultáneas y resolviéndolas tenemos que:

$$|2x - 3| < 9 \quad \text{equivale a:}$$
$$-9 < 2x - 3 < 9$$
$$-9 + 3 < 2x < 9 + 3$$
$$-6 < 2x < 12$$
$$-3 < x < 6$$

entonces: $x \in (-3, 6)$

2. Hallar los valores de x tales, que $|5 - 4x| \leq 25$
Como $|x|=|-x|$, tenemos que $|5-4x|=|4x-5|$; por lo tanto, $|4x - 5| \leq 25$ significa que:

$$-25 \leq 4x - 5 \leq 25$$
$$-20 \leq 4x \leq 30$$
$$-5 \leq x \leq 7{,}5$$
$$x \in [-5, 7.5]$$

---

6. Para $a>0$, $|x|>a$ significa $x > a$ o $x <-a$, es decir, $x\in[(-\infty, -a)\cup(a,\infty)]$

3. Hallar los valores de x tales, que $|3x - 7|> 8$ significa que:

$3x - 7 < -8$ o $3x - 7 > 8$, resolviendo tenemos:

$$x < -1/3 \quad \text{o} \quad x > 5$$
$$x \in [(-\infty, -1/3) \cup (5, \infty)]$$

Ejercicio 3.7

1. Encuentra los valores de las siguientes expresiones:

   a. $|8| + |-3|$

   b. $|-9|.|3|$

   c. $|-4| + |-5|$

   d. $|-4| - |-5|$

   e. $|-6| - |8|$

   f. $|-8|.|8|$

   g. $|3|.|-4|$

   h. $|-9| \cdot |-8|$

   i. $\dfrac{|-8|}{|4|}$

   j. $\dfrac{|-24|}{|6|}$

   k. $\dfrac{|360|}{|-12|}$

   l. $\dfrac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|}{\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|}$

   m. $\dfrac{\left|\frac{a}{b}\right|}{\left|-\frac{b}{a}\right|}$, a $\neq 0$, b $\neq 0$

   n. $\dfrac{|-6-12|}{|6+3|}$

   o. $\dfrac{|6|.|-9|}{|3|}$

2. Halle los valores de tales que:

   a. $|x-3| = 2$

   b. $|x-3| = 12$

   c. $|3x+1| = 3$

   d. $|x+1| = 5$

   e. $|2x+7| = 9$

   f. $|3x-6| = 18$

   g. $|12x+5| = 13$

   h. $|8x+7| = 6$

   i. $|3x+2| = 5$

   j. $|2x+1| = 3$

   k. $|-3x+6| = |7+(-4)| \times |(-2)|$

3. Halle los valores de tales que:

a. $|x-3| > 2$ b. $|x-3| < 2$

c. $|x+1| < 5$ d. $|x+1| > 5$

e. $|2x+7| < 9$ f. $|3x-6| \geq 18$

g. $|12x+5| \leq 13$ h. $|8x+7| > 6$

i. $|3x+2| \geq 5$ j. $|2x+1| \leq 3$

k. $|(2x-5)/3| \leq |2(|-3+7|)|$

Consideraremos inecuaciones con valor absoluto de polinomios o cocientes de polinomios. Para su solución tenemos en cuenta las propiedades del valor absoluto de números reales.

$|P(x)| < a$ significa que $-a < P(x) < a$, es decir $P(x) > -a$ y $P(x) < a$

Ejemplo

1. Resolver: $|2x-5| < 7$

$|2x-5| < 7$ significa que:

$$-7 < 2x-5 < 7$$
$$-7+5 < 2x < 7+5$$
$$-2 < 2x < 12$$
$$-1 < x < 6$$
$$x \in (-1,6)$$

2. Resolver: $|7-3x| \geq 8$

$|7-3x| \geq 8$ significa que:

$$7-3x \geq 8 \quad \text{o} \quad 7-3x \leq -8$$
$$-3x \geq 8-7 \quad \text{o} \quad -3x \leq -8-7$$
$$-3x \geq 1 \quad \text{o} \quad -3x \leq -15$$
$$3x \geq -1 \quad \text{o} \quad 3x \leq 15$$
$$x \geq -\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x \leq 15$$

$$x \in [(-\infty, -\tfrac{1}{3}] \cup [5\infty)]$$

Ejercicio 3.8

1. Resuelva y exprese la solución en forma de intervalo:

a. $|x-3|<2$

b. $|2x+5|<3$

c. $|3-7x| \leq 6$

d. $|12+5x| \leq 1$

e. $x \leq |x|$

f. $|x| \leq x$

g. $|x-2|<|5-x|$

h. $|x-2|<x$

i. $\left|\frac{x+1}{3x-2}\right|<5$

j. $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right|<4$

k. $|x+3| \leq |2x-6|$

l. $|3-2x| \leq |x+4|$

m. $\left|\frac{x+3}{6-5x}\right| \leq 2$

n. $\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3$

o. $|12x-3|>3$

p. $|3x-\frac{1}{4}|>12$

q. $|\frac{x}{2}-3| \leq 3x-2$

r. $|\frac{x-1}{x-3}| \geq 1$

s. $|\frac{x+3}{x+1}|>1$

t. $|\frac{2x-1}{1-3x}|>5$

u. $|\frac{x-2}{2-x}| \geq \frac{1}{2}$

v. $|x+\frac{1}{x}| \geq 1$

w. $|x-2| \geq |2-x|$

x. $|\frac{2x+1}{3}| \geq 5$

y. $|\frac{x}{5}-\frac{1}{4}|>1$

z. $|\frac{3x-8}{2x-4}| \leq |\frac{x+5}{6x+1}|$

Problemas de aplicación

1. El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce, a $60.000 cada artículo. Gasta $40.000 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo, y tiene costos fijos de $3'000.000 a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos $1'000.000 a la semana.

Solución

Sea x el número de artículos producidos y vendidos a la semana. El costo total de producir x unidades es de \$3'000.000 más \$40.000 por artículo, es decir:

Costo total $= (40.000x + 3'000.000)$

El ingreso obtenido por vender x unidades a \$60.000 cada una es de $60.000x$.

$$\begin{aligned} \text{Utilidad} &= \text{Ingreso} - \text{Total costo total} \\ &= 60.000x - (40.000x + 3'000.000) \\ &= 20.000x - 3'000.000 \end{aligned}$$

Como deseamos obtener una ganancia al menos de \$1'000.000 al mes, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} 20.000x - 3'000.000 &\geq 1'000.000 \\ 20.000x &\geq 4'000.000 \\ x &\geq 200 \end{aligned}$$

En consecuencia, el fabricante deberá producir y vender al menos 200 unidades cada semana.

2. El administrador de una fábrica debe decidir si deberán producir sus propios empaques que la empresa ha estado adquiriendo a proveedores externos a \$1.100 cada uno. La fabricación de los empaques incrementaría los costos generales de la empresa en \$800.000 al mes y el costo de material y de mano de obra, es de \$600 por cada empaque. ¿Cuántos empaques deberá emplear la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?

Solución

Sea x el número de empaques utilizados por la empresa al mes. El costo de adquirir empaques a \$1.100 cada uno es $1.100x$.

Como el costo de fabricar x empaques es de \$600 cada uno, y los costos fijos para su fabricación son de \$800.000 al mes, el costo total de fabricación es: $600x + 800.000$

Para justificar la fabricación de los empaques en la empresa misma, se debe cumplir que el costo de fabricación en la empresa sea menor que el costo de adquisición a proveedores, es decir,

$$\begin{aligned} 1.100x &> 600x + 800.000 \\ 1.100x - 600x &> 800.000 \\ 500x &> 800.000 \\ x &> 1.600 \end{aligned}$$

En consecuencia, la empresa debe requerir al menos 1.601 empaques al mes para justificar su fabricación.

3. La edición de una revista mensual tiene un costo de $6.050 cada una. El ingreso por ventas es de $7.000 por ejemplar. Si se venden más de 20.000 revistas, por cada revista adicional a las 20.000, recibe $1.050 por publicidad.

   ¿Cuántos ejemplares deberá publicar y vender al mes para asegurar una utilidad por lo menos de $40'000.000?

   Solución

   Sea x el número de revistas producidas y vendidas, como la utilidad por revista es $7.000 - 6.050 = 950$ si se venden hasta 20.000 revistas, es decir si se venden 20.000 revistas la utilidad es de 19 millones, como se quiere asegurar una utilidad de por lo menos $40'000.000, tenemos que :

$$x > 20.000$$

$$\begin{aligned} \text{Ingreso total} &= 7.000x + 1.050(x - 20.000) \\ &= 8.050x - 21'000.000 \end{aligned}$$

$$\text{Costo total} = 6.050x$$

Utilidad = Ingreso total − Costo total; por lo tanto:

$$(8.050x - 21'000.000) - 6.050x > 40'000.000$$

$$2.000x > 61'000.000$$

$$x > 30.500$$

Se deben vender al menos 30.501 revistas al mes para asegurar una utilidad que sobrepase los $40'000.000.

Ejercicio 3.9

1. Un fabricante puede vender todas las unidades de un artículo que produce a $7.600 cada una. Si tiene unos costos fijos de $4'700.000 y unos costos variables por unidad de $4.400. ¿Cuántos artículos debe producir para obtener utilidad?
2. El costo C de producir x artículos, incluyendo los costos fijos y los costos variables, está dado por la fórmula $C = 20x + 16.000$. ¿Cuántos artículos se pueden producir si el costo debe ser menor que $17.100?
3. Una compañía vende un producto al precio unitario $p = 600 - 0{,}5x$ pesos, donde x es el número de unidades del producto vendido. ¿Cuántas unidades se deben vender para que el ingreso por la venta de este producto sea mayor que $100.000?
4. Un fabricante de estilógrafos puede vender todas las unidades que produce a un precio de $15.000 cada uno. Tiene costos fijos a la semana de $1'500.000 y costos por unidades de $10.000 en materiales y mano de obra. Determine el número de estilógrafos que deberá fabricar y vender cada semana con el propósito de obtener una utilidad semanal mínima de $1'000.000.
5. El costo de publicar cada ejemplar de un periódico semanal es de $350. Los ingresos del representante de ventas son de $300 por ejemplar y los ingresos de publicidad corresponden al 40% de los ingresos obtenidos por ventas que excedan los 200.000 ejemplares. ¿Cuántos periódicos se deberán publicar cada semana para obtener utilidades semanales de al menos $1'000.000?
6. El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce a un precio de $12.000 cada artículo. Gasta $8.000 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo y tiene costos fijos de $6'000.000 a la semana en la operación de la fábrica. Encuentre el número de unidades que deberá producir y vender para obtener una utilidad de al menos $2'000.000 a la semana.
7. Una firma industrial fabrica un producto con precio unitario de venta de $16.000 y un costo unitario de $12.000. Si los costos fijos son de $48'000.000, determine el número mínimo de unidades que se deben vender para que la compañía obtenga utilidad.

8. Para fabricar una unidad de un producto, una compañía determina que el costo de los materiales es de $2.000 y el costo de la mano de obra es de $3.200. Los costos fijos son de $4'000.000. Si el precio al por mayor es de $5.920 por unidad, determine el número de unidades que debe vender la compañía para obtener utilidad.
9. Una empresa invierte un total de $24.000.000 a dos tasas anuales de interés: al 10% y al 13,5%. Desea obtener un rendimiento anual no inferior al 13%. ¿Cuál es la cantidad mínima de dinero que debe invertir a la tasa del 13,5%?
10. El costo de publicación de cada ejemplar de una revista es de $5.200. Se vende a los distribuidores a $4.800 cada una y el ingreso que recibe por publicidad es el 20% de la cantidad que recibiría por todos los ejemplares que publique, arriba de un tiraje de 10.000 revistas. Determine el número mínimo de ejemplares que pueden publicarse sin pérdidas, es decir que exista utilidad.

Ecuaciones con dos o más incógnitas

Hasta ahora hemos estudiado ecuaciones con una incógnita, de primer grado, segundo grado y en general de grado n, en este punto surge de manera natural, cómo interpretar y resolver ecuaciones con dos o más incógnitas.

Ejemplo

$$x + 2y = 7;\ x + y - z = 9;\ 2x^2 - 3x - y = 1;\ x + 2y - z = 7$$

Para contestar esta pregunta inicialmente consideremos ecuaciones con dos incógnitas, por ejemplo $x + 2y = 7$.

En esta ecuación, como el mayor grado de las incógnitas es uno, la denominaremos en principio **una ecuación de primer grado con dos incógnitas**.

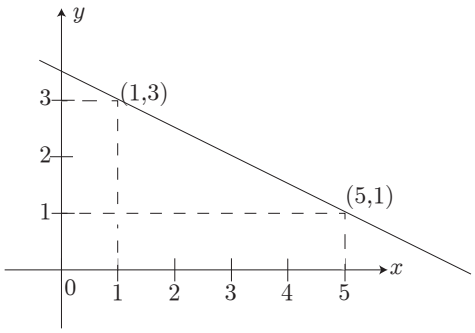
Para resolver la ecuación observemos que cada vez que le asignamos **arbitrariamente** un valor real a x, por ejemplo $x = 3$, obtenemos una ecuación con una incógnita $3 + 2y = 7$ y por lo tanto, una solución para la ecuación, en este caso, $x = 3$ y $y = 2$, de manera análoga, si asignamos un valor arbitrario a y, por ejemplo $y = -3$ también obtenemos una ecuación con una incógnita, y una solución para la ecuación que es: $x = 13$ y $y = -3$.

En general, dados los valores de x o de y, podemos obtener infinitos pares de valores que son solución de la ecuación.

Geométricamente una ecuación de primer grado con dos incógnitas, su representación en el plano de coordenadas cartesianas corresponde a una línea recta, veamos:

$y = \frac{7-x}{2}$

x	1	2	3	5	-1	$\frac{7}{2}$
y	3	$\frac{5}{2}$	2	1	4	$\frac{7}{4}$



NOTA: dos puntos determinan una única recta, es suficiente tabular únicamente dos puntos.

Definición
Las ecuaciones de la forma $ax + by + c = 0$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$ y a, $b \neq 0$, se denominan **ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

La ecuación $ax + by + c = 0$ la podemos expresar de diferentes maneras:

Ejemplo

$$y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{b},\ x = \frac{b}{a}y - \frac{c}{a},\qquad ax + by = -c$$

Definición
Dada la ecuación lineal $ax + by + c = 0$, se dice que la pareja (x_1,y_1) es una solución de la ecuación, si al reemplazar$x$ por x_1 y y por y_1 se satisface la igualdad.

Ejemplo

Sean las ecuaciones $2x + 5y = 9$, la pareja ordenada (2,1), es la solución de esta ecuación, porque al reemplazar x por 2 y y por 1 se tiene que: 2(2)+5(1)= 9 y por tanto, $9 = 9$.

Definición
Dos ecuaciones $a_1x + b_1y = c_1$ y $a_2x + b_2y = c_2$ se denominan **equivalentes** si existe un número real $k \neq 0$ tal que: $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1$ y $c_2 = kc_1$ por lo tanto, si (α,β) es una solución de $a_1x + b_1y = c_1$ entonces: (α,β) es una solución de $a_2x + b_2y = c_2$ ya que $a_2a + b_2b = ka_1 + kb_2 = k(a_1a + b_1b) = kc_1 = c_2$.

En forma análoga se puede ver que si (δ,ϕ) es solución de $a_2x + b_2y = c_2$ entonces también lo es $a_1x + b_1y = c_1$.

Ejemplo

La ecuación $4x + 2y = 3$ es **equivalente** a la ecuación $8x + 4y = 6$ porque $8 = 2(4)$, $4 = 2(2)$ y $6 = 2(3)$. Cualquier solución para $x + 2y = 3$, por ejemplo $x = 1$ y $y = 1$ es solución para $2x + 4y = 6$, veamos: 2(1)+4(1)=6.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y consideradas simultáneamente, determinan un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, el cual se expresa:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Casos

Geométricamente corresponde al considerar dos rectas en un mismo plano. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se pueden presentar los siguientes casos:

1. **Que las ecuaciones sean equivalentes**. Es decir, que cualquier solución para una de las ecuaciones, lo es para la otra; esto significa que podemos reducir el sistema de ecuaciones a cualesquiera de las dos ecuaciones del sistema, y por lo tanto, se tienen **infinitas soluciones**; geométricamente significan que la rectas coinciden.

Ejemplo

Resolver el sistema:
$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 3 \\ 6x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

Como x, y toman valores reales, por propiedades de los números reales si multiplicamos a ambos lados de la ecuación $3x+2y=3$ por 2, obtenemos una **ecuación equivalente**, que es precisamente la ecuación $6x+4y=6$, o sea, el sistema se reduce a una de estas ecuaciones y tiene infinitas soluciones**.**

2. **Que el sistema no tenga solución**. Cuando se tiene un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \ \text{ con } \ c_1 \neq c_2 \end{aligned}$$

El sistema no tiene solución porque geométricamente significa que las rectas son paralelas. Cuando el sistema no tiene solución se denomina inconsistente.

Ejemplo

Consideremos el sistema:
$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ 2x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de los números reales; si sumamos o restamos miembro a miembro dos igualdades obtenemos otra igualdad, en este caso:

$$\begin{array}{rr} -\ 2x - 5y = & -1 \\ 2x + 5y = & 2 \\ \hline 0 = & 1 \end{array}$$ **ABSURDO**

Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Definición
Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, si el sistema no tiene solución o tiene infinitas soluciones decimos que el sistema es **incompatible.**

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \ \text{ con } \ c_1 \neq c_2 \end{array}$$

Es inconsistente si existe un número real l, con $k \neq 0$ tal que:

$$a_1x + b_1y = k(\, a_2x + b_2y).$$

3. **Que no sea incompatible**, es decir, que el sistema tenga al menos una solución. En este caso, se dice que las ecuaciones son independiente y el sistema se denomina **compatible**.

   Geométricamente, corresponde a dos rectas que se intersectan en un único punto; algebraicamente, significa que dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas si es compatible, este tiene una solución única.

Ejemplo

Resolver el sistema: $\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{array}$

Sumando miembro a miembro las dos desigualdades obtenemos:

$$\begin{array}{rr} x + y = & 3 \\ x - y = & 7 \\ \hline 2x \quad = & 10 \end{array}$$

Luego $x=5$, reemplazando $x=5$ en cualesquiera de las dos ecuaciones del sistema, obtenemos $y=-2$, por lo tanto, la solución del sistema es $x=5$ y $y=-2$.

Ejercicio 3.10

1. En cada una de las siguientes ecuaciones; dados $x = 0$, $x = 3$ y $y = 5$ encuentre el valor de y, localice estos puntos en el plano cartesiano y represente significativamente la ecuación:

   a. $2x + y = 3$ b. $-3x + 2y = 5$

   c. $3x - y + 5 = 0$ d. $y = (3x - 1)/2$

2. Encuentre las soluciones enteras positivas de la ecuación:

   a. $2x - y = 5$ b. $x + y = 4$

   c. $2x + 3y - 7 = 0$ d. $x - y = 0$

3. Halle la intersección con los ejes y represente gráficamente cada una de las siguientes ecuaciones:

   a. $5x + 2y = 5$ b. $3x + 4y - 1 = 0$

   c. $7x + 2y = 0$ d. $x = 2(5y - 4)$

4. De cuántas maneras se pueden pagar \$2.000 con monedas de:

   a \$200 y \$100 b \$500 y \$100

   c. \$500 y \$200

5. Encontrar dos números, x el mayor y el menor; tales que:

   a. Su suma sea 300 y su diferencia 80.

   b. Sumen 400 y el mayor sea 4 veces el menor.

   c. Su diferencia es 20 y el doble del mayor y el menor sumen 130.

6. Determine si el sistema dado es compatible, y si lo es, intente resolverlo utilizando propiedades de los números reales.

a. $\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} x + 4y &= 7 \\ 2x + 4y &= 1 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} 2x - 3y &= 9 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$

d. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 0 \\ y &= 2x \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} y &= 4x - 2 \\ y &= 7x + 16 \end{aligned}$

f. $\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ 4x - 2y &= 1 \end{aligned}$

g. $\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}$

h. $\begin{aligned} y &= (-x + 77)/4 \\ 2x + 8y - 14 &= 0 \end{aligned}$

i. $\begin{aligned} 2x - 3y &= -2 \\ 3x + 4y &= 14 \end{aligned}$

Métodos de solución

Para hallar la solución única de un sistema compatible de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, existen diferentes procedimiento algorítimicos que básicamente consisten en:

- Aplicar propiedades de los números reales para reducir el sistema a una ecuación con una incógnita.
- Resolver la ecuación con una incógnita, y reemplazar la solución de esta ecuación en cualquiera de las ecuaciones del sistema o sus equivalentes para hallar el valor de la otra incógnita.
- Los procedimientos más comúnes son:

1. Por igualación

Despejando la misma incógnita en cada una de las ecuaciones e igualándolas (propiedad transitiva de la igualdad), el sistema se reduce a una ecuación con una incógnita.

Ejemplo

Resolver el sistema $\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \quad (1) \\ 4x - 5y &= -4 \quad (2) \end{aligned}$

Despejamos una de las incógnitas en las dos ecuaciones, por ejemplo x.

En $2x + 3y = 9 \quad x = \frac{9-3y}{2}$ y en $4x - 5y = -4, \quad x = \frac{-4+5y}{4}$

Igualando tenemos $x = \frac{9-3y}{2} = \frac{-4+5y}{4}$ (una ecuación con una incógnita).

$$\begin{aligned} 4(9-3y) &= 2(-4+5y) \\ 36-12y &= -8+10y \\ -12y-10y &= -8-36 \\ -22y &= -44 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Para hallar el valor de x reemplazamos $y=2$ en cualesquiera de las ecuaciones del sistema $2x+3y=9$, $4x-5y$ o de las ecuaciones equivalentes.

$x = \frac{9-3y}{2}$, $x = \frac{4+5y}{4}$, por ejemplo en $x = \frac{9-3y}{2}$

$x = \frac{9-3(2)}{2} = \frac{3}{2}$, la solución del sistema es $x = \frac{3}{2}, \quad y = 2.$

Una vez resuelta la ecuación es recomendable verificar si la solución es correcta.

Para el ejemplo que estamos considerando, reemplazando $x = \frac{3}{2}$ e $y = 2$ en las ecuaciones tenemos:

$$2\left(\frac{3}{2}\right) + 3(2) = 3 + 6 = 9 \text{ y } 4\left(\frac{3}{2}\right) - 5(2) = 6 - 10 = -4$$

Como se cumplen las igualdades, $x = \frac{3}{2}$ y $y = 2$ es la solución.

---

2. Por sustitución

Despejando una de las incógnitas en una de las ecuaciones obtenemos una expresión para la incógnita, reemplazando o **sustituyendo** la incógnita por esta expresión en la otra ecuación, (propiedad transitiva de la igualdad), el sistema se reduce a una ecuación con una incógnita.

Ejemplo

Resolver el sistema $\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ 4x - 5y &= -4 \end{aligned}$

Despejando x en: $2x + 3y = 9 \quad x = \frac{9-3y}{2}$

y reemplazando esta expresión x de , en la otra ecuación tenemos:

$4\left(\frac{9-3y}{2}\right) - 5y = -4$ (una ecuación con una incógnita)

$$\begin{aligned} 2(9 - 3y) - 5y &= -4 \\ 18 - 6y - 5y &= -4 \\ -11y &= -4 - 18 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Reemplazando en $y{=}2$ en $x = \frac{9-3y}{2}$, tenemos que:

$x = \frac{9-3(2)}{2} = \frac{3}{2}$

3. Por suma y resta (reducción)

Si multiplicamos una ecuación por un mismo número real en cada uno de sus miembros, obtenemos una ecuación equivalente; esta propiedad permite transformar un sistema de ecuaciones en un sistema equivalente de tal manera que, los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales, y restando miembro a miembro las dos igualdades (propiedad de los números reales), el sistema se reduce a una ecuación con una incógnita.

Ejemplo

Resolver el sistema $\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \quad (1) \\ 4x - 5y &= -4 \quad (2) \end{aligned}$

Observe que si multiplicamos la ecuación (1) por (2), en la ecuación equivalente que resulta, $4x - 5y = -4$ el coeficiente de x es igual al de la ecuación (2), si restamos las dos igualdades tenemos:

$$\begin{array}{rl} 4x + 6y &= 18 \\ -\,4x + 5y &= \;\;4 \\ \hline 11y &= 22 \\ y &= \;\;2 \end{array}$$ (Ecuación de primer grado)

Reemplazando $y{=}2$ en (1) o en (2) obtenemos el valor de x, de igual forma podemos aplicar para y el mismo procedimiento para eliminar x.

Eliminamos y, veamos:

$5(2x + 3y = 5)$ Que equivale a: $10x + 15y = \;\;45$

$3(4x - 5y = 4)$ $\;\;12x - 15y = -12$

$22x \;\;= 33$

Luego, $x = \frac{3}{2}$

Ejemplo

Resolver: $6x + 8y = 5$ (1)

$9x - 6y = 7$ (2)

Multiplicando la ecuación (1) por 6 y la ecuación (2) por 8 y sumando las ecuaciones, eliminamos la y, igual ocurre si multiplicamos la ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por 4, puesto que obtenemos el mismo coeficiente para y, 24, donde 24 es m.c.m. entre 8 y 6.

$3(6x + 8y = 5)$ Que equivale a: $19x + 24y = 15$

$4(9x - 6y = 7)$ $\;\;36x - 24y = 28$

$54x \;\;= 43$

Luego, $x = \frac{43}{54}$.

Para eliminar x, como el m.c.m. entre 6 y 9 es 18, multiplicamos la ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por 2 y sumamos las igualdades. Veamos:

$$\begin{array}{r} 3(6x+8y=5) \\ -\,2(9x-6y=7) \end{array} \quad \text{Que equivale a:} \quad \begin{array}{rr} 18x+24y= & 15 \\ -\,18x+12y= & -\,14 \\ \hline 36y= & 1 \\ y= & \frac{1}{36} \end{array}$$

4. Por determinantes

En un sistema general de dos ecuaciones lineales simultáneas con dos incógnitas, aplicando cualesquiera de los procedimientos anteriores, podemos obtener la forma general de la solución del sistema. Veamos:

Resolver:

$$\begin{array}{lll} a_1x + b_1\mathrm{y} = \mathrm{c}_1 & & (1) \\ a_2x + b_2\mathrm{y} = \mathrm{c}_2 & & (2) \end{array}$$

Eliminamos la variable y multiplicando la ecuación (1) por b_2 , la ecuación (2) por $-b_1$ y sumando las igualdades.

$$\begin{array}{r} b_2(a_1x+b_1y=c_1) \\ -b_1\,(a_2x+b_2y=c_2) \end{array} \quad \text{que equivale a} \quad \begin{array}{r} a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2 \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=c_2b_1 \\ \hline (a_1b_2-a_2b_1)\;=c_1b_2\;-c_2b_1 \end{array}$$

y despejando $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

De manera análoga se tiene que $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

Observe que tanto para x como para y, el denominador es igual a $a_1b_2 - a_2b_1$, y el sistema es compatible si $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$.

La expresión $a_1b_2 - a_2b_1$ resulta de combinar los coeficientes de x y de y, que ordenados de acuerdo a como aparecen en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$

Motiva definir el número real $a_1b_2 - a_2b_1$ como: **el determinante 2×2** del ordenamiento rectangular,

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

y se nota: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ observemos que la solución del sistema:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \quad (1) \\ a_2x + b_2y &= c_2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

La podemos expresar en forma de determinantes así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Ejemplos

1. Resolver
$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 3 \\ 3x - 4y &= 7 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-12 - 35}{-8 - 15} = -\frac{47}{23} \; ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{14 - 9}{-23} = -\frac{5}{23}$$

2. Resolver:
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 4x + 6y &= 8 \end{aligned}$$

Al resolverlo por determinantes tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{24-24}{12-12} = \frac{0}{0}\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{16-16}{12-12} = \frac{0}{0}$$

Cuando tenemos indeterminaciones de la forma $x = \frac{0}{0}$, el sistema tiene **infinitas soluciones**.

3. Resolver:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 4x + 6y &= 3 \end{aligned}$$

Al resolverlo por determinantes tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{42-9}{12-12} = \frac{33}{0}\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{6-28}{12-12} = -\frac{22}{0}$$

Cuando tenemos indeterminaciones de la forma $x = \frac{a}{0}$, con $a \neq 0$ se tiene el absurdo $0 \cdot x = a$, por lo tanto el sistema **no tiene soluciones**.

Ejercicio 3.11

1. Resuelva el sistema dado por cada uno de los métodos vistos y verificar la solución.

   a. $\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ 2x + 3y &= 5 \end{aligned}$

   b. $\begin{aligned} x + 4y &= 7 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned}$

   c. $\begin{aligned} 2x - 3y &= 9 \\ 3x + 4y &= 5 \end{aligned}$

   d. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 0 \\ 2x + 5y &= 11 \end{aligned}$

   e. $\begin{aligned} 9x + 7y &= 0 \\ 5x - 9y &= 0 \end{aligned}$

   f. $\begin{aligned} 2x - 11y &= 4 \\ 4x + 7y &= 8 \end{aligned}$

   g. $\begin{aligned} x &= 2y + 1 \\ y &= 5 - \tfrac{3}{5}x \end{aligned}$

   h. $\begin{aligned} x + 4y &= 0 \\ 2x + 5y &= 3a \end{aligned}$

   i. $\begin{aligned} 2x - 3by &= -11b \\ 3bx + 4y &= 6b^2 + 20 \end{aligned}$

2. Resuelva por cualquiera de los métodos y verifique la solución.

   a. $\begin{aligned} 3x + 5y &= 2 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}$

   b. $\begin{aligned} 5x + 4y &= 12 \\ -2x + 3y &= 7 \end{aligned}$

   c. $\begin{aligned} 2x + 7y &= 9 \\ 4x + 4y &= -5 \end{aligned}$

   d. $\begin{aligned} x + \tfrac{1}{2}y &= 5 \\ \tfrac{2}{3}x - 3y &= -10 \end{aligned}$

   e. $\begin{aligned} x &= \frac{3y-4}{2} \\ y &= \frac{3x+6}{5} \end{aligned}$

   f. $\begin{aligned} \frac{3x+1}{2} &= \frac{3-4y}{5} \\ \frac{2}{5}x + \frac{3y-1}{4} &= \frac{7}{10} \end{aligned}$

   g. $\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} &= 3 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} &= 1 \end{aligned}$

   h. $\begin{aligned} \frac{2}{3x} - \frac{3}{2y} &= \frac{5}{6} \\ \frac{4}{3x} + \frac{3}{y} &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$

   i. $\begin{aligned} \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b} &= 0 \\ \frac{x}{2a} - \frac{3y}{b} &= \frac{a+6}{2a} \end{aligned}$

   j. $\begin{aligned} \frac{x+3y-1}{2x-5y+5} &= \frac{3}{2} \\ \frac{3x}{2} - \frac{y-1}{7} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$

k. $\dfrac{5x+2(y-1)}{2(x-5y)+11} = -\dfrac{2}{5}$
$\dfrac{x+3}{2x-1} = \dfrac{y-2}{2y-11}$

l. $\dfrac{x+b}{a} - \dfrac{y-b}{b} = \dfrac{a+b}{a}$
$\dfrac{x+a}{b} - \dfrac{y-a}{a} = \dfrac{a+b}{b}$

m. $ax + by = a^2 + b^2$
$bx - ay = 0$

n. $(a-b)x + by = -b^2$
$(a+b)x + (b-a)y = a^2 + b^2$

o. $x + y = 2b$
$x - y = -2a$

3. Dado el sistema, represéntelo gráficamente y encuentre la solución.

a. $3x + y = 4$
$2x - 3y = -1$

b. $-x + 3y = 3$
$3x - y = 7$

c. $2x - 3y = -6$
$7x + 4y = 8$

d. $3x + y = 0$
$2x + 3y = 7$

e. $9x + 6y = 1$
$3x + 2y = 7$

f. $x + y = 4$
$y = 1$

4. En cada uno de los siguientes problemas verifique si la solución dada cumple las condiciones del problema.

a. Si al dividir el número 72 en tres partes tales que $\frac{1}{2}$ de la primera parte, $\frac{1}{3}$ de la segunda parte y $\frac{1}{4}$ de la tercera parte sean iguales entre sí. La parte mayor es 32.

b. Si A y B parten al mismo tiempo de dos poblaciones distintas, caminando el uno hacia el otro y B camina 1 kilómetro por hora más rápido que A, entonces se encuentran al cabo de 6 horas. Si A camina con la misma velocidad que B, entonces se encuentran al cabo de $5\frac{1}{4}$ horas; luego la distancia entre las dos poblaciones es de 42 kilómetros.

c. Una embarcación puede navegar 10 kms. con la corriente a favor en el mismo tiempo en que navega 6 kms. con la corriente

en contra. Si su velocidad se disminuye en 4 kilómetros por hora en ambos sentidos, entonces su velocidad cuando tiene la corriente a favor es el doble que cuando navega con la corriente en contra. Luego la velocidad que lleva cuando navega en contra de la corriente es de 4 kms/h.

d. Un avión viaja 6.000 kilometros en 10 horas, con viento a favor, y en 12 horas con viento en contra. Luego la velocidad del avión es de 300 kms/h.

e. A y B trabajando juntos, pueden hacer cierta obra en 8 horas, y A solo puede hacerlo en 12 horas. Luego B puede hacerlo solo en 24 horas.

f. Una persona invierte una parte de su dinero al 25% y el resto al 20%, recibiendo unos intereses de $200.000. Si intercambia las inversiones, el ingreso por intereses se incrementa en $5.000. Al 25% invirtió $400.000.

g. Si la base de un rectángulo se disminuye en 5 y su altura se aumenta en 5, su área se incrementa en 50. Si la base se aumenta en 10 y la altura se disminuye en 3, su área se disminuye en 40. La base del rectángulo es 30.

h. La edad de una señora era $\frac{1}{2}$ de la edad de su esposo hace 30 años, y dentro de 18 años será los $\frac{9}{10}$. ¿La edad actual del esposo es 42 años?

i. Un piso de un edificio consta de tres apartamentos A, B y C, tiene un área de 600 m^2. y está arrendado en $4'100.000. El arriendo por m^2 es de $5.000 para el apartamento A, $8.000 para el B y $10.000 para C. El arriendo del apartamento A es el 50% más que el del apartamento C y $100.000 menos que el del apartamento B. ¿El área del apartamento A es de 300 m^2?

j. A puede caminar cierta distancia en 20 minutos y B puede caminar la misma distancia en 30 minutos. Si A parte 5 minutos después que B, entoces B, ha estado caminando 15 minutos antes de que lo alcance A.

k. A puede hacer un trabajo en 4 horas y B puede hacerlo en 12 horas. B comienza el trabajo, pero cierto tiempo después lo reemplaza A, necesitando para todo el trabajo un total de 6 horas. Luego B trabajó 3 horas.

Ecuaciones lineales con tres incógnitas

Definición: una ecuación de la forma $ax+by+cz+d=0$, con a, b, c, $d\in\mathbb{R}$ y a, b, $c\neq 0$, se denomina una **ecuación lineal con tres incógnitas**.

Observe que para obtener una solución de la ecuación es necesario asignar arbitrariamente valores a **dos de las incógnitas**, y encontrar el otro valor.

Ejemplo

Dada la ecuación $x+2y+3z=12$, si hacemos $y=2$, $z=1$ reemplazando obtenemos la ecuación $x+4+3=12$, resolviendo esta ecuación tenemos que $x=5$. La solución de la ecuación es $x=5$, $y=2$, y $z=1$

Definición: dada la ecuación lineal $ax+by+cz+d=0$, se dice que la terna (x_1, y_1, z_1) es una **solución** de la ecuación si al reemplazar x por x_1, y por y_1, y, z por z_1 se satisface la igualdad.

En general dada la ecuación $ax+by+cz+d=0$, podemos obtener **infinitas ternas de valores que son solución de la ecuación**, geométricamente su representación en el espacio de coordenadas rectangulares corresponde a un plano.

Como tres puntos no colineales determinan un único plano, es suficiente tabular tres puntos para tener la representación gráfica del plano.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

Dos ecuaciones lineales con tres incógnitas consideradas simultáneamente determinan un **sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas**, y se expresa en la forma:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2 \end{aligned}$$

Geométricamente, corresponde a dos planos en un mismo espacio. Al resolver el sistema es posible que:

1. **Las ecuaciones sean equivalentes**, y por lo tanto, toda solución para una de las ecuaciones lo es para la otra.

Ejemplo

$$3x+2y-4z=3 \quad (1)$$
$$6x+4y-8z=6 \quad (2)$$

La ecuación (2) se obtiene de multiplicar la ecuación (1) por 2 y por lo tanto, las ecuaciones son equivalentes y el sistema tiene infinitas soluciones. Geométricamente corresponde a un mismo plano representado por dos ecuaciones.

2. **No tenga solución**. Algebraicamente el sistema no tiene solución cuando:

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ y simultáneamente
$a_2x+b_2y+c_2z=d_2 = ka_1x+ kb_1y+kc_1z$, donde $d_1 \neq d_2$ y $k \neq 0$

Ejemplo

$$2x-3y+2z=1 \quad (1)$$
$$4x-6y+4z= 7 \quad (2)$$

Multiplicando la ecuación (1) por -2 y sumándole la ecuación (2) miembro a miembro, tenemos que, $0=5$ (ABSURDO), por lo tanto, el sistema no tiene solución. Geométricamente corresponde a planos paralelos, es decir, a planos que no se intersectan.

3. **Corresponde a planos que se intersecten**. Si dos planos se intersectan, su intersección es una **recta**, y el sistema tiene **infinitas soluciones**.

Ejemplo

$$x+2y-4z=-6 \quad (1)$$
$$3x-5y+3z= 1 \quad (2)$$

Siempre es posible asignar un valor cualquiera a una de las variables y obtener un sistema compatible de dos ecuaciones con

dos incógnitas, por ejemplo, si $x=0$, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{aligned} 2y - 4z &= -6 \\ -5y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Cuya solución es $y=1$, $z=2$, y una de las soluciones es $x=0$, $y=1$, $z=2$

Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Tres ecuaciones lineales con tres incógnitas consideradas simultáneamente determinan **un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas**, y se expresa:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3 \end{aligned}$$

Geométricamente, corresponde a considerar tres planos en un mismo espacio.

Ejemplo

$$\begin{aligned} x+2y+5z&=1 \quad (1) \\ 3x-4y+z&=2 \quad (2) \\ 7x+5y+3z&=9 \quad (3) \end{aligned}$$

Solución de sistemas de tres ecuaciones lineales simultáneas con tres incógnitas

Si tenemos tres ecuaciones simultáneas y lineales con tres incógnitas, o gráficamente, tres planos en un mismo espacio; de acuerdo a la geometría euclidiana es posible que:

Tres planos en un mismo espacio corresponden algebraicamente a tres ecuaciones simultáneas y lineales con tres incógnitas.

1. Los tres planos en el espacio se intersecten en un punto, en este caso decimos que la solución es única y es sistema es compatible

Para hallar la solución única de un sistema compatible de tres ecuaciones con tres incógnitas, hacemos una extensión de los procedimientos algorítmicos utilizados para resolver los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en esencia son:

- Aplicar propiedades de los números reales para reducir el sistema a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Resolver el sistema de dos ecuaciones por cualesquiera de los métodos vistos, es decir, encontrar el valor de dos de las incógnitas.
- Reemplazar estos valores en cualesquiera de las tres ecuaciones del sistema (o sus equivalentes) para hallar el valor de la otra incógnita.

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$x+2y-3z=4 \quad (1)$$
$$2x-3y+2z=2 \quad (2)$$
$$-3x+y+4z=-3 \quad (3)$$

Solución por sustitución

Despejando cualesquiera de las incógnitas, por ejemplo x, en cualesquiera de las ecuaciones, por ejemplo en la ecuación (1) obtenemos una expresión para la incógnita, $x=4-2y+3z$, reemplazando o **sustituyendo** x por $4-2y+3z$ en las otras ecuaciones (2) y (3) el sistema se reduce a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Veamos:

Reemplazando en (2) tenemos:

$$\begin{aligned} 2(4-2y+3z)-3y+2z &= 2 \\ 8-4y+6z-3y+2z &= 2 \\ -7y+8z &= 2-8 \\ -7y+8z &= -6 \quad \text{ecuación (4)} \end{aligned}$$

Reemplazando en (3) tenemos:

$$\begin{aligned} -3(4-2y+3z)+y+4z &= -3 \\ -12+6y-9z+y+4z &= -3 \\ 7y-5z &= -3+12 \\ 7y-5z &= 9 \text{ ecuación (5)} \end{aligned}$$

Las ecuaciones (4) y (5) determinan un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{aligned} -7y+8z &= -6 \\ 7y-5z &= 9 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por cualesquiera de los métodos vistos, tenemos que: $y = 2$, y $z = 1$

Remplazando $y=2$, $z=1$ en cualesquiera de las tres ecuaciones del sistema, por ejemplo en la (1), obtenemos el valor de x:

$$\begin{aligned} x+2(2)-3(1) &= 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La solución del sistema es: $x=3$, $y=2$ y $z=1$

Solución por reducción

Se toman dos de las ecuaciones por ejemplo (1) y (2) y por reducción se elimina una de las incógnitas, por ejemplo x, y obtenemos una ecuación con dos incógnitas, que llamaremos la número (4), veamos:

$$\begin{array}{lll} -2(x+2y-3z=4) & & -2x-4y+6z=-8 \\ (2x-3y+2z=2) & \text{que equivale a:} & \underline{2x-3y+2z=\ 2} \\ \text{Sumando tenemos} & & 0x+7y+8z=-6 \ (4) \end{array}$$

De manera análoga se toma otro par de las ecuaciones, por ejemplo (1) y (3), por reducción eliminamos la misma incógnita en este caso x, y obtenemos otra ecuación con dos incógnitas, que llamaremos la número (5), veamos:

$$\begin{array}{lll} 3(x+2y-3z=4) & & 3x+6y-9z=\ 12 \\ 3x+y+4z=-2 & \text{que equivale a:} & \underline{-3x+\ y+4z=\ -3} \\ \text{Sumando tenemos} & & 0x+7y-5z=\ \ 9 \ (5) \end{array}$$

Las ecuaciones (4) y (5) determinan un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{aligned} -7y+8z &= -6 \\ 7y+5z &= 9 \end{aligned}$$

Cuya solución es: $y = 2$ y $z = 1$, por lo tanto la solución del sistema es $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$

Solución por determinantes

Al resolver el sistema
$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z &= d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z &= d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Podemos obtener la **forma general** de la solución del sistema.

$$x = \frac{d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 - b_1d_2c_3 + b_1d_3c_2 + c_1d_2b_3 - c_1d_3b_2}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2}$$

$$y = \frac{a_1d_2c_3 - a_1d_3c_2 - d_1a_2c_3 + d_1a_3c_2 + c_1a_2d_3 - c_1a_3d_2}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2}$$

$$z = \frac{a_1b_2d_3 - a_1b_3d_2 - b_1a_2d_3 + b_1a_3d_2 + d_1a_2b_3 - d_1a_3b_2}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2}$$

Siempre que $a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 + c_1a_3b_2 - a_1b_2c_3 \neq 0$

Consideremos la solución para x

$$x = \frac{d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 - b_1d_2c_3 + b_1d_3c_2 + c_1d_2b_3 - c_1d_3b_2}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2}$$

$$x = \frac{d_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(d_2c_3 - d_3c_2) + c_1(d_2b_3 - d_3b_2)}{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)}$$

$$x = \frac{d_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \times \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \times \begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}}{a_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

Esta expresión para x motiva definir el determinante 3×3 a partir del determinante 2×2, así:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2$$

Partiendo de esta definición tenemos que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} ; z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Observe que el determinante del numerador solo se diferencia del determinante en el denominador en la columna de la incógnita, donde aparecen los términos independiente d_1, d_2 y d_3.

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5 \quad (1) \\ 3x + 2y - 2z &= 1 \quad (2) \\ x - 7y + 3z &= -4 \quad (3) \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -4 & -7 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -7 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5\times\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -7 \end{vmatrix}}{2\times\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{5(6-14)-3(3-8)-1(-7+8)}{2(6-14)-3(9+2)-1(-21-2)} = \frac{-40+15-1}{-16-33+23} = \frac{-26}{-26} \therefore x = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{2(3-8)-5(9+2)-1(-12-1)}{-26} = \frac{-10-55+13}{-26} = \frac{-52}{-26} \therefore y = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & -4 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{2(-8+7)-3(-12-1)+5(-21-2)}{-26} = \frac{-2+39-115}{-26} = \frac{-78}{-26} \therefore z = 3$$

El sistema no sea compatible

Si el sistema no es compatible o tiene infinitas soluciones, o no tiene solución.

Si tiene infinitas soluciones al resolverlo por determinante resulta una indeterminación de la forma 0/0.

Si no tiene solución al resolverlo por determinantes resulta una indeterminación de la forma a/0, con a $\neq$ 0.

Si el sistema de ecuaciones **no es compatible**; como planos del espacio puede ocurrir que:

- **Los planos coincidan**, es decir, las ecuaciones sean equivalentes, por lo tanto, toda solución para una de las ecuaciones lo es para la otra, el sistema tiene **infinitas soluciones**.

Ejemplo

$$\begin{aligned} 3x-2y-2z&=1 \\ 6x-4y-4z&=2 \\ 9x-6y-6z&=3 \end{aligned}$$

- **Dos de los tres planos coincidan y el otro los intersecta**, en este caso la intersección de los tres planos es una línea recta, el sistema se reduce a un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas y tiene infinitas soluciones.

Ejemplo

$$\begin{aligned} x-2y-7z&=4 \quad (1)\\ 6x-4y-4z&=2 \quad (2)\\ 9x-6y-6z&=3 \quad (3)\end{aligned}$$

Las ecuaciones (2) y (3) son equivalentes, por lo tanto el sistema se puede reducir a las ecuaciones (1) y (2), cuya intersección es una línea recta.

- La intersección de los tres planos es una recta, en este caso el sistema tiene **infinitas soluciones**.

Ejemplo

$$\begin{aligned} x-3y-z&=2 \quad (1)\\ 2x-y+3z&=5 \quad (2)\\ 4x+5y+z&=9 \quad (3)\end{aligned}$$

El lector puede verificar que la ecuación (3), resulta de las ecuaciones (1) y (2), multiplicando la (1) por 2 y sumándole la ecuación (2).

- Al menos dos de los planos sean paralelos, en este caso el sistema no tiene solución.

Ejercicio 3.12

1. Encuentre al menos tres soluciones para cada una de las siguientes ecuaciones:
   a. $3x - y + z = 3$
   b. $5x + y - z = 7$
   c. $x - y + z = 9$
2. Dadas las ecuaciones de los planos, encuentre por lo menos dos soluciones si existen, y determine geométricamente cómo son los planos.

a. $\begin{aligned} 3x - y + 5z &= 2 \\ 2x - 3y + z &= 5 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} x + 4y - z &= 7 \\ 2x + 4y + z &= 1 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} 2x - 3y \quad 5z &= 9 \\ -4x + 6y + 10z &= 18 \end{aligned}$

d. $\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= 0 \\ 2x + 5y \quad &= 11 \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} x + 7y - 2z &= 0 \\ -x - 7y + 2z &= 0 \end{aligned}$

f. $\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ x + y + z &= 8 \end{aligned}$

3. Calcule los siguientes determinantes:

a. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 14 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

f. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 4 & b \\ c & x & 1 \end{vmatrix}$

g. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

4. Determine si el sistema dado es compatible, si lo es, encuentre su solución.

a. $\begin{aligned} 3x - 2y + 2z &= 1 \\ 6x - 4y + 4z &= 2 \\ 9x - 6y + 6z &= 3 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3 \\ x \quad + 5z &= 2 \\ -3y + 4z &= 5 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} 3x + 4y - 7z &= 10 \\ x + 5y + z &= -6 \\ 8x - 3y - 2z &= 8 \end{aligned}$

d. $\begin{aligned} x - 2y - 7z &= 4 \\ 6x - 4y - 4z &= 2 \\ 9x - 6y - 6z &= 3 \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} x + 3y - z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 5 \\ 4x + 5y + z &= 5 \end{aligned}$

f. $\begin{aligned} x + y \quad &= 1 \\ y + z &= 2 \\ x \quad - z &= -3 \end{aligned}$

5. Resuelva por cualquiera de los métodos y verifique la solución.

a. $\begin{aligned} x+y &= 7 \\ y+z &= 5 \\ x+z &= 6 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} 4x+2y-7z &= 3 \\ x-y-5z &= 1 \\ 2x+4y+z &= 3 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} x+2y-z &= 2 \\ 2x-y+z &= 2 \\ -x+2y-z &= 0 \end{aligned}$

d. $\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ x-y+2z &= 5 \\ x-y-3z &= 10 \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} 2x+3y+z &= 1 \\ 6x-2y-z &= -14 \\ 3x+y-z &= 1 \end{aligned}$

f. $\begin{aligned} 3x+y+z &= 1 \\ x+2y-z &= 1 \\ x+y+2z &= -9 \end{aligned}$

g. $\begin{aligned} 5x+3y-z &= -11 \\ 10x-y+z &= 10 \\ 15x+2y-z &= -7 \end{aligned}$

h. $\begin{aligned} \frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{z}{3} &= 3 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{6}-\frac{z}{2} &= -5 \\ \frac{x}{6}-\frac{y}{3}+\frac{z}{6} &= -6 \end{aligned}$

i. $\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3} &= 21 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{6}-\frac{z}{3} &= 0 \\ \frac{x}{10}+\frac{y}{3}-\frac{z}{6} &= 3 \end{aligned}$

j. $\begin{aligned} x-\frac{y+z}{3} &= 4 \\ y-\frac{x+z}{8} &= 10 \\ z-\frac{y-x}{2} &= 5 \end{aligned}$

k. $\begin{aligned} x-y+\frac{y-z}{2} &= 3 \\ \frac{x-y}{2}-\frac{x-z}{4} &= 0 \\ \frac{y-z}{2}-x &= -5 \end{aligned}$

6. Resuelva el sistema

a.
$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 4 \\ x + 2y + 3z - u &= -1 \\ 3x + 4y + 2z + u &= -5 \\ x + 4y + 3z - u &= -7 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 4u &= 0 \\ 3x + y - 5z - 3u &= -10 \\ 6x + 2y - z + u &= -3 \\ x + 5y + 4z - 3u &= -6 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 10 \\ 2x - y + 2z + 2u &= 2 \\ x + 2y - 4z + 2u &= 1 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x - 2y + z + 3u &= -3 \\ 3x + y - 4z - 2u &= 7 \\ 2x + 2y - z - u &= 1 \\ x + 4y + 2z - 5u &= 12 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 10 \\ 2x - y + 3z - 4u &= 9 \\ 3x + 2y - z + 5u &= 13 \\ x - 3y + 2z - 4u &= -3 \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} x + y - z &= -4 \\ 4x + 3y + 2z - u &= 9 \\ 2x - y - 4z + u &= -1 \\ x + 2y + 3z + 2u &= -1 \end{aligned}$$

g.
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= -4 \\ 2x + 3y + 4z &= -2 \\ 3x + y + z + u &= 4 \\ 6x + 3y - z + u &= 3 \end{aligned}$$

h. $$\begin{aligned} 3x \quad &- 3z - u = 2 \\ 3y \quad &- 2z - 5u = 3 \\ 4y \quad &- 3u = 2 \\ x - 3y \quad &+ 3u = 0 \end{aligned}$$

Problemas que se resuelven por medio de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

1. Si 5 cuadernos y 4 lápices cuestan \$32.000; y 6 cuadernos y 3 lápices cuestan \$33.000. Hallar el costo de cada cuaderno y cada lápiz.

Solución. Sean x, el costo de un cuaderno, y y el costo de un lápiz. El costo de 5 cuadernos es $5x$ y el costo de 4 lápices es $4y$ y el costo de 5 cuadernos y 4 lápices es: $5x + 4y = 32.000$. De manera análoga para 6 cuadernos y 3 lápices obtenemos la ecuación $6x + 3y = 33.000$ Como las ecuaciones se cumplen simultáneamente tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 32.000 \\ 6x + 3y &= 33.000 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema tenemos que x=4.000 e y=3.000, es decir, el costo de cada cuaderno es \$4.000 y el costo de cada lápiz es \$3.000. Verificando el resultado: 5 cuadernos y 4 lápices cuestan: $5(4.000) + 4(3.000) = 32.000$ y simultáneamente 6 cuadernos y 3 lápices cuestan $6(4.000) + 3(3.000) = 33.000$. Se cumplen las condiciones del problema.

Ejemplo

2. Hallar dos números tales que, la suma y la diferencia de sus inversos multiplicativos sean respectivamente 5 y 1.

Solución. Sean x el número mayor y y el número menor. El inverso multiplicativo de x es $\frac{1}{x}$, y el inverso multiplicativo de y es $\frac{1}{y}$. La suma de sus inversos multiplicativos es $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$ y la diferencia de sus inversos multiplicativos es $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$.

Como se deben cumplir las dos condiciones tenemos el sistema:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \text{ y } \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$$

Esto no es un sistema lineal pero puede ser tratado como tal utilizando como incógnitas $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$. Sumando las dos ecuaciones tenemos:

$$\frac{2}{x} = 6, \text{ de donde, } 2 = 6x \text{ y } x = 1/3$$

Restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos: $\frac{2}{y} = 4$, de donde: $2 = 4\ y$ e $y = \frac{1}{2}$.

Por tanto, los dos números son $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 3.13

1. Encuentre dos números tales que:
   a. Su suma sea 9 y las de sus inversos multiplicativos sea 1/2.
   b. Su suma sea 72 y estén en relación geométrica 3 a 5.
   c. La suma y la diferencia de sus inversos multiplicativos sean respectivamente 3/4 y 1/20.
   d. Corresponde a las cifras de un número, donde la suma de sus cifras sea 10 y si invertimos sus cifras el número se incrementa en 36.
   e. Corresponde a las cifras de un número, donde la suma de sus cifras es 1/5 del número y la cifra de las unidades excede en uno a la de las decenas.

f. Corresponde a un número de dos cifras tal que el número es igual a 7 veces la suma de sus dígitos y si las cifras se invierten, el número resultante se incrementa en 27.

2. Halle la fracción tal que:

   a. Si su numerador se aumenta en 1, la nueva fracción es 1/2 y si su denominador se disminuye en 1, la nueva fracción es 1/3.

   b. El denominador excede 16 al numerador y si el numerador y denominador se disminuyen en uno, la fracción equivale a 1/5.

   c. Si su numerador se disminuye en 1, la nueva fracción es 1/2 y si su denominador se aumenta en 2, la nueva fracción sigue siendo 1/2.

3. Resuelva el problema y verifique su solución:

   a. Una suma de dinero se repartió en cantidades iguales entre cierto número de personas. Si se consideran dos personas más, cada uno recibiría $1 menos; si se consideran dos personas menos, cada uno recibiría $2 más. Hallar el número de jóvenes y la cantidad recibida por cada uno.

   b. Un número de dos cifras es igual a 8 veces la suma de sus dígitos; si los dígitos se invierten, el número resultante es 45 unidades menor que el número original. Hallar el número original.

   c. La temperatura C, medida en grados centígrados, es una función lineal de la temperatura F, medida en grados Fahrenheit, y puede ser representada por la relación $C = aF+b$, en donde a y b son constantes. Determinar estas constantes, y por tanto la relación, utilizando los hechos de que el punto de congelación para el agua es de 0° C y 32° F y que el punto de ebullición es 100°C y 212°F.

   d. Un tren recorre cierta distancia con velocidad constante. Si esta velocidad se aumenta en 10 Km por hora, entonces el viaje requiere 1 hora menos. Si la velocidad se disminuye en 10 Km por hora, entonces el viaje requiere $1\frac{1}{2}$ horas más. Calcular la distancia recorrida y la velocidad del tren.

   e. Si el ancho de un terreno rectangular se aumenta 10 metros y su longitud se disminuye 10 metros, entonces el área aumenta 400

m^2. Si el ancho disminuye 5 metros, y la longitud aumenta 10 m, entonces el área disminuye 50 m^2. Calcular las dimensiones del terreno.

f. Cierta línea recta está representada por la ecuación lineal $ax+by=7$, en donde a y b son constantes. Calcular a y b si las coordenadas de los dos puntos de la recta son (2,1) y $(-1,3)$.

g. A y B juntos pueden hacer cierto trabajo en $1\frac{5}{7}$ días, A y C juntos pueden hacerlo en $1\frac{7}{8}$ días, B y C juntos pueden hacerlo en $2\frac{2}{9}$ días. Calcular el número de días en que cada uno puede hacer el trabajo por separado.

h. La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 6. Si se intercambian los dígitos de las centenas y las decenas el número resultante es 90 unidades mayor que el número original. Si se intercambian los dígitos de las decenas y las unidades del número resultante es 9 unidades mayor que el número original. ¿Cuál es el número?

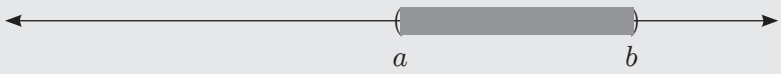
i. Tengo $50.000 en monedas de $500 y $1.000, si en total tengo 60 monedas, ¿cuántas tengo de cada denominación?

Resumen del capítulo 3

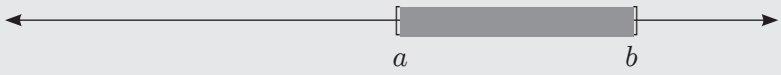
Intervalos

De todos los números reales comprendidos entre a y b, que pueden ser:

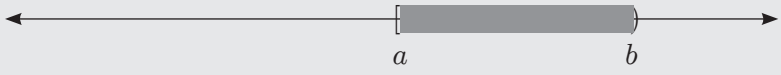
a. $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a<x<b\}$, se denomina un **intervalo abierto**.



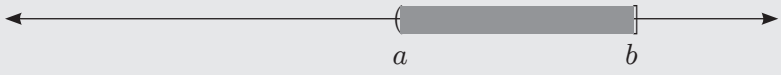
b. $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a\leq x\leq b\}b$ se denomina un **intervalo cerrado**.



c. $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a\leq x<b\}b$ se denomina un **intervalo cerrado en a y abierto b.**



d. $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a<x\leq b\}b$ se denomina un **intervalo abierto en a y cerrado en b.**



Valor absoluto

Definición: si a es un número real, el valor absoluto de a que se nota $|a|$ se define como sigue:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ si } a\geq 0 \\ -a, \text{ si } a<0 \end{cases}$$

si $a>0$, entonces

$|x|=a$ significa que $x=a$ o $x=-a$.

$|x|<a$ significa que $-a<x<a$.

$|x|>a$ significa que $x>a$ o $x<-a$.

Desigualdades

Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$.

Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$.

Si $a<b$ y $c>0$, entonces $ca<cb$.

Si $a<b$ y $c<0$, entonces $ca>cb$.

Completando el cuadro si $a \neq 0$

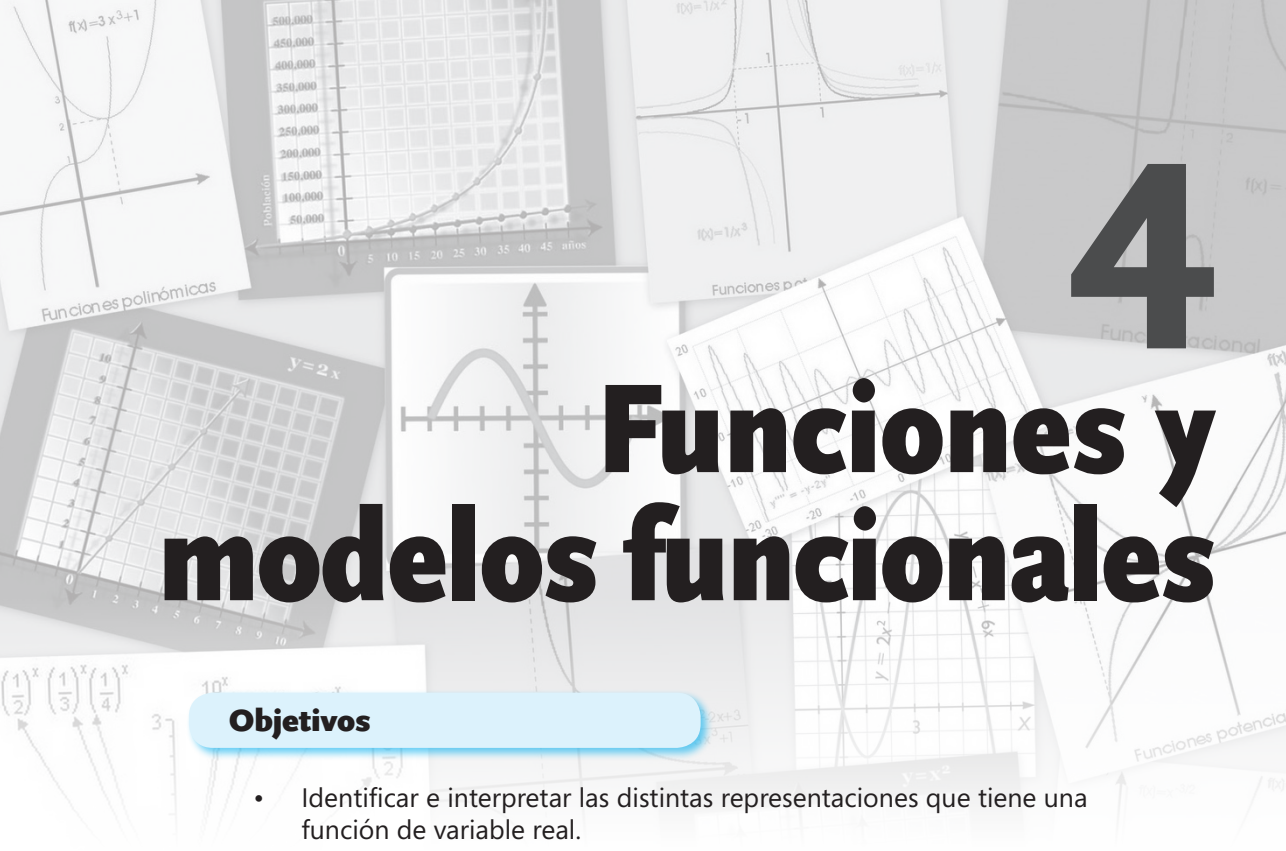
$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\tfrac{b}{a}x\right)+c \\
&= a\left(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{b^2}{4a^2}-\tfrac{b^2}{4a^2}\right)+c \\
&= a\left(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{b^2}{4a^2}\right)+a\left(-\tfrac{b^2}{4a^2}\right)+c \\
&= \underbrace{a\left(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{b^2}{4a^2}\right)}+\underbrace{c-\tfrac{b^2}{4a^2}}
\end{aligned}
$$

Esto es $= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

Llame a esta parte C

La fórmula cuadrática: $ax^2+bx+c=0$ si $a \neq 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$



4

Funciones y modelos funcionales

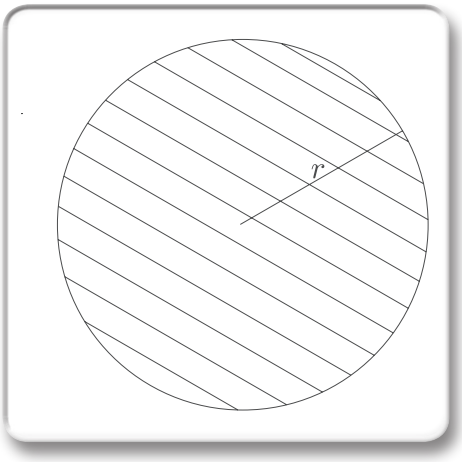
Objetivos

- Identificar e interpretar las distintas representaciones que tiene una función de variable real.
- Analizar y evaluar funciones básicas de variable real determinando su dominio y rango.
- Identificar y realizar el álgebra de funciones de variable real: suma, producto, cociente y composición de funciones.
- Reconocer las gráficas de algunas funciones básicas de variable real con su dominio y recorrido: polinómicas, a trozos, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- Realizar problemas de aplicación que requieran la modelación de funciones de variable real.
- Identificar funciones inyectivas y determinar sus inversas.
- Utilizar las propiedades de los logaritmos para simplificar algunas expresiones algebraicas.
- Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas aplicando las propiedades de los exponentes y los logaritmos.
- Identificar las asíntotas verticales y horizontales de algunas funciones racionales.
- Identificar los elementos básicos de las funciones hiperbólicas: ecuaciones y gráficas.

Funciones y modelos funcionales

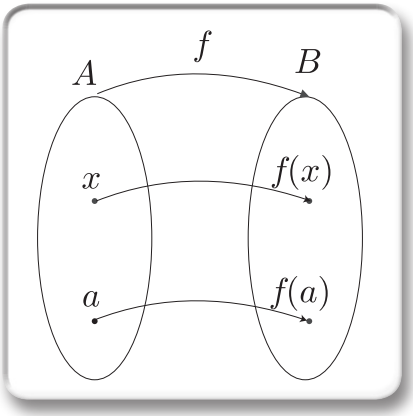
El área de un círculo depende del radio r del mismo. La ecuación que relaciona el radio r con el área A es $A=\pi r^2$, es decir, que para cada valor mayor que cero que se asigne a r, existe un valor asociado al área A, por lo tanto, podemos asegurar que A es una función de r.

De acuerdo al ejemplo anterior, una función es una regla de asignación, en la cual a cada valor del radio r del círculo, se le asigna un único elemento llamado $A(r)$, designado como el área del círculo es decir, el área A del círculo en función del radio se escribe $A = \pi r^2$.



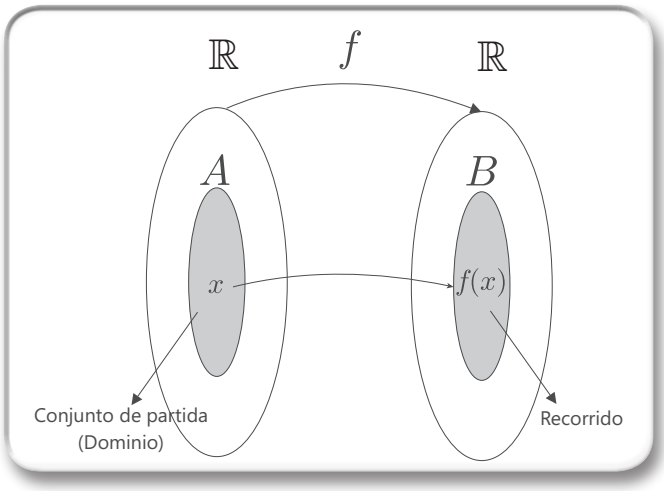
Definición: una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A, un único elemento llamado $f(x)$ en el conjunto B.

Relacionando un gráfico con respecto a la definición anterior:

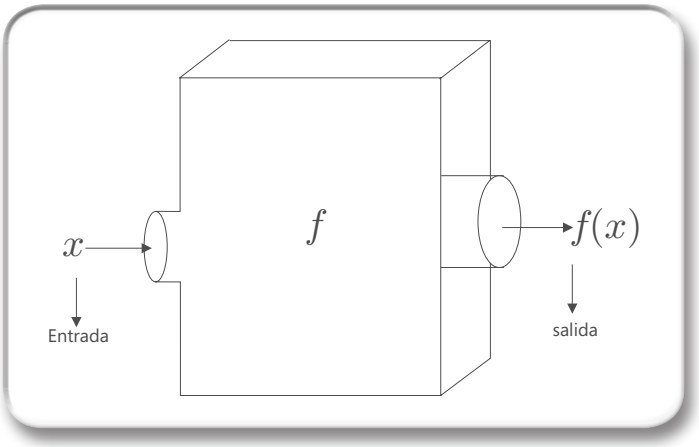


Hay que precisar que las funciones que vamos a tratar son funciones donde los conjuntos A y B son subconjuntos no vacíos de números reales, donde A y B se llaman dominio y recorrido respectivamente; y se denotan $A{=}Dom(f)$, $A{\subset}\mathbb{R}$y $B\subset\mathbb{R}$, $A{\neq}0$ y $B{\neq}0$ y así:

$$f\colon A \longrightarrow B$$
$$x \longrightarrow f(x)$$



El símbolo $f(x)$ se interpreta como la imagen de x bajo f, como se muestra en el gráfico siguiente:



Ahora el recorrido f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, si x pertenece al dominio de f, que definiéndolo formalmente es el conjunto $B{=}\{f(x)|x{\in}A\}$.

Ejemplos

1. Cálculo de imágenes.

A continuación, dada la función $f(x)=x^2+1$, halle: $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$.

Solución

Si $x=0$, la imagen se obtiene reemplazando x por 0 (cero), en la expresión algebraica, entonces:

$f(0)= 0^2+1=1$, por lo tanto:

$f(0)=1$, es decir, 1 es la imagen de 0 dada por la función f.

En forma similar se proceda para los demás elementos:

$f(1)=1^2+1=2$, $\qquad$ $f(2)=2^2+1=5$

por lo tanto, la imagen 0 es 1, la imagen de 1 es 2 y la imagen de 2 es 5.

---

2. Para la función $f(x) = 3x^2 + 2x$.
Halle $f(-6)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a+1)$
y $f(a) + f(b)$

Solución

Se calculan los valores de f al sustitur x en la ecuación:

$f(x) = 3x^2 + 2x$

1) $f(-6) = 3(-6)^2 + 2(-6) = 3(36) - 12 = 96$

2) $f(\sqrt{3}) = 3(\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{3}) = 3(3) + 2\sqrt{3} = 9 + 2\sqrt{3}$

3) $f(a+1) = 3(a+1)^2 + 2(a+1)$
$= 3(a^2 + 2a + 1) + 2a + 2$
$= 3a^2 + 6a + 3 + 2a + 2$
$= 3a^2 + 8a + 5$

4) $f(a) + f(b) = 3a^2 + 2a + 3b^2 + 2b$
$= 3(a^2 + b^2) + 2(a + b)$

Dominio de una función

Definición: el conjunto A para el cual f asigna una única imagen $y \in B$ se denomina dominio de la función f, denominado como $Dom(f)$.

Recorrido: es el conjunto de imágenes de la función f, denotado como $Rec(f)$.

3. Sea $g(x) = \frac{\sqrt{5+x}}{1-x}$

a) Determine el dominio de g.

b) Calcular $g(4)$, $g(-2)$ y $g(-a)$.

Solución

a) La expresión $\frac{\sqrt{5+x}}{1-x}$, es un número real solo si el radicando $5+x$ es positivo, y el denominador $1-x$ no es igual a cero, de esta manera $g(x)$ existe solo si $5 + x \geq 0$ y $1 - x \neq 0$ ó lo que es igual: $x \neq -5$ y $x \neq 1$.

El dominio se puede expresar en términos de intevalos, como: $[-5,1] \cup (1,\infty)$.

b) Para calcular los valores se sustituye:

$$g\,(4) = \frac{\sqrt{5+4}}{1-4} = \frac{\sqrt{9}}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$g\,(-2) = \frac{\sqrt{5-2}}{1-(-2)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$g\,(-a) = \frac{\sqrt{4-a}}{1-(-a)} = \frac{\sqrt{4-a}}{1+a}$$

4. Definamos la función $h(x)=x^2$, $0\leq x\leq 10$, entonces el dominio de $h(x)$ está definido por el intervalo cerrado $[0,10]$es decir: $Dom(h)=\{x\in\mathbb{R}|0\leq x\leq 10\}=[0,10]$.

Mientras que el recorrido de h se identifica evaluando los extremos del intervalo en la función h, es decir $y=h(0)=0^2=0$ y $y=h(10)=10^2=100$, luego; $Rec(h)=\{y\in\mathbb{R}|\{y|0\leq y\leq 100\}=[0,100]$

5. Encontrar el dominio de la función $f(x) = \frac{2}{x^2-2x}$

Solución

Dado que $f(x) = \frac{2}{x^2-2x} = \frac{2}{x\,(x-2)}$,observamos que $f(x)$ no está definida en $x=0$ ó $x=2$.

Así que el dominio es: $Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}|x\neq 0,\ x\neq 2\}$

Dicho dominio en notación de intervalos es:

$$Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

6. $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Las funciones f y g toman valores en el conjunto de los números reales, y su dominio es: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, \infty)$. La función g toma valores en el conjunto de los números reales distintos de cero, y su dominio es: $Dom(g) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, puesto que $g(0) = \frac{1}{0}$ no está definido, para h el dominio son todos los reales ya que $x^2+1=0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.

7. Puede ocurrir que se asigne un mismo valor k a todos los valores de x, tenemos entonces un caso especial, en el cual el valor y la de función no varía es decir, $y = f(x) = k$ para cualquier x del dominio de $f(x)$, función se denomina **Función constante**, su recorrido se reduce al conjunto $\{k\}$.

8. Otra función especial es la función definida por $f(x)=x$, esta función se denomina la función idéntica y se nota I_x, cuando la función idéntica se define sobre un conjunto x se nota I_x donde el dominio y recorrido son los reales respectivamente.

9. Determinar el dominio de $r(x) = \sqrt{x^2 + 9x + 20}$

Solución

El dominio de $r(x)$ consta de todos los valores reales tal que,

$$x^2 + 9x + 20 \geq 0$$

Debido a que la raíz de un número real negativo no existe.

Resolviendo la desigualdad tenemos:

$$(x + 5)\,(x + 4) \;\geq\; 0$$

y resolviendo la en la tabla siguiente:

Intervalos	$x+5$	$x+4$	$(x+5)\,(x+4)$
$(-\infty,-5)$	$-$	$-$	$+$
$(-5,-4)$	$+$	$-$	$-$
$(-4,\infty)$	$+$	$+$	$+$

Por lo tanto dominio de $r(x)$ es: $Dom(r) = (-\infty,-5]\cup[-4,+\infty)$

Casos para hallar el dominio de una función

Caso I
Consideraremos para hallar el dominio a funciones definidas de la forma:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \text{ con } h(x) \neq 0$$

Si $Dom(g)=\mathbb{R}$ y $Dom(h)=\mathbb{R}$, el problema se reduce a encontrar los valores de x para los cuales $h(x)=0$. Encontrando estos valores (si existen), tenemos que:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \,|\, h(x) = 0\}$$

Ejemplos

1. Hallar el dominio de $f(x) = \frac{3x+7}{x+7}$

$x + 7 = 0$

$x = -7$, por lo tanto $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-7\}$

2. Hallar el dominio de $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2+7x-18}$

$x^2 + 7x - 18 = 0$, resolviendo la ecuación tenemos que,

$(x + 9)(x - 2) = 0$

$x + 9 = 0$ o $x - 2 = 0$; $x = -9$ o $x = 2$, por lo tanto,
$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-9, 2\}$

3. Hallar el dominio de $f(x) = \frac{5x}{x^2+4}$

$x^2 + 4 = 0$, no tiene solución en los reales, por lo tanto, $Dom(f) = \mathbb{R}$ es decir $x^2 = -4; x = \pm\sqrt{-4}$, no existe un número real x tal que $x^2 = -4$

4. Hallar el dominio de $f(x) = \frac{x^2}{e^x-1}$; $e^x - 1 \neq 0$, luego si

$e^x - 1 = 0$
$e^x = 1$
$x = \ln(1)$
$x = 0$,
por lo tanto $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

5. Hallar el dominio de $f(x) = \frac{3x+7}{x^4-3x^2+2}$

$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

$(x^2 - 2)(x^2 - 1) = 0$; $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + 1)(x - 1) = 0$, entonces:

$x = 1 \text{o } x = -1 \text{ o } x = \sqrt{2} \text{ o } x = -\sqrt{2}$, **por lo tanto,**

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

CASO II

$\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{g(x)}}$, para n par

Esta función está definida para $g(x) \geq 0$

Ejemplos

1. Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{x + 3}$

$$x + 3 \geq 0$$
$$x \geq -3$$

$Dom(f) = [-3, \infty)$

2. Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{9 - 2x}$

$$9 - 2x \geq 0$$
$$-2x \geq -9$$
$$x \leq \frac{9}{2}$$

$Dom(f) = (-\infty, \frac{9}{2}]$

3. Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$

$x^2 + 3x - 10 \geq 0$,
$(x + 5)(x - 2) \geq 0$ resolviendo la inecuación tenemos que:

Intervalos	$x+5$	$x-2$	$(x+5)(x-2)$
$(-\infty,-5)$	$-$	$-$	$+$
$(-5,2)$	$+$	$-$	$-$
$(2,\infty)$	$+$	$+$	$+$

por lo tanto, $Dom(f) = (-\infty, -5] \cup [2, \infty)$

4. Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

$16 - x^2 \geq 0$; resolviendo la inecuación tenemos que: $(4 + x)(4 - x) \geq 0$

Intervalos	$x+4$	$4-x$	$(x+4)(4-x)$
$(-\infty,-4)$	$-$	$+$	$-$
$(-4,4)$	$+$	$+$	$+$
$(4,\infty)$	$+$	$-$	$-$

por lo tanto, $Dom(f) = [-4,4]$

5. Hallar el dominio de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-3}$

Para que $f(x)$ éste definida se debe cumplir que: $x \geq 0$ y $x \neq 3$, por lo tanto: $Dom(f) = [0, \infty) \cap (\mathbb{R} - \{3\}) = [0,\infty) - \{3\}$

6. Hallar el dominio de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$

Como el denominador debe ser diferente de cero, tenemos que $x^2 - 3 \geq 0$, $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) > 0$, y resolviendo la desigualdad obtenemos:

Intervalos	$(x + \sqrt{3})$	$(x - \sqrt{3})$	$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$
$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-$	$-$	$+$
$(-\sqrt{3}), \sqrt{3})$	$+$	$-$	$-$
$(\sqrt{3},\infty)$	$+$	$+$	$+$

por lo tanto, $Dom(f) = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

7. Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{\frac{7 - x}{x^2 - 4}}$

y resolviendo: $\frac{7-x}{(x+2)(x-2)} \geq 0$

Intervalos	$7-x$	$x+2$	$x+2$	$\frac{7-x}{(x+2)(x-2)}$
$(-\infty,-2)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(-2,2)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(2,7)$	$+$	$+$	$+$	$+$

por lo tanto, $Dom(f) = (-\infty,-2) \cup (2,7]$

Restricción del dominio

Ejemplos

1. En la función $y=20x+500$ el dominio es $(-\infty,+\infty)$, y el recorrido es $(-\infty,\infty)$, pero si la función representa el costo de x unidades el $Dom(f)=[0,\infty]$ y el recorrido es $[500,\infty)$, si el número de unidades es entero entonces $Dom(f)=\mathbb{N}$

2. $f(x) = \frac{1}{2}mx^2$,m una constante, está definida para cualquier valor de x, pero si $f(x)$ es la energía cinética de un cuerpo de masa m que se desplaza con una velocidad x expresada en kms/seg., x toma valores en el intervalo $[0, 300.000)$, por ser 300.000 km/s, la máxima velocidad existente.

3. $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ está definida para cualquier valor de x, pero si $f(x)$ es la temperatura expresada en grados Fahrenheit equivalente a x grados centígrados, toma valores en el intervalo $[-273,\infty)$, por ser -273 °C, la mínima temperatura existente.

En lo que se refiere al recorrido de la función $y=f(x)$, este se calcula con base al dominio ya establecido.

El **recorrido** de una función se determina por la propia ley (fórmula) que define la función, mientras que el dominio se fija por las condiciones o por el sentido del problema a resolver.

Cuando definimos una función como $y=f(x)$, el ***Rec* (f) son los valores que toma y**, por lo tanto, para hallar el recorrido expresamos x en función de y, hallamos los valores y para los cuales x está definida.

Para hallar el recorrido consideraremos algunas funciones en que sea posible expresar x en función de y.

Ejemplos

1. $$\begin{aligned} y &= f(x) = 3x + 7 \\ y &= 3x + 7 \\ y - 7 &= 3x \\ x &= \frac{y-7}{3} = \frac{y}{3} - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

   Como es una expresión polinómica y puede tomar cualquier valor real, por lo tanto: $Rec(f)=\mathbb{R}$

2. $$y = f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$$

   $$\begin{aligned} y &= \frac{2x+5}{x-3} \\ y(x-3) &= 2x + 5 \\ xy - 3y &= 2x + 5 \\ xy - 2x &= 3y + 5 \\ x(y-2) &= 3y + 5 \\ x &= \frac{3y+5}{y-2} \end{aligned}$$

   Debemos encontrar los valores de para los cuales:

   $$y - 2 = 0$$

   $y=2$, por lo tanto, $Rec(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

3. $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, se supone que y toma la raíz principal o positiva, por lo tanto, el recorrido se toma para valores positivos de y; donde x esté definida

   $$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - 1} \\ y^2 &= x^2 - 1 \\ x &= \sqrt{y^2 + 1} \end{aligned}$$

$y^2+1\geq 0$, se cumple para cualquier valor mayor o igual a cero, por lo tanto,

$$Rec(f)=[0,\infty)$$

4. $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, se supone que toma la raíz positiva.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 + 4} \\ y^2 &= x^2 + 4 \\ x &= \sqrt{y^2 - 4} \end{aligned}$$

$y^2-4\geq 0$, entonces $(y+2)(y-2)\geq 0$. Resolviendo la inecuación tenemos $y\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$, pero los valores positivos de y para los cuales x está definida es: $[2,\infty)$, por lo tanto:

Intervalos	$y+2$	$y-2$	$(y+2)(y-2)$
$(-\infty,-2)$	$-$	$-$	$+$
$(-2,2)$	$+$	$-$	$-$
$(2,\infty)$	$+$	$+$	$+$

por lo tanto, $Rec(f)=[2,\infty)$

Construcción de funciones

En el mundo real se presentan muchas situaciones concretas en las que intervienen variables relacionadas entre sí, en las cuales el valor de cada una de ellas depende del valor de la otra, por ejemplo, el ingreso mensual de una empresa puede depender del número de artículos producidos y vendidos. El crecimiento de una planta medida en centímetros depende de la variable tiempo. Son diversas las aplicaciones que tienen las funciones a las ciencias como la física, química, administración, economía e ingeniería, entre otras.

Antes de mencionar algunos ejemplos de modelos funcionales es importante destacar la variable independiente de la variable dependiente.

"**Variable Independiente**" es un símbolo que representa a un número arbitrario en el dominio de una función f, mientras que la **variable dependiente** es un símbolo que representa a un número en el recorrido de f.

Por ejemplo, la función que extrae la raíz cuadrada a un número x, se podría definir con más precisión. Como que a cada número x se le asigna un número y mediante la regla de asignación $y=\sqrt{x}$

Por lo tanto x es la **variable independiente** mientras que y es la **variable dependiente**.

Ejemplos

1. El ingreso de la venta de un producto depende del número de unidades y del precio unitario; si el precio unitario es de $1.000 y el número de unidades vendidas es x, el ingreso $R(x)$, es: $R(x)=1.000x$

2. Si x representa la temperatura expresada en grados Fahrenheit, la temperatura en grados centígrados, es una función de x, dada por:

$$f(x)=\frac{5(x-32)}{9}$$

   Si queremos o necesitamos expresar una temperatura de 95°F (Fahrenheit) en grados Centígrados tenemos:

$f(95)=\frac{5(95-32)}{9}=35$, es decir 95°F equivalen a 35°C

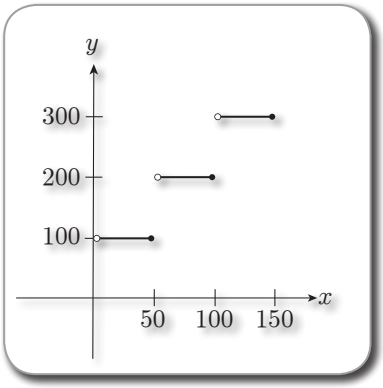
3. El valor futuro de un capital de $5'000.000 colocado a un interés compuesto del 3% mensual depende, del número de meses que esté colocado. Si x representa el número de meses tenemos:

$$f(x)=5'000.000(1{,}03)^x$$

   En particular, si el capital se coloca durante un año tenemos que: $x=12$, y

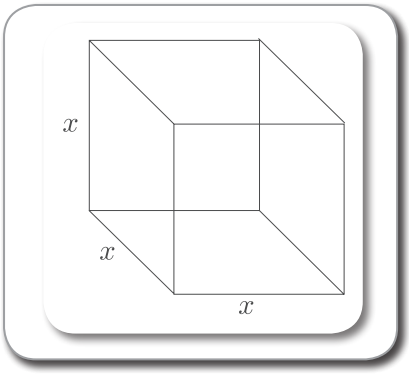
$f(12)=5'000.000(1{,}03)^{12}=7'128.804{,}43$

4. Función tarifa postal. El costo de franqueo de una carta en función de su peso en gramos es:



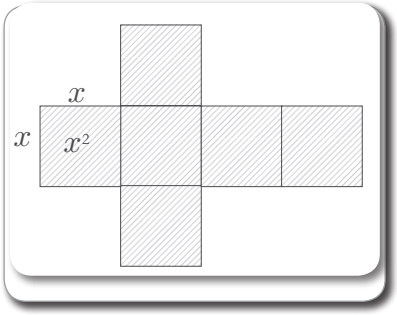
$$f(x) = \begin{cases} 100 \text{ si } 0 < x \leq 50 \\ 200 \text{ si } 50 < x \leq 100 \\ 300 \text{ si } 100 < x \leq 150 \end{cases}$$

5. Suponga que se quiere expresar la cantidad de material en cm^2 de una caja en forma cúbica, como se muestra en la siguiente figura:



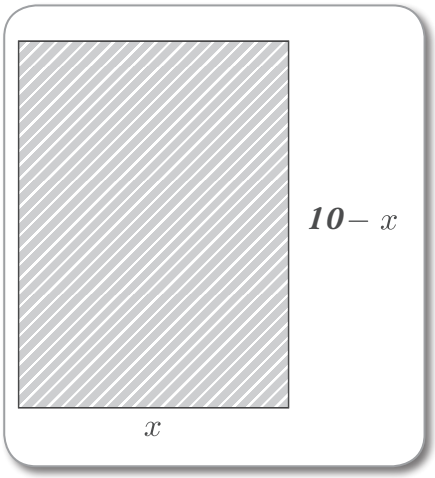
Las dimensiones de la caja son x, y como se trata de un cubo, las dimensiones de todas las aristas son iguales.

Para expresar una función en términos del área superficial de la caja cúbica, donde el área de cada cuadrado es x^2, como se muestra en la siguiente figura.



Por lo tanto la función que podemos construir, donde $c(x)$es la cantidad de material, x es la dimensión de la caja es $c(x)=6x^2$

6. Exprese el área del rectángulo mostrado en la figura



Solución

Como el área de un rectángulo es la base por la altura, donde x y $10-x$ son la base y altura respectivamente, la función que nos da el área del rectángulo es:

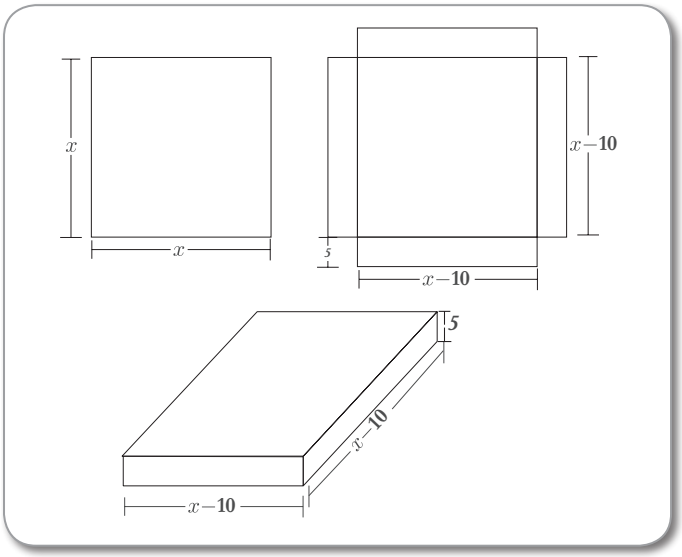
$$A(x) = x(10-x)$$

$$A(x) = 10x - x^2$$

7. Una caja con base cuadrada y sin tapa se construye partiendo una lámina cuadrada de cartón, cortando un cuadrado de 5 cms en cada esquina, y doblando hacia arriba los lados.

   Exprese el volumen de la caja en función del tamaño x, de la lámina de cartón.

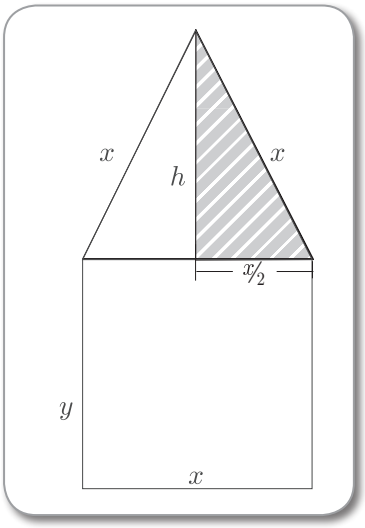
Solución: se inicia trazando el esquema siguiente:



Como el área de la base de la caja es $(x-10)^2$ y la altura es 5 cms. se tiene que el volumen de la caja es:

$$V\,(x) \;=\; 5\,(x-10)^2$$

8. Una ventana tiene forma de rectángulo coronado por un triángulo equilátero. Si el perímetro de la ventana es de 35 pies, exprese el área de ella como función del ancho x de la misma.



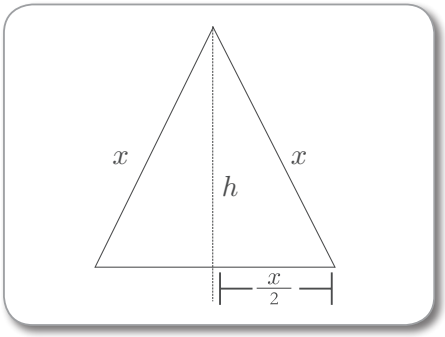
Solución

El área de la ventana es la suma total del área del triángulo y el rectángulo.

El área del triángulo es:

$$A_{\triangle} = \frac{x.h}{2}$$

Pero nos falta saber la altura del triángulo. Para esto solo se busca utilizar el teorema de Pitágoras en el triángulo equilátero.



$$h^2 + (\tfrac{x}{2})^2 = x^2$$

$$h = \sqrt{x^2 - \tfrac{x^2}{4}} = \sqrt{\tfrac{4x^2 - x^2}{4}} = \sqrt{\tfrac{3x^2}{4}}$$

donde, $h = \frac{x}{2}\sqrt{3}$

así el área del triángulo es: $A_{\triangle} = \frac{x\,(\frac{x}{2}\sqrt{3})}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

Además el área del rectángulo es: $A_{\square} = xy$, de esta manera podemos concluir que el Área Total es:

$$\mathrm{A_T} = A_{\triangle} + A_{\square} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + x\,y$$

$$\mathrm{A_T} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + x\,y$$

Nótese que la función del área total de la ventana está en función de dos variables x y y

Como el perímetro del ventanal es de 35 pies podemos expresarla como:

$$P = 3x + 2y = 35$$

Al despejar y en términos de x la ecuación anterior se obtiene:

$$y = \frac{35 - 3x}{2}$$

Lo cual implica que el área total de la ventana es:

$$\mathrm{A_T} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + x\left(\frac{35 - 3x}{2}\right)$$

Gráfica de una función

Una manera de percibir intuitivamente propiedades de una función es graficarla, partimos de poder asignar números a los puntos; cuando estos puntos corresponden al plano para asignar números reales a los puntos, se establecen dos rectas perpendiculares de referencia denominadas **ejes coordenados**, uno, el eje horizontal o de las x, y el otro, el eje vertical o de las y. El punto de intersección de los ejes se denomina el *origen* y al plano se identifica como el plano xy o **plano cartesiano**.

Una vez establecidos los ejes coordenados, para el eje x a la derecha del origen se elige un punto cuya distancia al origen es la unidad; análogamente

para el eje y se elige el punto arriba del origen, cuya distancia al origen es la unidad.

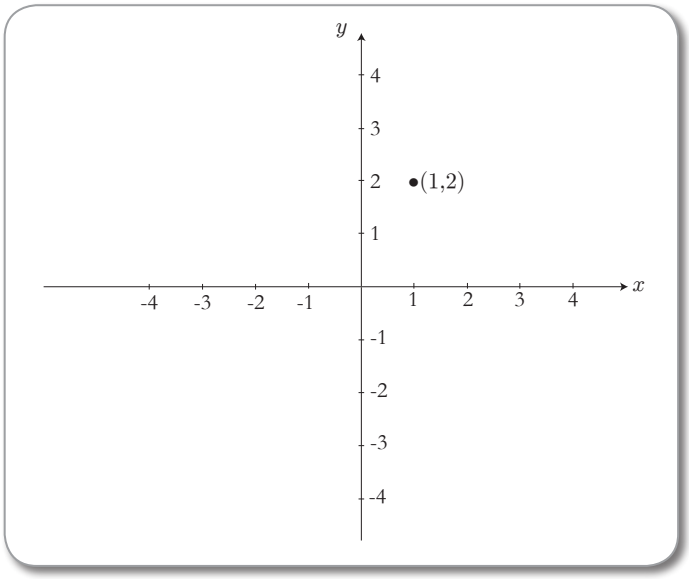
A cada punto del plano se le asigna un pareja ordenada de números reales (a,b) llamadas las coordenadas del punto, donde a se denomina la *abcisa* y representa la distancia del punto al eje y, b se denomina la *ordenada* y representa la distancia del punto al eje x.

Dos parejas ordenadas (a,b), (c,d) corresponden al mismo punto, es decir, $(a,b)=(c,d)$ si y solo si y $a=c$ y $b=d$

Ejemplo

Al representar en el plano cartesiano la función $y = f(x)$. Asignamos a x los valores sucesivos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, y obtenemos los valores correspondientes de y, $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$

Estos valores determinan en el plano los puntos cuyas coordenadas son: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \ldots$



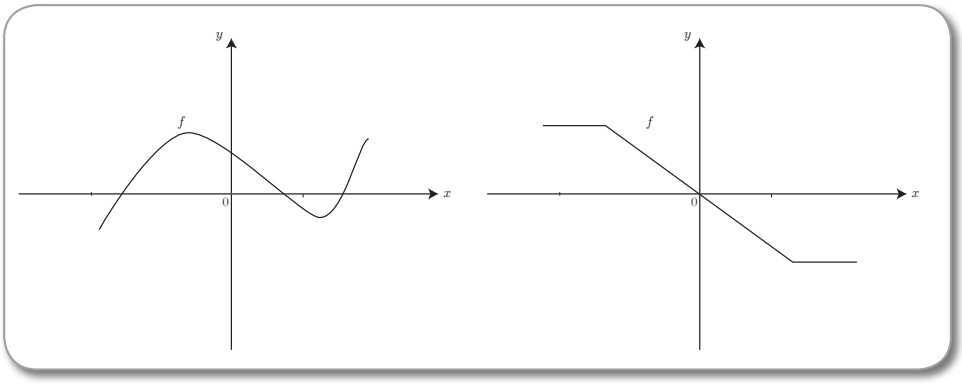
Se denomina **gráfica de la función $y = f(x)$** al conjunto de puntos en el plano (x,y), donde $y = f(x)$

$$Graf(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y=f(x), x\in Dom(f)\}$$

Nota: la gráfica sólo ilustra las propiedades de la función más no las demuestra.

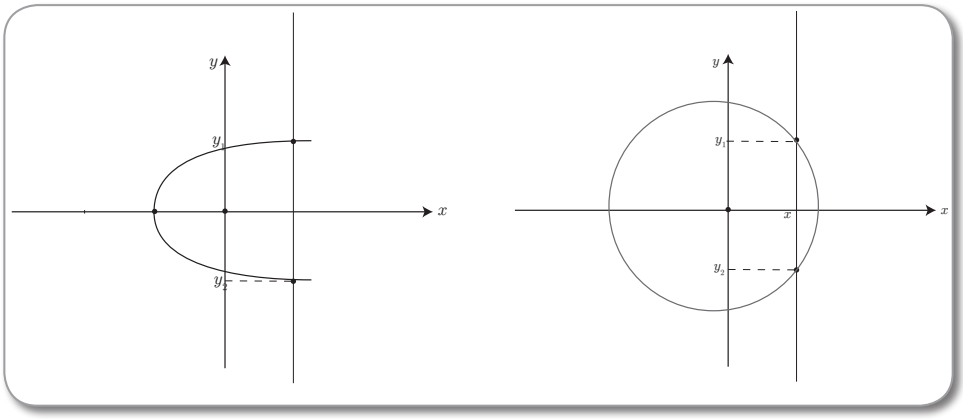
Geométricamente a la Graf(f) se le denomina una curva.

Ejemplos



Es función Es función

En las siguientes gráficas la recta vertical corta a la gráfica en dos puntos.



No es función

Una curva en el plano cartesiano corresponde a la gráfica de una función si y solo si, toda recta vertical que intersecte a la curva lo hace en un único punto, este criterio geométrico que se denomina *criterio de la línea vertical* corresponde a la **definición formal de función**. Una función de x en y es un subconjunto de parejas ordenadas del producto cartesiano $x \times y$, donde el primer elemento nunca se repite.

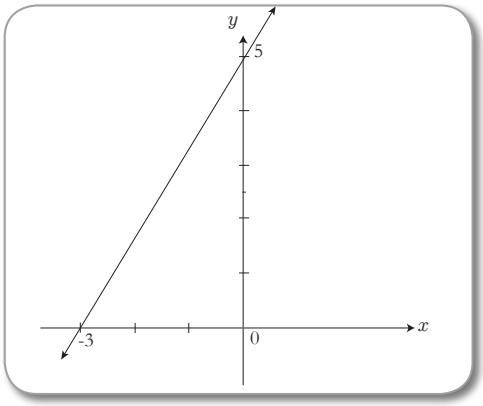
Muchas veces, la representación geométrica de una función permite establecer sus propiedades **intuitivamente**.

Ejemplos

1. $f(x) = \frac{5}{3}x + 5$

Realicemos una tabla de datos:

x	0	-3
y	5	0



$Dom(f) = \mathbb{R}$

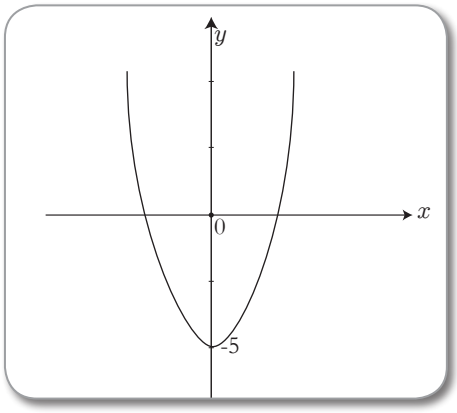
$Rec(f) = \mathbb{R}$

Observemos que cada elemento del recorrido es imagen de un único elemento del dominio.

2. $f(x) = x^2 - 5$
$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Rec(f) = [-5, \infty)$

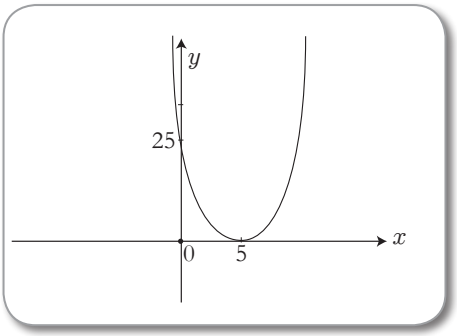
¿Cómo representar una función en un plano cartesiano? Sabemos que la gráfica es el conjunto de pares ordenados.



Graf $(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x), x \in Df\}$

La gráfica nos proporciona una información útil sobre el comportamiento de la función como lo muestran los ejemplos 1 y 2, donde crece y decrece la curva. Además, el dominio y recorrido de la misma.

3. Trazar la gráfica de:
$f(x) = (x-5)^2$



Solución

En la tabla siguiente se listan algunos valores funcionales y sus puntos correspondiente a las gráficas.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	81	64	49	36	25	16	9	4	1

Luego se marcan los puntos y se unen por medio de una curva suave para obtener la gráfica como se muestra en la figura.

4. Definamos la función signo de x como:

$$f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1 & para\ x > 0 \\ 0 & para\ x = 0 \\ -1 & para\ x < 0 \end{cases}$$

a) Trace la gráfica de f.

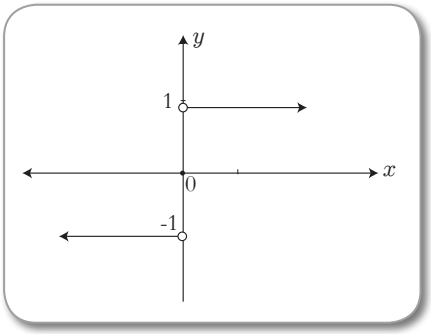
b) Halle dominio y recorrido.

Solución

a) Para $x < 0$ tenemos la función constante $f(x) = -1$.

- La imagen de $x = 0$
- Para $x > 0$, tenemos la función constante $f(x) = 1$

Por lo tanto, la gráfica de $f(x)$, es:



b) El dominio todos los reales o el intervalo $(-\infty,\infty)$, mientras que el recorrido es el conjunto:
$\{1, 0. -1\}$

5.

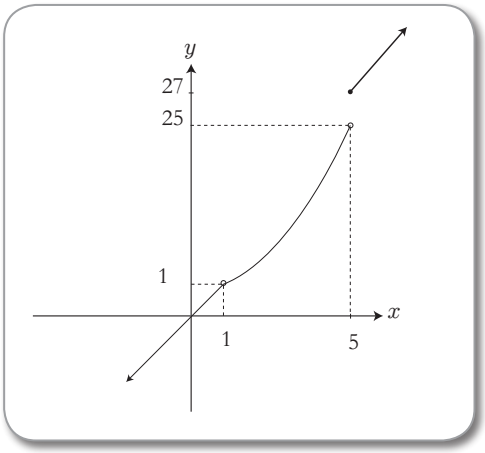
$$f(x) = \begin{cases} x \ \ si \ \ x < 1 \\ x^2 \ \ si \ \ 1 < x < 5 \\ 6x - 3 \ si \ \ x \geq 5 \end{cases}$$

a) Trace la gráfica de f.

b) Halle dominio y recorrido.

Solución

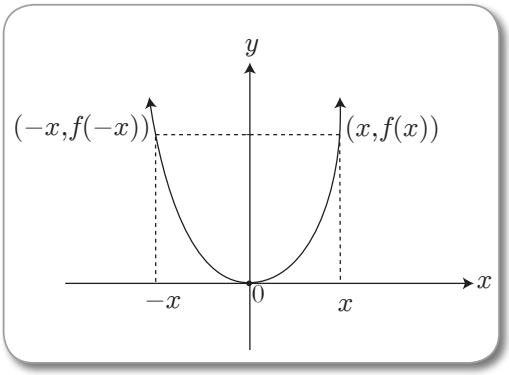
a) La gráfica correspondiente a $f(x)$, es:



b) Dominio $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$
Recorrido $(-\infty, 25) \cup (27, +\infty)$

Función par

Si una función f satisface la condición que, $f(-x) = f(x)$ se dice que es una función par, para todo x del dominio, como se muestra en la gráfica.



Ejemplos

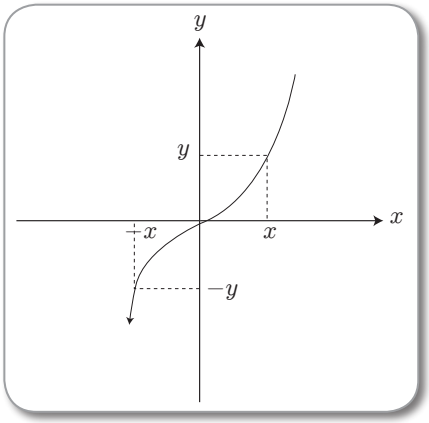
1. La función $f(x)=x^2+1$ es par porque,
$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$

   Por lo tanto: $f(-x)=f(-x)$, esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Función impar

Si f satisface la condición de: $f(-x)=-f(x)$, es una función impar en todo su dominio.

Como se ve en la gráfica es simétrica con respecto al origen.



2. Verifique que $y=x^3$ es impar.

   Sea $f(-x)^3=-x^3=-f(x)$, por lo tanto es impar.

3. Pruebe que $f(x)=2x^5-7x^3+4x$ es impar.

$$\begin{aligned} f(-x)&=2(-x)^5-7(-x)^3+4(-x)\\ &=-2x^5+7x^3-4x\\ &=-(2x^5-7x^3+4x)\\ &=-f(x) \end{aligned}$$

   Como $f(-x)=-f(x)$ es impar,

4. Verifique si f, definida como $y = \sqrt{1-x^2}$ es par.

   $Dom(f) = [-1,1]$ es simétrico y

   $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$,

   por lo tanto f es par.

5. Verifique si f, definida como $f(x) = y = \dfrac{1}{1+x^2}$, es par.

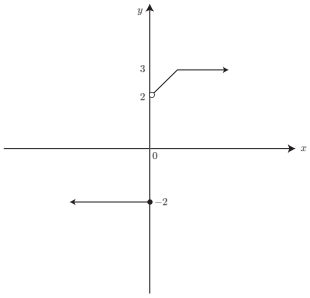
   $Dom(f) = \mathbb{R}$ es simétrico y $f(-x) = \dfrac{1}{1+(-x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} = f(x)$,

   por lo tanto f es par.

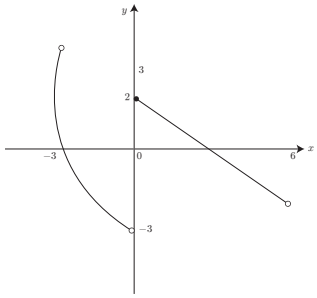
Ejercicio 4.1

1. Dada la gráfica de f, determine: $Dom(f)$, $Rec(f)$.

a.



b.



2. Calcule $f(3)$, $f(-5)$, $f(1/x)$, $f(2x+5)$ para cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = -5x + 3$

b. $f(x) = -x^2 + 3x + \mathrm{b}$

c. $f(x) = \ln(3x + 1)$

d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

e. $f(x) = e^{1/(x-3)}$

f. $f(x) = (1 - x^2)^2$

g. $f(x) = \frac{2x+3}{3-4x}$

h. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{3-4x^2}}$

i. $f(x) = \frac{\frac{1}{2x}+3}{9-x^2}$

3. Para cada una de las siguiente funciones halle el dominio y el recorrido:

a. $f(x) = (2/x) - 1$

b. $f(x) = \sqrt{x+4}$

c. $f(x) = 2/x(x-1)$

d. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

e. $f(x) = 1/(x^2-1)$

f. $f(x) = x/(x-1)$

g. $f\ (x) = x^2 + 2x + 5$

h. $f(x) = |x| - 2$

4. Halle el dominio de f donde:

a. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

b. $f(x) = \ln(1/x - 3)$

c. $f(x) = \frac{2x+3}{x^3+27}$

d. $f\ (x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x-2}$

e. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2-3}{6-x}}$

f. $f\ (x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-2x-35}}$

g. $f(x) = \frac{x+7}{e^{2x-9}-1}$ h. $f(x) = \frac{\ln(2x+3)}{e^{2x}-7e^{x}+12}$

5) Determine el dominio y trace las gráficas de la función dada:

a) $f(x) = 4$

b) $f(x) = -6$

c) $f(x) = x+1$

d) $f(x) = \frac{x+1}{2} \quad -3 \leq x \leq 3$

e) $f(x) = x^3 + 1$

f) $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

g) $r(x) = \frac{2}{x+4}$

i) $h(x) = |x|$

j) $\tau(x) = |x^2 - 1|$

k) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

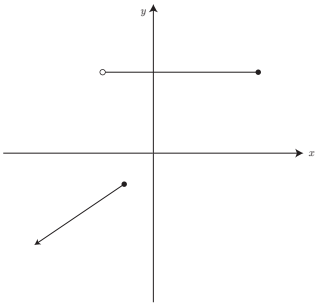
l) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

m) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{es } x > 1 \end{cases}$

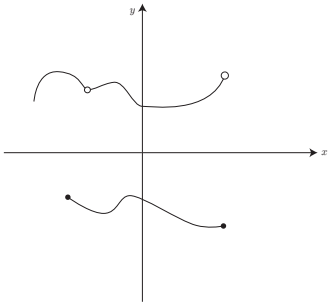
n) $h(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

6. Dadas las gráficas determine si es función o no.

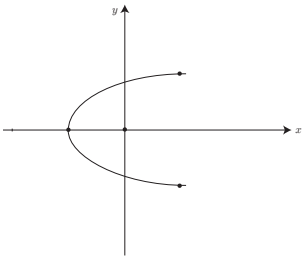
a)



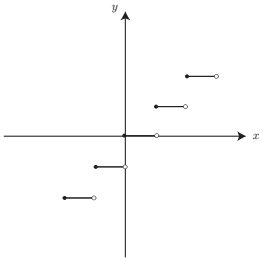
b)



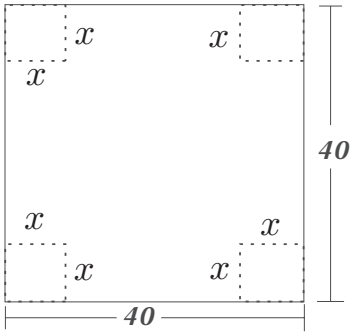
c)

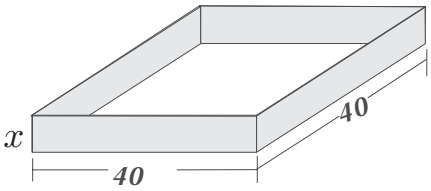


d)



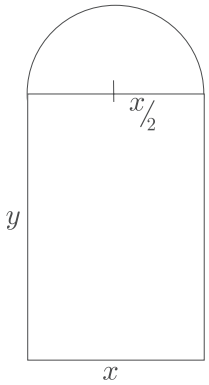
7. a) Con una hoja cuadrada de cartón cuyas dimensiones son 40 x 40 cms., se debe construir una caja abierta, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y luego, doblar el borde hacia arriba como se muestra en la figura siguiente:





Exprese el volumen de la caja en función de la altura x

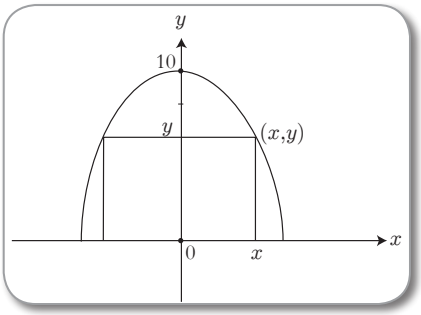
b) La puerta de una iglesia tiene la forma de un rectángulo coronado por una semicircunferencia, como se ilustra en la figura:



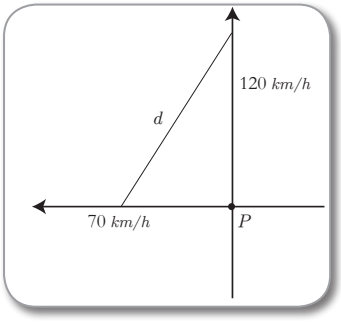
Si el perímetro de la puerta es de 220 pies, construya una función que exprese el área de función de x

c) Un arco tiene forma de parábola, $y = 10 - x^2$ bajo el arco se inscribe un rectángulo seleccionando un punto de la parábola.

Exprese el arco del rectángulo en términos de x.



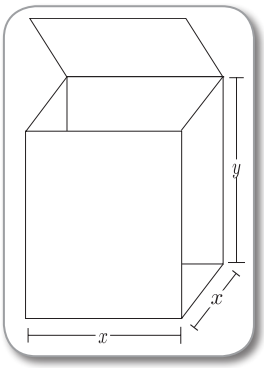
d) Dos lanchas salen de un puerto al tiempo, uno hacia el Oeste a 70 km/h, y el otro hacia el Norte a 120 Km/h. Si t es el tiempo (en horas) después de su salida. Exprese una función de distancia d, entre las dos lanchas, t horas después.



e) Un agricultor desea cercar un campo rectangular con 2.500 pies de cerca. Si el campo está limitado en uno de sus lados por un río (y no requiere cerca), construya una función de área $A(x)$ como una función de su ancho.

f) La suma de dos números es 100. Exprese el producto de estos como una función del número menor.

g) Una caja con tapa, de base cuadrada tiene un área total de 3.500 cm Exprese el volumen como una función de la base.



h) Producir cierto artículo cuesta $p=70x+30$ dólares, donde x es el número de artículos producidos y vendidos. Si todas las x unidades se venden a este precio, construya una función de ingresos obtenidos de las ventas como una función del número de unidades vendidas.

Halle el modelo matemático para expresar:

i) El área de un rectángulo de 20 ms de perímetro, en función de la base x.

j) El costo promedio de una unidad, si el costo de x unidades está dado por la función $\mathrm{C}(x)=350x+24500$.

k) Una población actual $\mathrm{P_o}$ en función del tiempo t en años, si esta tiene un crecimiento anual del 4%.

l) El ingreso de x unidades, si el precio unitario es $p=200(1+0.05x)$.

m) El área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio r, en función de r.

n) El área de un rectángulo de base x y de perímetro igual a 200 cms.

Álgebra de funciones

Definición

Sean f y g dos funciones y D_f y D_g los dominios de f y g respectivamente; entonces definimos las funciones $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y $\frac{f}{g}$, llamadas respectivamente suma, diferencia, producto y cociente, como sigue:

$$f + g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) + g(x) \text{ y } x \in (D_f \cap D_g)\}$$

$$f - g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) - g(x) \text{ y } x \in (D_f \cap D_g)\}$$

$$f \cdot g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \cdot g(x) \text{ y } x \in (D_f \cap D_g)\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0 \text{ y } x \in (D_f \cap D_g)\}$$

Ejemplos

1. Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x + 1$, calcular $f + g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$, en x=4

Debemos determinar si las funciones están definidas en x=4

$$f(4) = \sqrt{4} = 2 \quad \text{y} \quad g(4) = 2 \cdot (4)+1=9$$

$$(f + g)(4) = f(4) + g(4) = 2+9 = 11$$

$$(f - g)(4) = f(4) - g(4) = 2-9 = -7$$

$$(f \cdot g)(4) = f(4) \cdot g(4) = 2 \cdot 9 = 18$$

Como $g(4)\neq 0$, tenemos que: $\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{2}{9}$

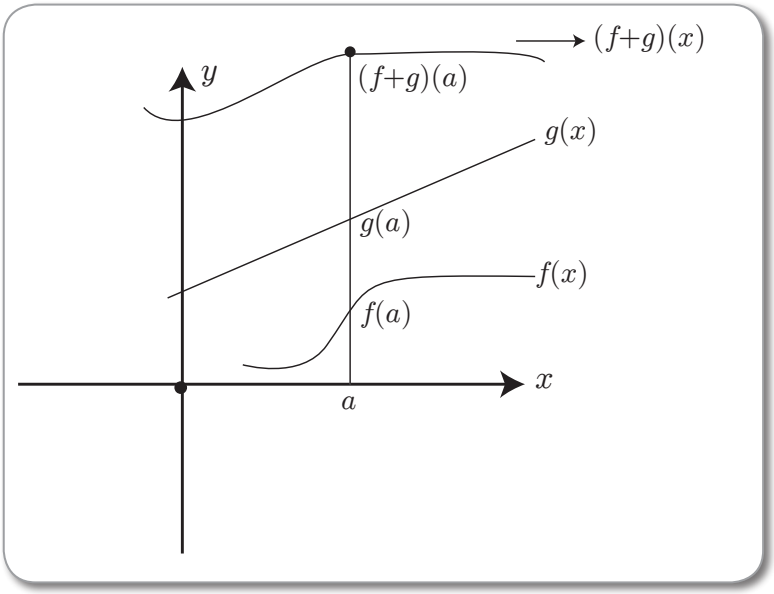
2. Dadas f y g definidas como: $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 1$, definir las funciones:

$f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ y $7 \cdot f$

$$
\begin{aligned}
(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\
&= (x^2 + 1) + (x - 1) = x^2 + x \\
(f - g)(x) &= f(x) - g(x) = (x^2 + 1) - (x - 1) \\
&= x^2 - x + 2 \\
(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 1)(x - 1) \\
&= x^3 - x^2 + x - 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f/g)(x) &= f(x)/\, g(x) = (x^2 + 1)/(x - 1) \\
(g/f)(x) &= g(x)/\, f(x) = (x - 1)/(x^2 + 1) \\
(7 \cdot f)(x) &= 7 \cdot f(x) = 7(x^2 + 1) = 7x^2 + 7x
\end{aligned}
$$

Interpretando la gráfica:



De $f+g$ se obtiene de sumar las gráficas de f como de g, esto significa sumar las coordenadas correspondientes a f y g .

Ejercicio 4.2

1. Dadas f, g,h definidas como
   $f(x) = -x^2 + 9, g(x) = \sqrt{2x - 7}, h(x) = 5x$

   a. $f(7)$ b. $g(5x)$

   c. $h(3a + 2)$ d. $g(x^2 + 3)$

   e. $g(f(x + 5))$ b. $g(x^2 + 3)$

2. Sean $f(x)=x^2$ para $-2\leq x\leq 1$ y $g(x)=3x+4$ para $0\leq x\leq 3$.

   a. Calcule: $(f + g)(\frac{1}{2})$; $(f - g)(\frac{1}{2})$; $(f \cdot g)(1)$; $(f/g)(\frac{1}{3})$

   b. Defina para x: $f + g$; $f - g$; $f \cdot g$; f/g

3. Sean $f(x)=2x+5$ y $g(x)= x-3$

   a. Calcule $(f + g)(3)$; $(f-g)(2)$; $(f \cdot g)(-2)$; $(f/g)(-5)$

   b. Defina para x: $f + g$; $f-g$; $f \cdot g$; f/g

4. Dadas $f=\{(1,1), (2,4), (3,9), (-1,1), (-2,4), (-3,6)\}$ y
   $g =\{(1,4),(2,1),(4,5),(-2,4)\}$.
   Defina los valores e indique el dominio y recorrido de cada una de las siguientes funciones:

   a. $f + g$ b. $f - g$

   c. $f \cdot g$ d. f / g

5. Sean $f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x- 2\}$ y $g=\{(x,y) \in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2+7\}$.

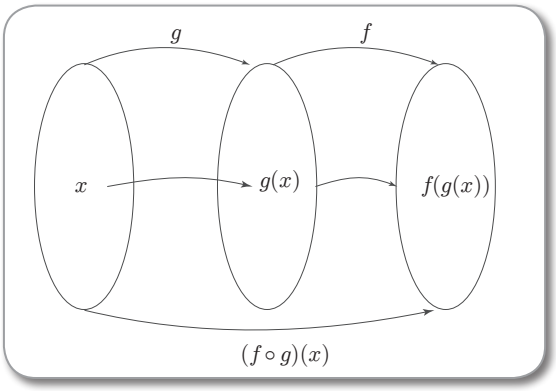
   Defina para x las siguientes funciones:

   a. $f + g$ b. $f - g$

   c. $f \cdot g$ d. f / g

Composición de funciones

Existe otra manera de combinar funciones para obtener una nueva función llamada composición de funciones.



Por ejemplo:

Sea $f(u) = \sqrt{u+1}$ y $u(x) = x^2 - 1$

Puesto que f depende de u y a su vez depende de x, por lo tanto f es una función que depende de x así:

$$\begin{aligned} f(u) = f(u(x)) = f(x^2-1) &= \sqrt{[u(x)]^2 - 1} \\ &= \sqrt{(x^2-1)+1} \\ &= \sqrt{x^2} = x \end{aligned}$$

A este tipo de combinación de funciones se le llama composición de funciones, la nueva función está compuesta por las dos funciones f y g.

Definición
Dadas dos funciones f y g. La función compuesta de f y g, que se nota $(f \circ g)(x)$ se define como: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

¿Cómo es el dominio de f y g?

Son todos los valores x del dominio de g tal que $g(x)$ pertenezca al dominio de f.

Ejemplos

1. Encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios respectivos, si:

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = x^2$$

Solución

1. $(f \circ g)_{(x)} = \quad f(g(x)) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{x^2-1}$

$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) \geq 0$

Intervalos	$x+1$	$x-1$	$(x+1)(x-1)$
$(-\infty,-1)$	$-$	$-$	$+$
$(-1,1)$	$+$	$-$	$-$
$(1,\infty)$	$+$	$+$	$+$

Por lo tanto
$Dominio\ (f \circ g)(x) = (-\infty, -1] \cup [1,\infty)$

2. $(g \circ f)_{(x)} = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 = x - 1.$

$Dominio\ (g \circ f) = (-\infty, \infty)$

2. Sean f y g funciones definidas como: $f(x)=x^2+3$, $g(x)=2x-5$

Evaluar: a. $(f \circ g)(7)$; b. $(g \circ f)(3a)$; c. $(f \circ f \circ g)(x)$

a. $(f \circ g)(7) = f(g(7))$, pero
$g(7) = 2.(7) - 5 = 9$, por lo tanto
$(f \circ g)(7) = f(9) = 9^2+3 = 84$

b. $(g \circ f)(3a) = g(f(3a))$, pero
$f(3a) = (3a)^2 + 3 = 9a^2 + 3$, por lo tanto
$(g \circ f)(3a) = g(9a^2+3) = 2(9a^2+3) - 5 = 18a^2 + 6 - 5 = 18a^2 + 1$

c. $(f \circ f \circ g)(x) = f(f(g(x)))$
$(f \circ f \circ g)(x) = f(f(2x-5))$, pero
$f(2x-5) = (2x-5)^2+3 = 4x^2-20x+28$, por lo tanto:

$$(f \circ f \circ g)(x) = f(4x^2-20x+28)$$
$$= (4x^2-20x+28)^2+3$$

3. Sea s la función definida como $y = s(x) = \sqrt{1 + x^2}$, expresarla como la compuesta de dos o más funciones. Al evaluar s(x) hallamos primero $1+x^2$ y a esta expresión le sacamos su raíz cuadrada, es decir podemos definir las funciones:

   $z = f(x) = 1 + x^2$, $y = g(z) = \sqrt{z}$, tales que:

   $y = g(z) = g(f(x))$, por lo tanto $s = g \circ f$

4. Sea s la función definida como $y = s(x) = \frac{2}{(3x-1)^2}$ expresarla como la compuesta de dos o más funciones.

   Al evaluar $S(x)$ hallamos primero $3x-1$, a esta expresión la elevamos al cuadrado, y luego realizamos el cociente entre 2 y esa expresión, es decir podemos definir las funciones:

   $z = f(x) = 3x + 1, u = g(z) = z^2$, $y = h(u) = 2/u$ tales que:

   $y = h(u) = h(g(z)) = h(g(f(x)))$, por lo tanto,

   $s = h \circ g \circ f$

Ejercicio 4.3

1. Sean f y g funciones definidas en $A = \{2,3,4,5,6\}$ donde:
   $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 6$, $f(5) = 2$, $f(6) = 5$,
   $g(2) = 5$, $g(3) = 6$, $g(4) = 5$, $g(5) = 3$ y $g(6) = 2$.

   Encuentre:

   a. $(f \circ g)(2)$
   b. $(f \circ g)(3)$
   c. $(f \circ g)(5)$
   d. $(f \circ g)(4)$
   e. $(f \circ g)(6)$
   f. $(g \circ f)(2)$
   g. $(g \circ f)(3)$
   h. $(g \circ f)(5)$
   i. $(g \circ f)(4)$
   j. $(g \circ f)(6)$

2. Si $f(x) = 2x^2 + 6$ y $g(x) = 7x + 2$. Encuentre:

   a. $(g \circ f)(4)$ b. $(f \circ f)(3)$

   c. $(g \circ g)(2)$ d. $(f \circ g)(5)$

   e. $(g \circ f)(5)$ f. $(f \circ f)(x)$

   g. $(g \circ f)(x)$ h. $(f \circ g)(x)$

   i. $(g \circ g)(x)$

3. Sean $f(x) = 3x - 7$ y $g(x) = 2x + k$. Determine el valor real k tal que: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

4. Si $f(x) = 2x + 7$ y $g(x) = ax - 3$, halle a tal que: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

5. Sea $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = -5x + 2$.

   a. Determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

   b. Determine $(f \cdot g)(x)$ y $(g \cdot f)(x)$ y compare estos productos con los resultados de la parte a.

   c. Halle x, tal que $(f \circ g)(x) = 2$

6. Verifique que $(f \circ f \circ f)(x) =$ si $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

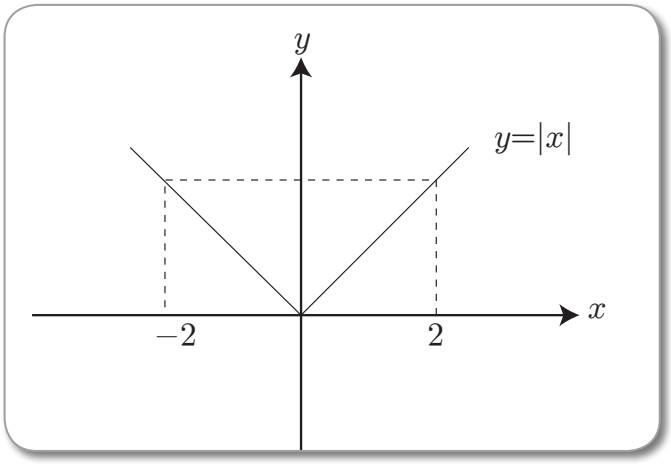
7. Halle el modelo matemático para expresar:

   a. Grados Kelvin (°K) en función de grados Farhrenheit (°F). Si x representa °F, recordemos que: $z = f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ expresa grados Centígrados (°C) en función de °F y $y = g(z) = z + 273$ expresa °K en función de grados °C.

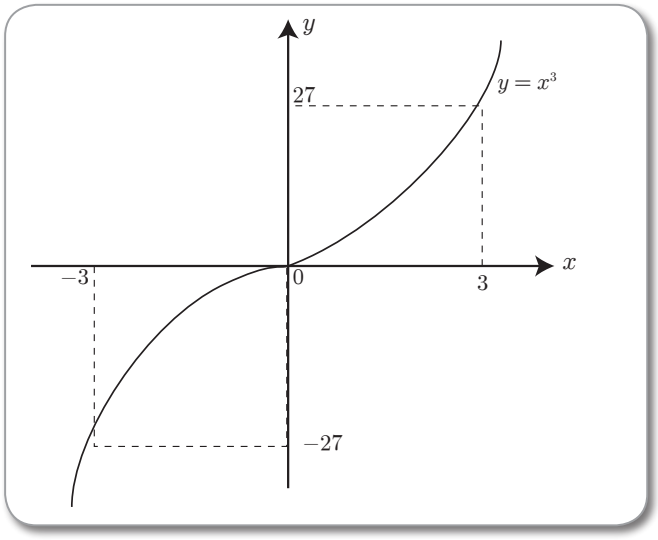
   b. El volumen de una esfera en función del tiempo t, si volumen de una esfera de radio r está dado por $V = (4/3)\pi r^3$ y el radio de la esfera crece en función del tiempo $r = t + \sqrt{2t}$.

Función inyectiva o uno a uno

Consideremos la función $y = |x|$ para lo cual tomamos dos valores reales diferentes de su *dominio*, por ejemplo -2 y 2 en el cual su imagen es $f(-2) = f(2)$ equivalente a $|-2| = |2|$ que son iguales, como se muestra en la siguiente figura:



Para que una función sea Inyectiva o uno a uno, se necesita que dados dos elementos distintos de su dominio, sus imágenes sean distintas en el conjunto de llegada o recorrido como en este ejemplo. Sea $y=x^3$, si tomamos dos valores reales diferentes de su dominio: $-3\neq 3$ las imágenes son diferentes $f=(-3)=(-3)^2=-27$ y $f(3)^2=27$, por lo tanto $y=x^3$ es función uno a uno, mientras que $y=|x|$ no lo es.



Definición de función inyectiva

Una función f con dominio en A y recorrido en B es inyectiva (uno a uno) si cumple una de las condiciones siguientes:

1. Dados dos elementos del dominio distintos sus respectivas imágenes son diferentes, es decir:

$$Si\ x_1 \neq x_2, \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

2. O lo mismo si las imágenes de las funciones son iguales, entonces los elementos del dominio de f son iguales, es decir:

$$Si\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

La explicación de la definición anterior de las dos condiciones viene dada de la lógica matemática, se tiene que la condición 1 es equivalente a la 2, es decir, se cumple la ley del contrarrecíproco, si se tiene una implicación $p \rightarrow q$, su contrarrecíproco es $\neg p \rightarrow \neg q$ así:

$$Si\ x_1 \neq x_2, \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

NOTA: para demostrar que una función f es uno a uno, es mas cómoda trabajar con la definición 2.

Ejemplos

1. Probar que la función $f(x) = 3x - 1$ es inyectiva.

   Solución

   Debemos probar que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,
   Sea $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$ cancelamos (-1) entonces $3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ de esta manera $f(x) = 3x - 1$ es inyectiva.

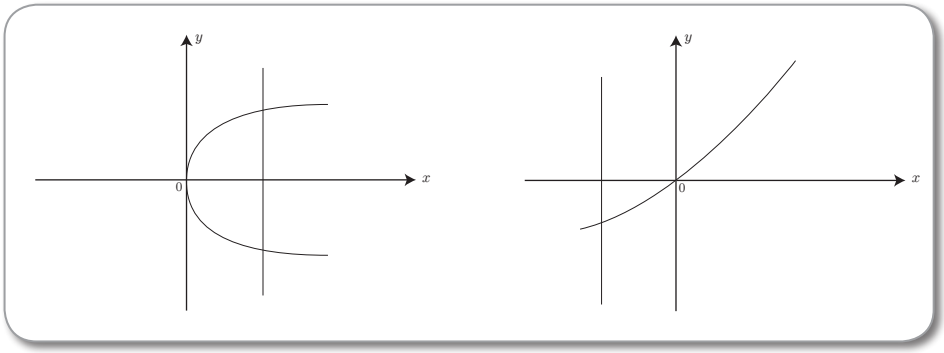
2. Probar que la función $f(x) = x^2$ no es inyectiva.

Solución

Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \pm \sqrt{x_2^2} \Rightarrow x_1 = \pm x_2$, luego, $x_1 = x_2$ ó $x_1 = -x_2$ ó así tienen la misma imagen es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ para elementos distintos $x_1 \neq x_2$, por tanto $f(x) = x^2$ no es uno a uno o inyectiva y no cumple que si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Criterio de la línea vertical

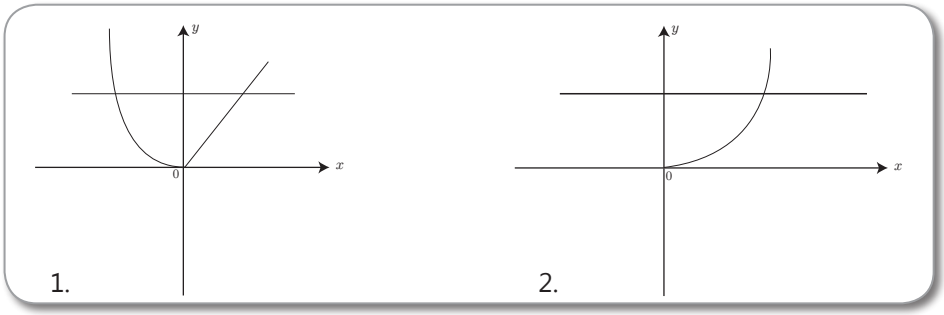
Para saber si una relación es función mediate su gráfica se traza una línea paralela al eje y si corta a la gráfica de la relación solamente en un punto, la relación es función.



No es función Es función

Criterio de la línea horizotal

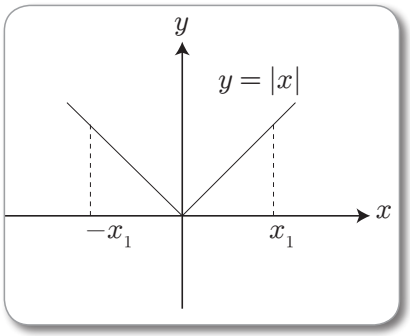
Para saber si una función es uno a uno mediate su gráfica se traza una línea paralela al eje x y si corta a la gráfica de la función solamente en un punto, la función es uno a uno o inyectiva



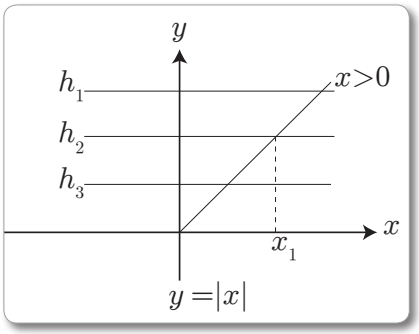
No es uno a uno Es uno a uno

Si observamos la gráfica 1, no es uno a uno porque la recta horizontal corta a la gráfica de f en más de un punto, mientras que en la gráfica 2 solo la corta en un solo punto.

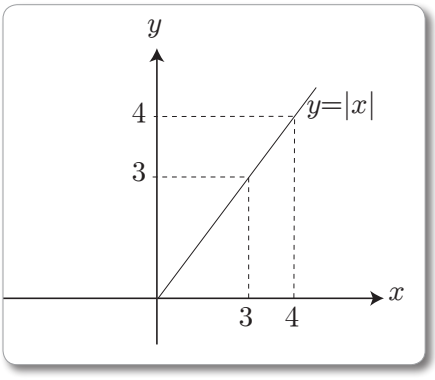
3. La función $y=|x|$ no es uno a uno por el criterio de la recta horizontal, ya que la recta corta a la gráfica en mas de un punto. Una vez se reafirma que $f(x_1)= f(x_2)$ pero $x_1 \neq x_2$.



En el ejemplo anterior una restricción del dominio de f para que la función sea uno a uno, por ejemplo: $Df = [0, +\infty]$. La gráfica nos queda de la siguiente forma:



Se observa que al trazar rectas horizontales en cualquier parte de la gráfica de la función y la corta en un solo punto, de esta manera la función es uno a uno; además si tomamos dos elementos distintos del domino de la función sus imágenes son diferentes, por ejemplo: $3 \neq 4$, entonces $|3| \neq |4|$.



Se observa que cumple que si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, es decir dos imágenes distintas, porque dos elementos del dominio son diferentes.

Función inversa

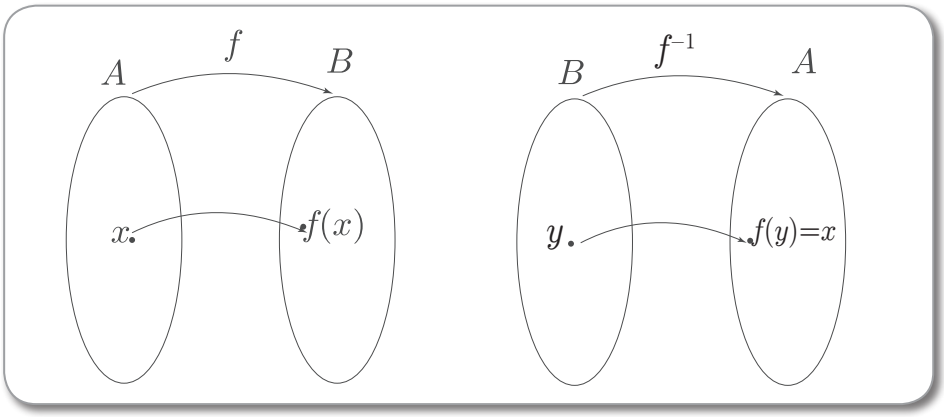
Si tenemos una función inyectiva o uno a uno con dominio A y recorrido B, es decir f: $A \rightarrow B$ podemos definir una función denotada f^{-1} en la cuál el dominio pasa a ser el recorrido de B y el recorrido pasa a ser el domino de B es decir:

$$D_A = R_B$$

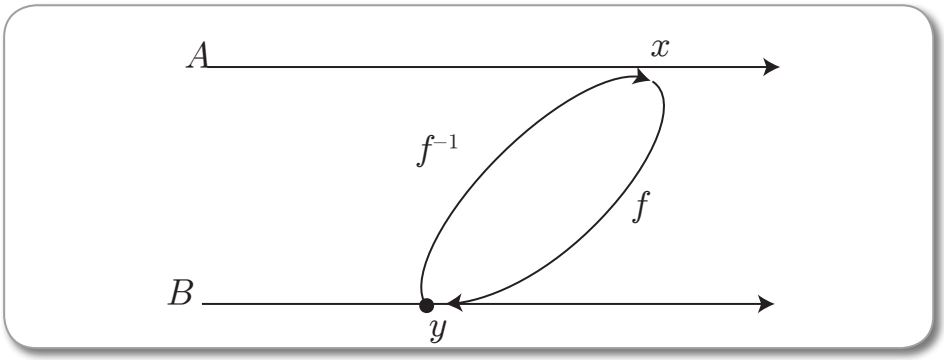
y

$$R_A = D_B$$

f^{-1}:$B \rightarrow A$ que es la función inversa de f como se muestra en las siguientes figuras:



Definición: si f es una función uno a uno con dominio A y recorrido B, entonces la función f^{-1} con dominio B y recorrido A es la función inversa de f si se cumple $y=f(x) \leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, la definición anterior significa que f transforma x en y, mientras que f^{-1} transforma y en x.



Ejemplo

Dada la función $f(x) = 3x - 1$, la función inversa es $\frac{x+1}{3} = f^{-1}(x)$, por ejemplo la coordenada $(2, 5) \in f$, porque $f(2) = 3(2) - 1 = 5$ mientras que, $(5,2) \in f^{-1}$ porque $f^{-1}(5) = \frac{5+1}{3} = 2$.

Advertencia
Hay que tener precaución de no confundir el -1 del exponente f^{-1},es decir f^{-1} no significa $\frac{1}{f(x)}$.

Pasos para determinar la función Inversa de una función inyectiva:

1. Escribir $y = f(x)$.
2. Despejar en $f(x)$ (si es posible).
3. Intercambiar las variables x y y, por lo tanto la ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

Ejemplos

1. Hallar la función inversa de $y = x^3 + 4$

   a. Sea $y = x^3 + 4$

   b. Despejamos la variable x

   $y = x^3 + 4 \Rightarrow y - 4 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-4}$, ahora intercambian las variables x y y
   $y = \sqrt[3]{x - 4}$

Propiedad

$$(f \circ f)_{(x)} = f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$(f^{-1} \circ f)_{(x)} = f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Comprobar que la función $g(x) = \sqrt[3]{x - 4}$ es la función inversa de: $f(x) = x^3 + 4$.

Solución

Sea $(f \circ g)_{(x)} = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-4}) = (\sqrt[3]{x-4})^3 + 4 = x - 4 + 4 = x$

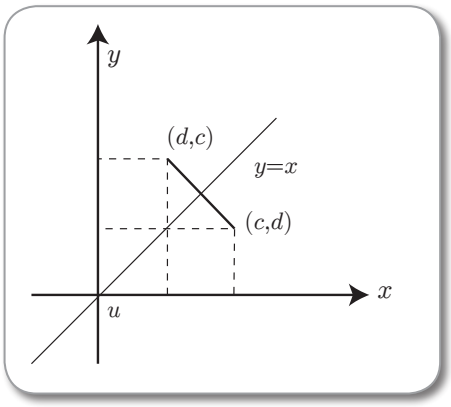
por otra parte $g(f(x)) = g(x^3+4) = \sqrt[3]{(x^3+4)-4} = \sqrt[3]{x} = x$

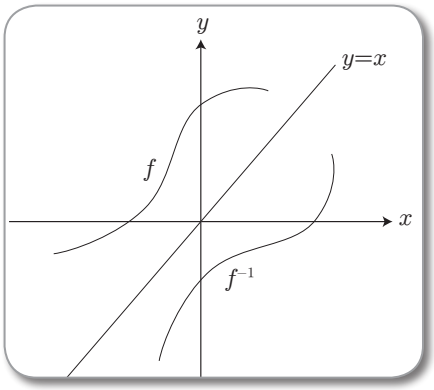
por lo tanto $(g \circ f)(x) = x$, así g es la inversa de f.

Gráfica de la función inversa

La gráfica f^{-1} se obtiene reflejando gráfica de f en la recta $y = x$.

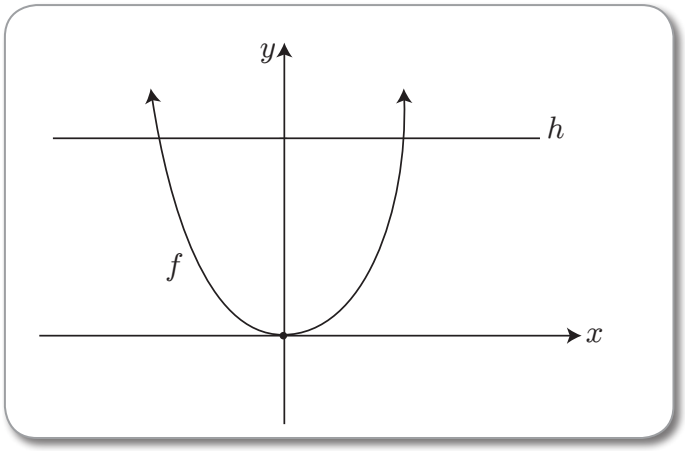
Si observamos el punto (a,b) al reflejarlo en $y=x$ queda en la coordenada (b,a), ahora si tenemos una gráfica $y=f(x)$ y se refleja en $y=x$ nos da la gráfica de la inversa de f.





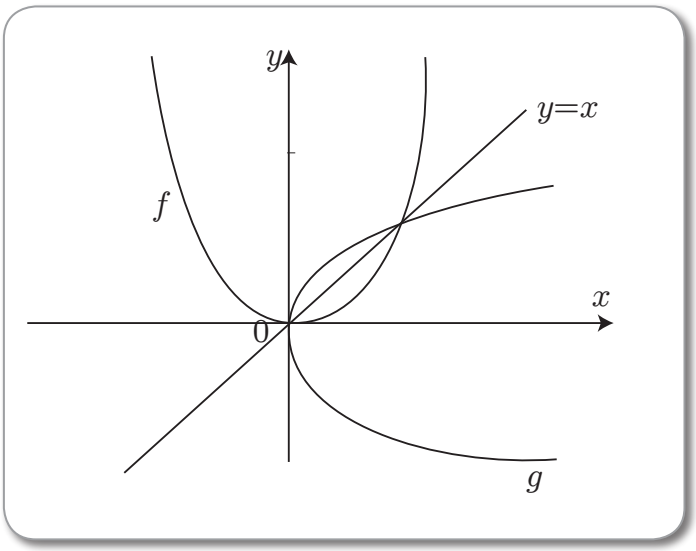
La pregunta que surge es si la función f no es uno a uno, es decir, como queda la gráfica de la función inversa.

Mostremos la gráfica de f que no es uno a uno, haciendo la prueba de la recta horizontal al reflejar f en $y = x$ obtenemos la siguiente gráfica:



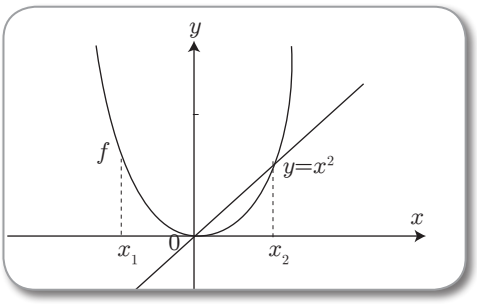
no es uno a uno

Como observamos la gráfica de f no es función al hacer la prueba de la línea vertical, esta es la razón por la cual necesitamos que el original sea uno a uno y por esto, es importante restringir el dominio de f. Para garantizar que la función f tenga inversa f^{-1}.

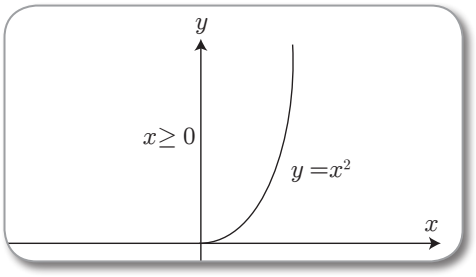


Ejemplo

La función $y=x^2$ no es uno a uno en todos los reales, si restringimos el dominio para $x\geq 0$, la función tiene inversa.



no es uno a uno

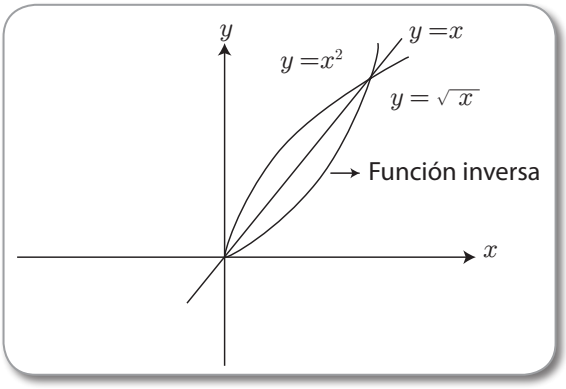


es uno a uno

Solución

Sea $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ de esta manera f es uno a uno y tiene inversa.

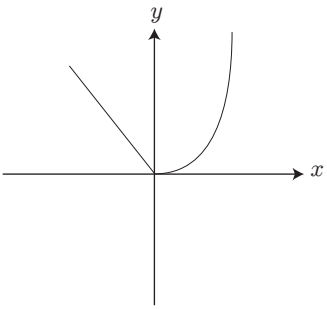
Sea $y = x^2 \Rightarrow x = y$ si intercambiamos las variables entonces $\sqrt{x} = y$



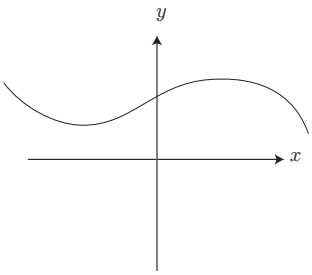
Ejercicio 4. 4

1. ¿Cuál de las siguientes funciones son uno a uno?

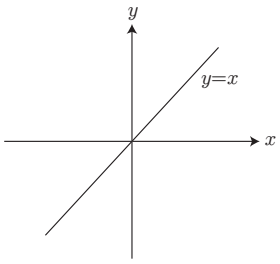
a)



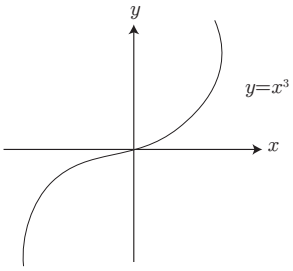
b)



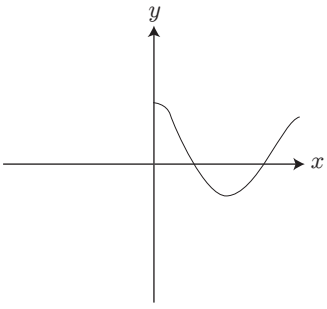
c)



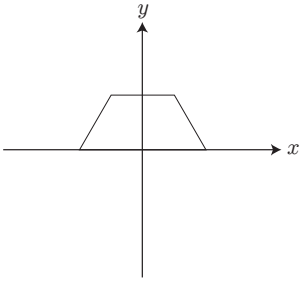
d)



e)



f)



2) Determinar si cada una de las siguientes funciones son uno a uno.

a. $f(x) = 7x - 1$
b. $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$
c. $f(x) = x^3$
e. $f(x) = x^2 + 1$
d. $f(x) = x^2 + x$ para $x \geq -\frac{1}{2}$
f. $f(x) = \sqrt{x}$

3) Demuestre que es uno a uno y halle su inversa.

a) $f(x) = 2x - 1$
b) $g(x) = \frac{x-3}{x+3}$
c) $h(x) = \sqrt{2 + 5x}$
d) $f(x) = x^2$ para $x \leq 0$
e) $h(x) = \sqrt{x + 1}$
f) $f(x) = 4x - 1$

4) Dadas la función $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = \frac{x-1}{2}$ y verificar que f y g son inversas.

5) Dada la función $f(x) = \frac{1+x}{3-x}$.

a) Muestre que f es uno a uno

b) Encuentre f^{-1}

c) Verifique $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

d) Halle el Dominio y el Recorrido de f y f^{-1}

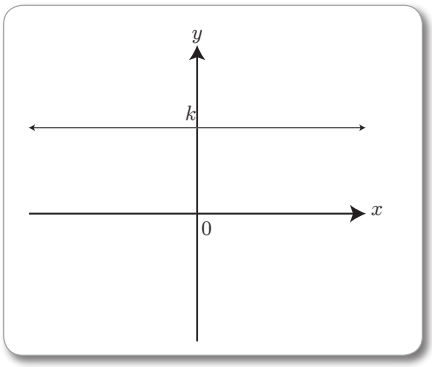
Tipos de funciones

Vamos a mencionar algunas funciones que usualmente se utilizan en cálculo

Las funciones se clasifican de la siguiente manera:

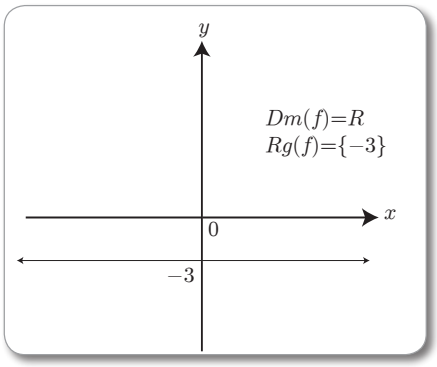
- Función constante
- Función potencia
- Función raíz
- Función polinómica
- Función racional
- Función algebraica
- Funciones exponenciales y logarítmicas
- Funciones trigonométricas
- Función valor absoluto.

a) Función constante



La función $f(x)=k$ se denomina función constante, donde el dominio son los números reales y el recorrido es el conjunto $\{k\}$. La gráfica es la recta horizontal.

En particular para $f(x)=-3$, la gráfica es:

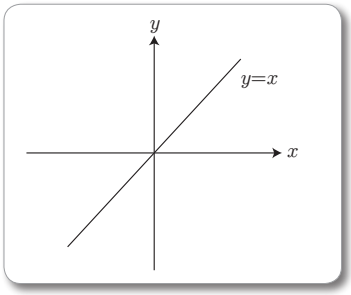


b) Función potencia

Una función de la forma $f(x)=x^n$ donde n es una constante, se llama función potencia.

Tomemos casos particulares. Sea n un entero positivo.

- Si $n=1$ la función se convierte en $f(x)=x$ esta función se convierte en $f(x)=x$, esta función se denomina función idéntica (recta que pasa por el origen) cuyo dominio y recorrido son los reales.



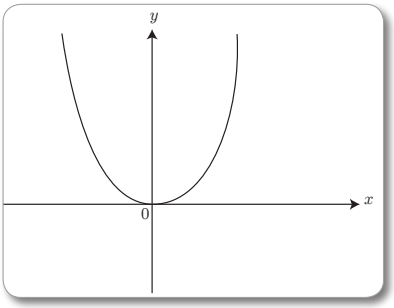
$Dm(f)=\mathbb{R}$

$Rec(f)=\mathbb{R}$

- Si n=2, la función toma la forma $f(x)=x^2$ que se denomina función cuadrática.

$$Dm(f)=\mathbb{R}$$

$$Rec(f)=[0,\infty)$$

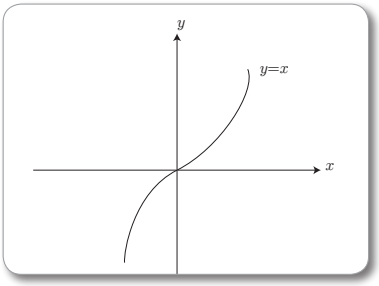


El dominio es $\mathbb{R}$, y el recorrido es $[0,+\infty]$.

- Si n=3 la función es $f(x)=x^3$ que se denomina función cúbica.

$$Dm(f)=\mathbb{R}$$

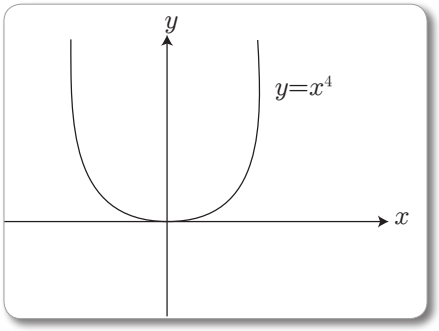
$$Rec(f)=\mathbb{R}$$



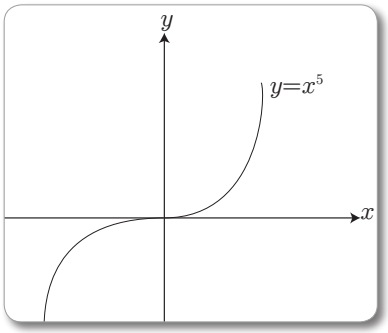
Donde el dominio y recorrido son los reales. En general, en la función $f(x)=x^n$, se pueden hacer las siguientes consideraciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \text{ es función par si } n \text{ es par} \\ x^n \text{ es función impar si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Si tomamos el caso particular de n= 4 y n=5

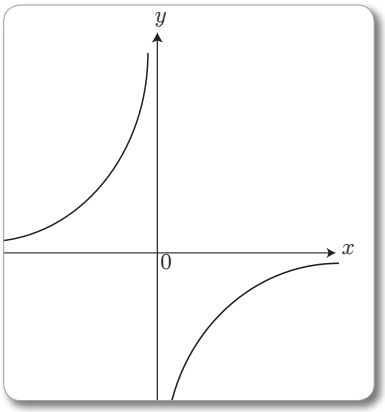


Función par



Función impar

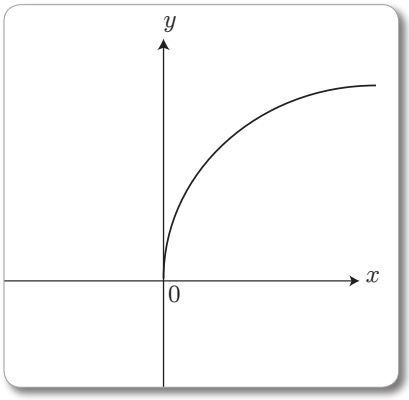
Ahora si tomamos a $n{=}-1$ la función se convierte en $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ cuya gráfica es:



Donde el dominio y el recorrido son los reales diferentes de cero.

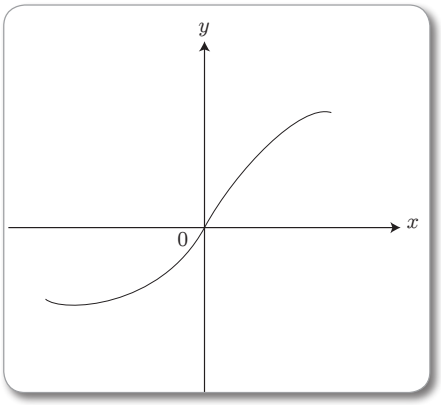
c) Función raíz

Si , $n = \frac{1}{k}$ donde k es un entero positivo, la función $f(x){=}x^n$ se convierte en $f(x) = x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$, en particular para $k{=}2$ la función es $f(x) = \sqrt{x}$, que se denomina función raíz cuadrada.



$$Dom\ (f) = [0, +\infty), Rec\ (f) = [0, +\infty)$$

Para $k{=}3$ tenemos la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$,que su gráfica es:



Su dominio son los números reales, y su recorrido son los números reales.

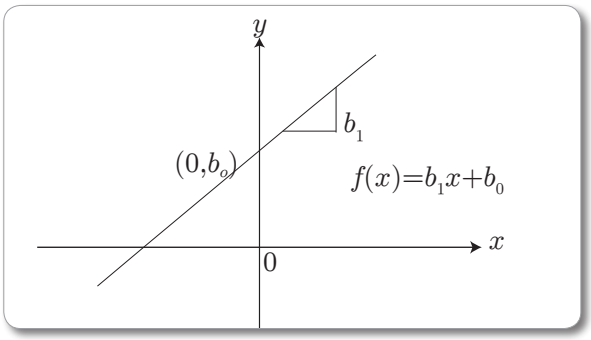
d) Función polinómica

Una función que tiene la forma $Q(x)=b_n x^n - b_{n-1}x^{n-1}+....+b_0$

Se llama función polinómica, donde b_o, b_1,...,b_n, son constantes. En este caso el dominio son los números reales.

Si $b\neq 0$, entonces el grado del polinomio es n.

Por ejemplo, la función $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x + \sqrt{3}$ es un polinomio de grado 3, si $n=1$, la función toma la forma $b_1x+b_o=f(x)$ que es una recta con pendiente $m=b_1$ y corta al eje y en $(0, b_o)$. Esta función se llama función lineal.



- Si $n=2$. La expresión de la función es: $f(x) = b_2x^2 + b_1x + b_o$ y se denomina función cuadrática.

e) Función racional

Una función racional se define como el cociente de dos funciones polinomicas $P(x)$ y $Q(x)$.

$$f(x)= \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{x|\, Q(x) = 0\}$$

Ejemplos

1. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

   Es una función racional con dominio $(-\infty,1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

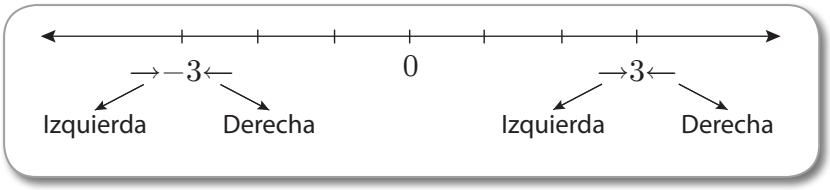
2. Hacer el análisis de la función f definida: $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$

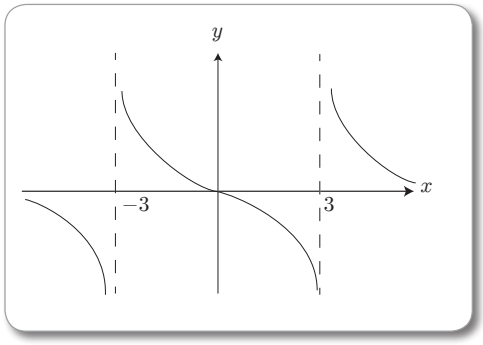
   $x^2-9 = 0$ tiene como soluciones $x=-3$ y $x=3$, por lo tanto $Dom(f) = \mathbb{R}-\{-3,3\}$.

Al remplazar $x{=}{-}3$ y $x{=}3$ obtenemos las indeterminaciones $\frac{-3}{0}$ y $\frac{3}{0}$.

Asíntotas verticales y horizontales

Observando el ejemplo anterior donde $f(x) = \frac{x}{x^3-9}$ evaluamos la función en valores próximos a $x{=}{-}3$ y a $x{=}3$ tanto por la izquierda como por la derecha. Como se observa en la figura:





Para $x{=}{-}3$, evaluemos $f(x)$ en $x{=}{-}3{,}01$ y $x{=}{-}3{,}001$ (se aproximan a -3 por la izquierda) y,

$$f(-3{,}01) = \frac{-3{,}01}{(-3{,}01)^2-9} = -50{,}08$$

$$f(-3{,}001) = \frac{-3{,}001}{(-3{,}001)^2-9} = -500{,}08$$

Para $x{=}-2{,}99$ y $x{=}{-}2{,}999$ (se aproximan a -3 por la derecha)

$$f(-2{,}99) = \frac{-2{,}99}{(-2{,}99)^2-9} = 49{,}9$$

$$f(-2{,}999) = \frac{-2{,}999}{(-2{,}999)^2-9} = 499{,}9$$

Observemos que cuando el valor x de tiende a -3 por la izquierda el valor de $f(x)$ tiende a $-\infty$, se nota: $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -3^-$ y cuando x tiende a -3 por la derecha el valor de $f(x)$ tiende a ∞.

$f(x) \to \infty$ cuando $x \to -3^+$

En general, si en $x=a$, $f(a)$ no está definida tenemos una indeterminación de la forma $k/0$, si $k \neq 0$, la recta $x = a$ es una **asíntota vertical**.

Como $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$ otro elemento que contribuye al análisis de la función es determinar qué ocurre con $f(x)$ cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to \infty$.

Cuando $x \to +\infty$ evaluamos $f(x)$ por ejemplo en $x=-100$ y $x=-1.000$

$$f(-100) = \frac{-100}{(-100)^2 - 9} = -0{,}01$$

$$f(-1000) = \frac{-1000}{(-1.000)^2 - 9} = -0{,}001$$

Cuando $x \to -\infty$ evaluamos $f(x)$ por ejemplo en $x=100$ y $x=1.000$

$$f(100) = \frac{100}{(100)^2 - 9} = 0{,}01$$

$$f(1000) = \frac{1000}{(1.000)^2 - 9} = 0{,}001$$

Observemos que: $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$ y $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$

En este caso la recta $y=0$ es una **asíntota horizontal**.

En general si $f(x) \to k$ cuando $x \to -\infty$ o $f(x) \to k$ cuando $x \to \infty$, la recta $y = k$, es una **asíntota horizontal**.

Con el estudio de límites es posible formalizar estos procedimientos inductivos e intuitivos. Finalmente, hallamos los cortes con los ejes.

Con el eje $f(0) = \frac{0}{0^2 - 9} = 0$

Con el eje $\frac{x}{x^2 - 9} = 0,\ x = 0$

El corte con cada uno de los ejes es el punto (0,0).

Ejemplo

3. Hacer el análisis de la función f definida: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$
   Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador, desarrollando la división, el cociente es $x+2$ y el residuo es 3.

Aplicando el algoritmo de la división tenemos que

$$\frac{x^2-1}{x-2} = x + 2 + \frac{3}{x-2}$$

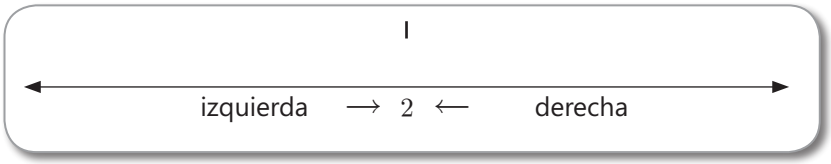
Tenemos pues, dos expresiones para $f(x)$.

$x-2=0$ tiene como solución $x=2$, por lo tanto

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

Al remplazar $x=2$ obtenemos la indeterminación $\frac{3}{0}$, por lo tanto la recta $x=2$ es una **asíntota vertical**.

Evaluemos la función en valores *próximos* a $x=2$ tanto por la izquierda como por la derecha.



$x = 1{,}999$ (se aproximan a 2 por la izquierda) y

$$f(1{,}999) = \frac{1{,}999^2-1}{1{,}999-2} = -2.996$$

$$x = 2{,}001$$

$$f(2{,}001) = \frac{2{,}001^2-1}{2{,}001-2} = 3.004$$

Observemos que: $f(x)\to-\infty$ cuando $x\to 2^-$ y $f(x)\to x$ cuando $x\to 2^+$

Como $Dom(f)=\mathbb{R}-\{2\}$, para determinar que ocurre con $f(x)$ cuando $x\to-\infty$ y cuando $x\to\infty$, utilizamos $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-2}$ y evaluamos $f(x)$ por ejemplo en $x=-1000$ y $x=1.000$

$$f(-1.000) = -1.000 + 2 + \frac{3}{-1.000-2}$$

$$= -998 - 0.00299 \approx -998$$

$$f(1.000) = 1.000 + \frac{3}{1.000-2}$$

$$= 1.002 + 0{,}003006 \approx 1.002$$

Observemos que $f(x)\to-\infty$ cuando $x\to-\infty$ y $f(x)\to\infty$ cuando $x\to\infty$, además cuando $x \to \pm\infty$; $\frac{3}{x-2} \to 0$, por lo tanto, cuando $x \to \pm\infty$; $f(x) \to x + 2$, es decir,

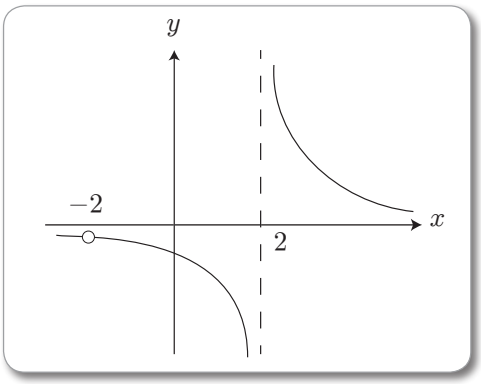
$f(x)$ se acerca asintóticamente a la recta $y=x+2$.

Finalmente, hallamos los cortes con los ejes, $f(0)=1/2$, corta al eje y en el punto $(0, 1/2)$;

$\frac{x^2-1}{x-2}=0 \quad x^2-1=0 \quad x=-1$ y $x=1$ corte con el eje x en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

Ejemplo

4. Hacer el análisis de la función f definida: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$
$x^2-4=0$ tiene como solución $x=-2$ y $x=2$, por lo tanto:
$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$



Al remplazar $x=-2$ obtenemos la **indeterminación** $\frac{0}{0}$ esto significa que, $x=-2$ es raíz del polinomio del numerador $P(x)=x+2$ y del polinomio del denominador $Q(x)=x^2-4$, por lo tanto $x+2$ es factor de $P(x)$ y $Q(x)$ factorizando y simplificando tenemos: $f(x) = \frac{1.(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$, como $f(x)$ no está definida en $=-2$ definimos la función así: $f(x) = \frac{1}{x-2}$ si $x\neq-2$ y $x\neq2$

En general, si $f(x)=P(x)/Q(x)$ y en $x=a$ se tiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, esto significa que $x=a$ es raíz del polinomio del numerador $P(x)$ y del polinomio del denominador $Q(x)$, por lo tanto $x-a$ es factor de $P(x)$ y $Q(x)$, factorizando y simplificando tenemos:

$$f(x) = \frac{(x-a)R(x)}{(x-a)S(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$$

$$Dom(f) = \mathbb{R} - (\{x \mid S(x) = 0\} \cup \{a\})$$

Al remplazar $x=2$ obtenemos las indeterminación $\frac{4}{0}$, por lo tanto, la recta $x=2$ es una asíntota vertical.

Evaluemos la función en valores *próximos* a $x=2$, tanto por la izquierda como por la derecha.

$x=1{,}999$ (se aproximan a 2 por la izquierda) y

$$f(1{,}999) = \frac{1{,}999+2}{1{,}999^2-4} = -1.000$$

$$x = 2{,}001$$

$$f(2{,}001) = \frac{2{,}001+2}{2{,}001^2-4} = 1.000$$

Observemos que: $f(x)\to-\infty$, cuando $x\to 2^-$ y $f(x)\to\infty$ cuando $x\to 2^+$

Como $Dom(f)=\mathbb{R}$, para determinar que ocurre con $f(x)$ cuando $x-\infty$ y cuando $x\to\infty$, evaluamos $f(x)$ en $x=-1.000$ y $x=1.000$

$$f(-1.000) = \frac{-1.000+2}{(-1.000)^2-4} = -0.000998$$

$$f(1.000) = \frac{1.0002}{(1.000)^2-4} = 0{,}001$$

Observemos que $f(x)\to 0$, cuando $x\to-\infty$ y $f(x)\to 0$, cuando $x\to\infty$, la recta $y=0$ es una **asíntota horizontal**.

Finalmente hallamos los cortes con los ejes;

$f(0)=-1/2$, corta al eje y en el punto $(0,\,1/2)$; $\frac{1}{x-2}=0 \quad 1=0$ absurdo por lo tanto no intersecta al eje x.

Ejercicio 4.5

1. Para cada una de las siguientes funciones racionales determine el dominio, las asíntotas, las intersecciones con los ejes x e y (si existen), y trace la gráfica.

a. $f(x) = \frac{4x^2-9}{2x-3}$

b. $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-6}$

c. $f(x) = \frac{2}{3x-2}$

d. $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$

e. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

f. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

g. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

h. $f(x) = \frac{-x^2}{x^2-4x+3}$

i. $f(x) = \frac{2x^2+3}{x-1}$

j. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3}$

k. $f(x) = \frac{x^3}{x^3-1}$

l. $f(x) = \frac{x^3-2x^2-11x+12}{x^2-5x+4}$

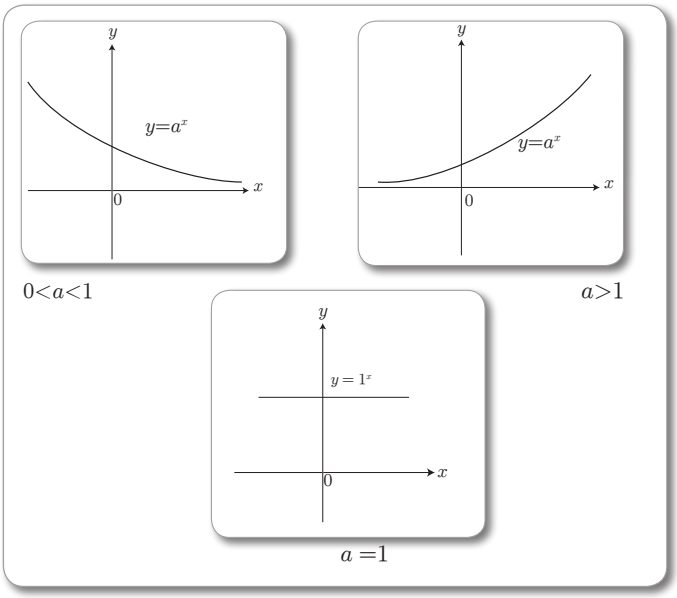
f) Función algebraica

La función algebraica es aquella que se construye a partir de las operaciones algebraicas como suma, diferencia, multiplicación y cociente. Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2+x^2} \qquad h(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} - (x-1)\,3\sqrt{x}$$

g) Función exponencial

La función exponencial tiene la forma, $f(x) = a^x$. Donde a es una constante mayor que cero. Por ahora, solo mencionaremos tres casos como se puede observar en las siguientes gráficas:

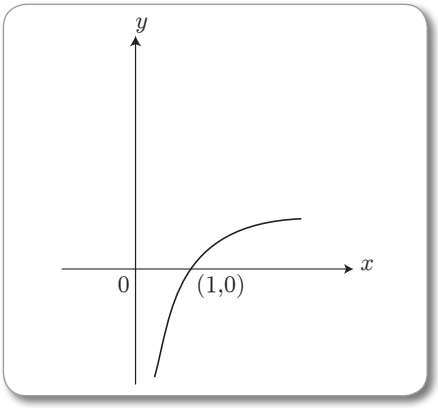


Por ejemplo, para $a \neq 1$ supongamos que $a=3$ donde la función es: $y=3^x$

x	0	1	-1	2	-2
y	1	3	$\frac{1}{3}$	9	$-\frac{1}{9}$

h) Función logarítmica

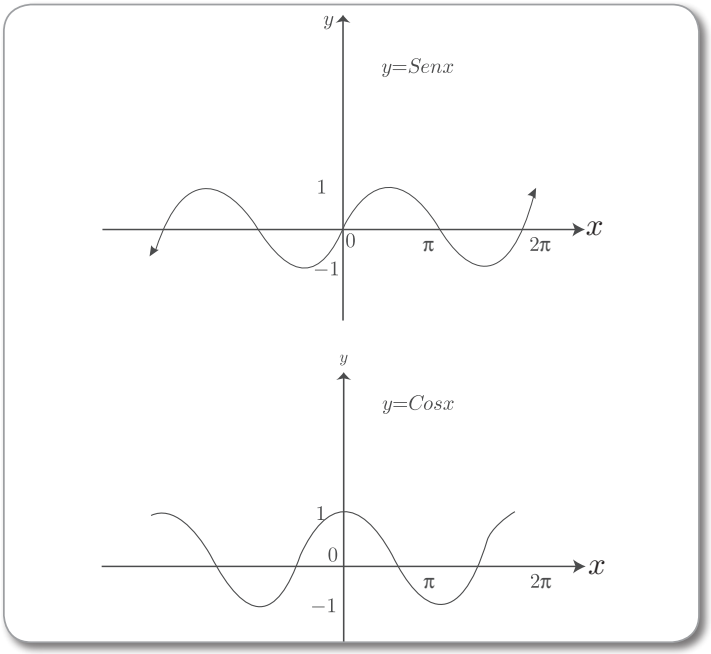
La función logarítmica tiene la forma: $y = log_a x$, que se denomina **función logarítmica**, con base a, la gráfica es:



Más adelante trataremos con más cuidado este tipo de funciones.

i) Funciones trigonométricas

Solo mencionaremos por ahora la función $y = \text{Sen}x$ y $y = \text{Cos}x$, cuyas gráficas son:



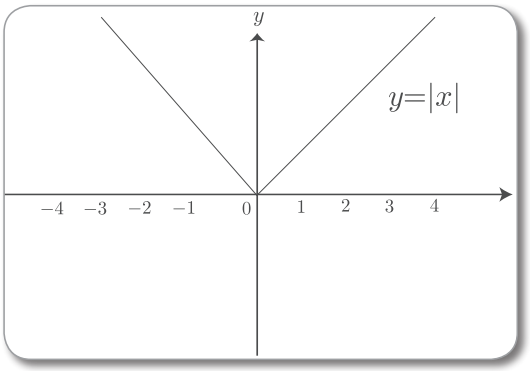
En el capítulo 7 profundizamos más sobre este tipo de funciones.

j) Función valor absoluto $f(x)=|x|$

Esta función asigna a los números positivos el mismo número, pero a los negativos les asigna el opuesto del número. Por esta razón, la imagen o valor absoluto de todo número real siempre es cero o positivo.

$D(f)=\mathbb{R}$

$R(f)=\mathbb{R}^+$



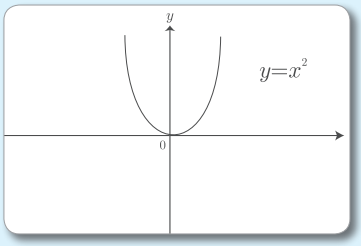
x	0	1	-1	2	-2	3	-3
$y=\|x\|$	0	1	1	2	2	3	3

Nota: nuestra intención es darle al estudiante una lista suficiente de funciones con sus respectivas gráficas, para que las tenga en su memoria, este tema lo abordaremos posteriormente, el cual se llama transformaciones de funciones.

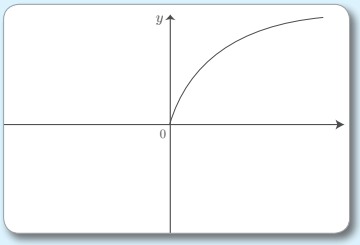
Transformaciones de funciones

Antes de mencionar los diferentes tipos de transformaciones que se le pueden aplicar a las funciones, mostraremos un listado de las gráficas de funciones con sus correspondientes nombres y ecuaciones más usuales, que vamos a utilizar para facilitar dichas transformaciones, que se deben tener en cuenta más adelante. Es importante que el lector tenga en cuenta este listado de funciones más usuales para facilitar el trabajo de las gráficas con sus transformaciones, como se enseña en la siguiente tabla.

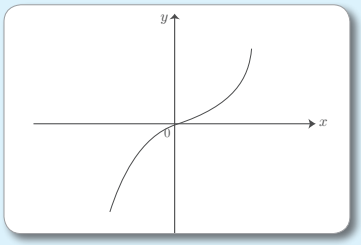
Función cuadrática:
$y = x^2$



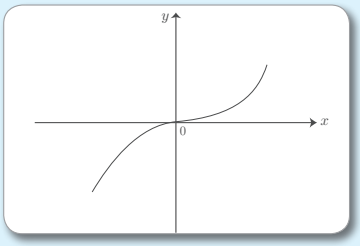
Función raíz cuadrada:
$y = \sqrt{x}$



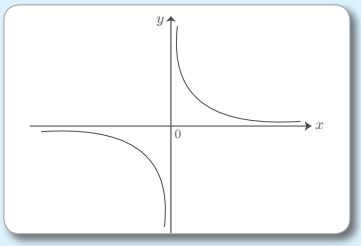
Función cúbica:
$y=x^3$



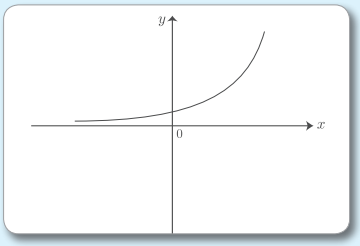
Función raíz cúbica:
$y = \sqrt[3]{x}$



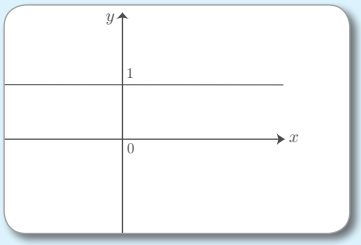
La función racional:
$y = \frac{1}{x}$



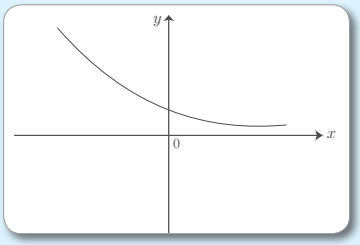
Función exponencial:
$y = a^x$ con $a>1$



Función constante:
$y=1^x$, con $a=1$



Función exponencial:
$y=a^x$, con $0<a<1$



Para el caso de este tipo de funciones, si queremos describir la función $y=3^x$, como $3>1$ y $3\neq 1$, la gráfica es:

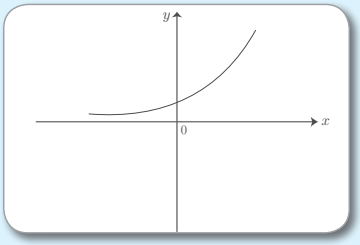
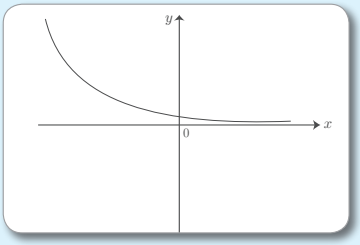


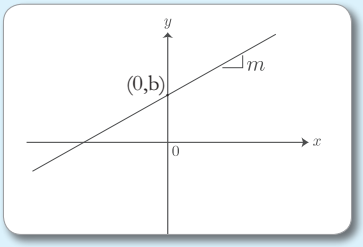
Tabla de datos

-3	-2	-1	0	1	2	3
$1/27$	$1/9$	$1/3$	0	1	9	27

Mientras que la función $y=(\frac{1}{2})^x$, como $0<\frac{1}{2}<1$, según la clasificación anterior la gráfica es la siguiente:

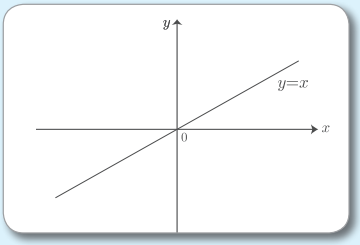


Función lineal:
El modelo matemático es $y=mx+b$, recordemos que su gráfica es una línea recta en el plano cartesiano.

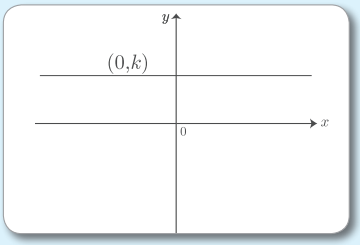


Función idéntica:

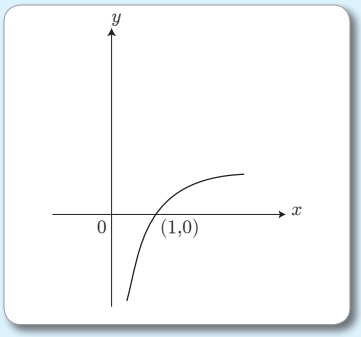
$y=x$
es un caso particular de la función lineal y su gráfica es:



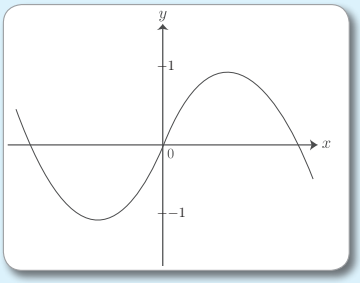
Función constante:
(Caso particular
de la función lineal)
$y = k$



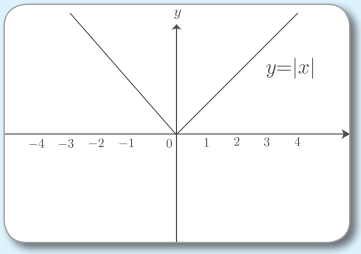
Funciones logarítmicas:
con base a, la gráfica es:
la función logarítmica tiene
la ecuación: $y = log_a x$



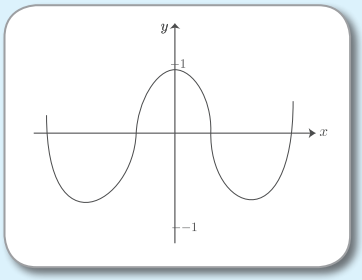
Función seno:
$y=senx$



Función valor
absoluto: $f(x)=|x|$



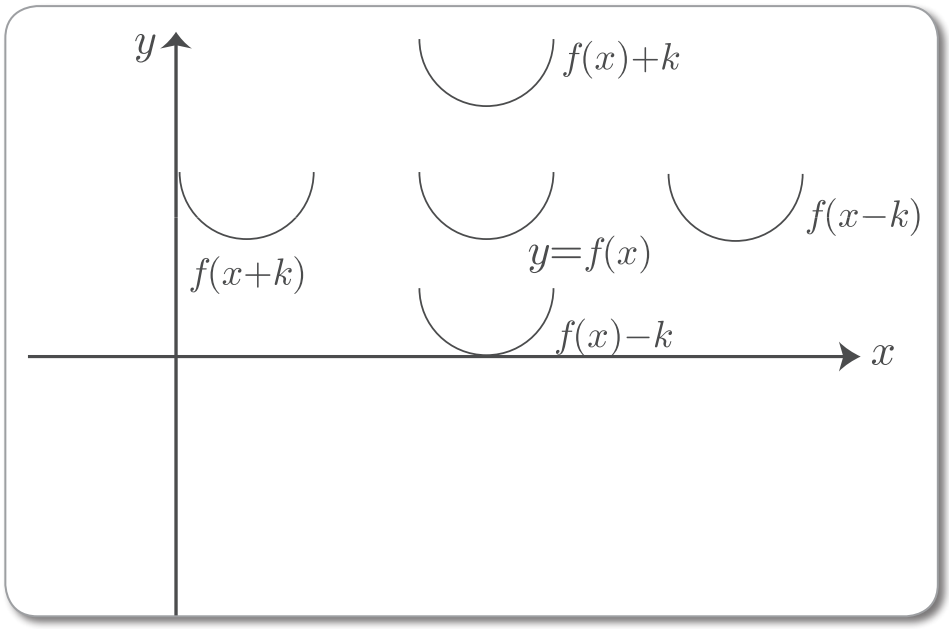
Función coseno:
$y=cosx$



Es razonable pensar que
existe gran variedad
de gráficas de funciones,
pero con el listado anterior,
es suficiente para extender
las transformaciones
que vamos a ver
posteriormente.

Traslaciones verticales y horizontales

Este tipo de transformación consiste en trasladar una función original $y=f(x)$ verticalmente u horizontalmente; si el recorrido es vertical, la función original la podemos trasladar hacia arriba o hacia abajo k unidades; mientras que si el recorrido es horizontal, la función se traslada hacia la derecha o izquierda k unidades.



Si suponemos que $k>0$, para traslaciones verticales, al sumar k unidades a $y=f(x)$ la función se traslada k unidades hacia arriba, mientras que si restamos k unidades a $y=f(x)$ la función se traslada k unidades hacia abajo. Como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo

1: Dada la gráfica $y=x^2$, utilizar las transformaciones verticales para graficar $y=x^2-2$ y $y=x^2+1$

Solución

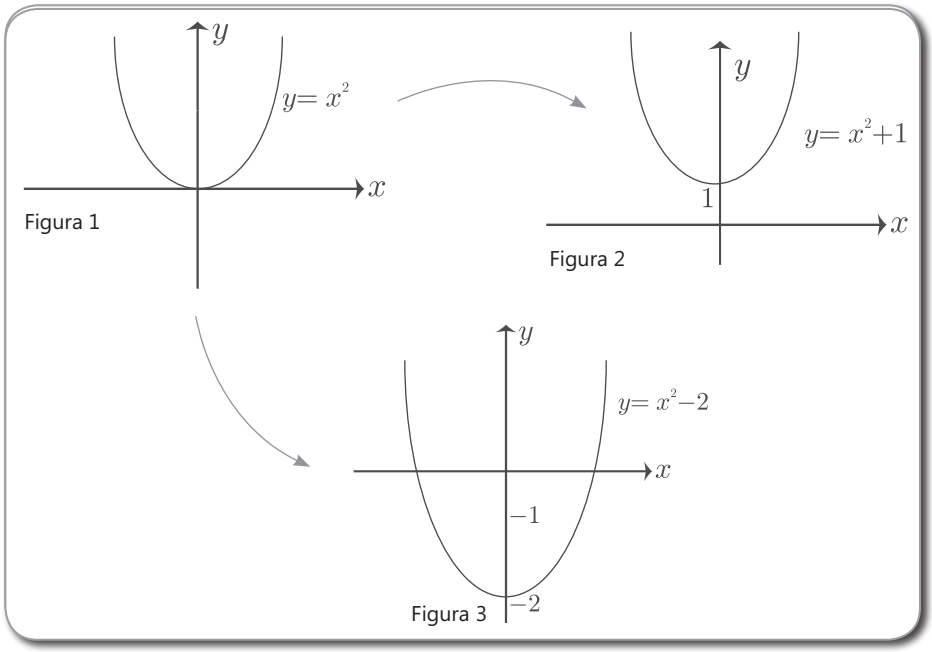


Figura 1

Figura 2

Figura 3

En la figura 1 se muestra la función original $y = x^2$, como se observa en la figura 2, la función original se traslada hacia abajo dos unidades, mientras que en la figura 3 la función original se traslada una unidad hacia arriba.

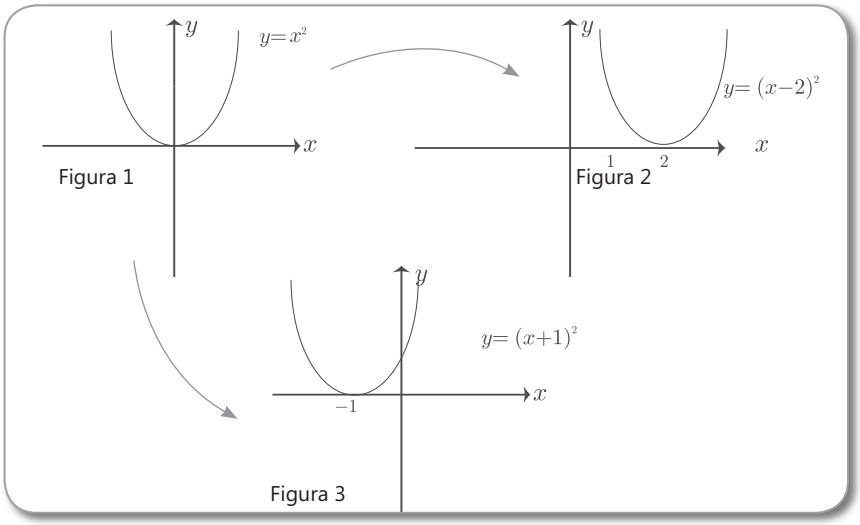
Traslaciones horizontales

Si suponemos que $k>0$, para las traslaciones horizontales se puede observar que la gráfica $y=f(x-k)$ o $y=f(x+k)$ se traslada la gráfica original $y=f(x)$,k unidades la derecha y a la izquierda, respectivamente.

Ejemplo

2. Dada la gráfica $y = x^2$ utilizar las trasformaciones horizontales para graficar $y = (x+1)^2$ y $y = (x-2)^2$,

Solución: La función original es $y=x^2$.



Como se observa la gráfica de la figura 2 es la original 1, trasladada dos unidades a la derecha, mientras que la gráfica de la figura 3 es la original 1 trasladada una unidad a la izquierda.

3. Trazar la gráfica de $y=x^2+2x+3$

Solución

Completando cuadrados podemos escribir la función de la siguiente manera:

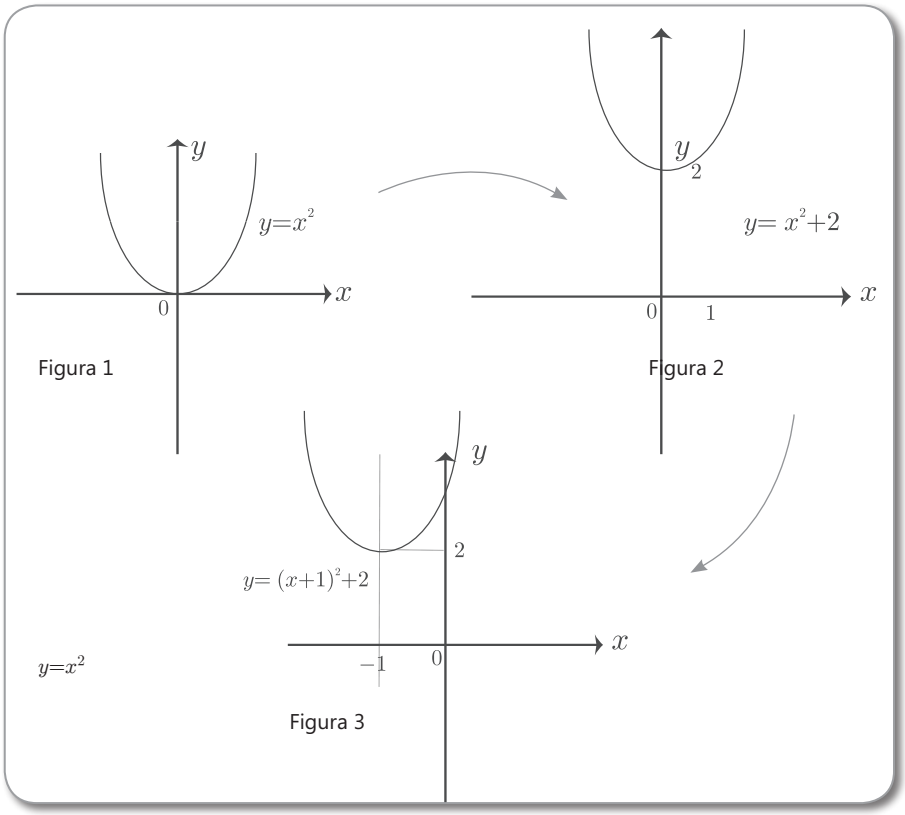
$$y = x^2+2x+3$$

$$y = x^2+2x+3+1-1$$

$$y = (x^2+ 2x+1)+2$$

$$y = (x^2+ 1)^2+2$$

La pregunta será ¿cual es la función original? La respuesta es simple, la función original es $y=x^2$, únicamente que la gráfica $y=(x+1)^2+2$, es la original trasladada 2 unidades hacia arriba y 1 unidad hacia la izquierda.



Reflexiones verticales y horizontal

Las reflexiones verticales se realizan sobre el eje y, mientras que las reflexiones horizontales se hacen sobre el eje x, es decir:

a) $y=-f(x)$, refleja la gráfica original $y=f(x)$, con respecto al eje de x

b) $y=f(-x)$, refleja la gráfica original $y=f(x)$ con respecto al eje y

Ejemplos

1. Dada la gráfica de $y = \sqrt{x}$, utilizar la reflexión para graficar $y = \sqrt{-x}$ y $y = -\sqrt{x}$.

Solución

La gráfica original $y = \sqrt{x}$ según nuestra lista es:

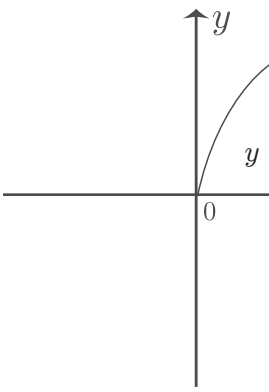


Figura 1

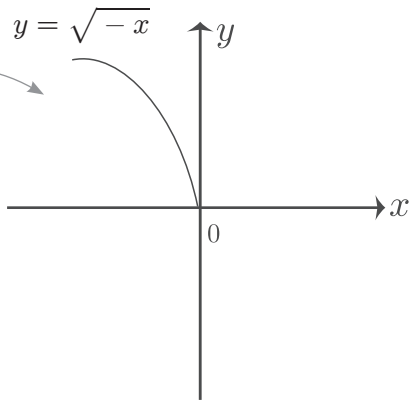


Figura 2

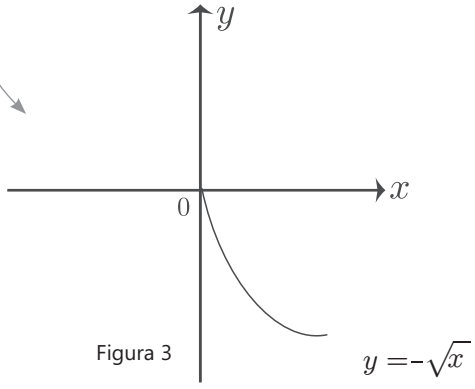
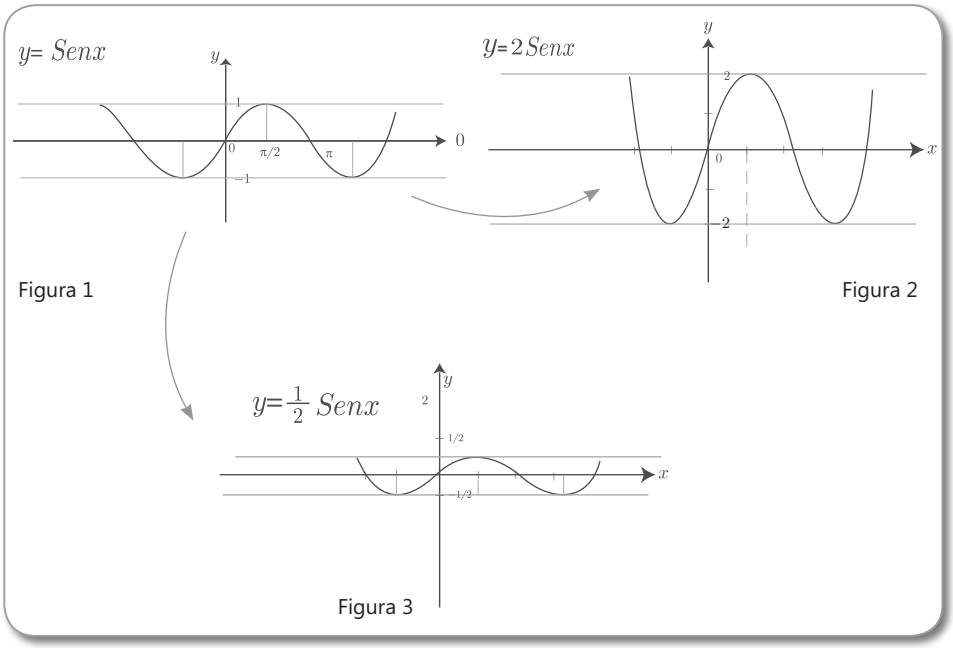


Figura 3

Observe que la gráfica de la figura 2 es la reflexión de la figura 1 sobre el eje y, mientras que la gráfica de la figura 3 es la reflexión de la figura 1 sobre el eje x.

Contracción y alargamiento vertical

Si multiplicamos una función por una constante $k>1$ observamos que la función $y=kf(x)$ es la gráfica de $y=f(x)$ alargada verticalmente k veces. En forma similar, si multiplicamos una función por una constante $\frac{1}{k}$, es decir $y = \frac{1}{k}f(x)$ para $k > 1$, esto quiere decir que la gráfica $y = f(x)$ una contracción verticalmente.



Si se observa la gráfica de la figura 2, consiste en duplicar verticalmente el dominio de la función $y = senx$ debido a que la función original se multiplicó por 2, es decir hubo un alargamiento vertical, mientras que la gráfica de la figura 1 se redujo a la mitad verticalmente.

Contracción y alargamiento horizontal

Supongamos que $k>1$, entonces la gráfica $y = f(kx)$ se obtiene de la ecuación $y = f(x)$ reduciendo esta horizontalmente en un factor k, mientras que la gráfica $y= f\left(\frac{x}{k}\right)$ alarga horizontalmente la función original $y = f(x)$.

Ejemplo

1. Graficar la función $y = sen(2x)$

Solución

Función original:

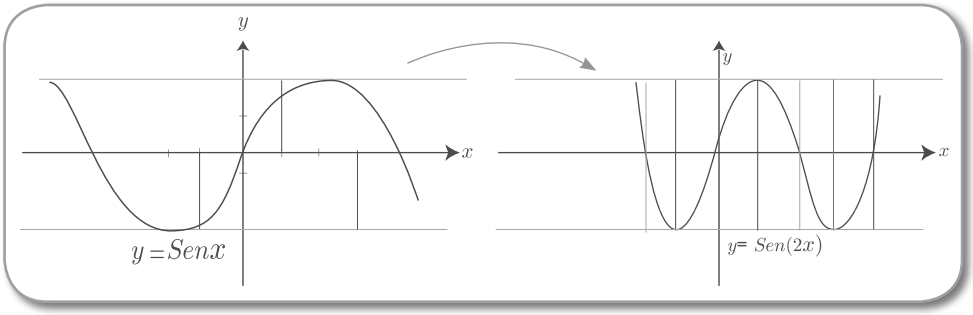


Figura 1 Figura 2

La gráfica de la figura 1 se redujo horizontalmente en un factor de 2 (figura 2).

Valor absoluto de una función

Otra transformación importante es tomar el valor absoluto de una función, es decir, si $y=|f(x)|$, la parte de la gráfica de $y=f(x)$, figura 1, que esta bajo el eje x se refleja sobre el mismo eje, como se observa el la figura 2.

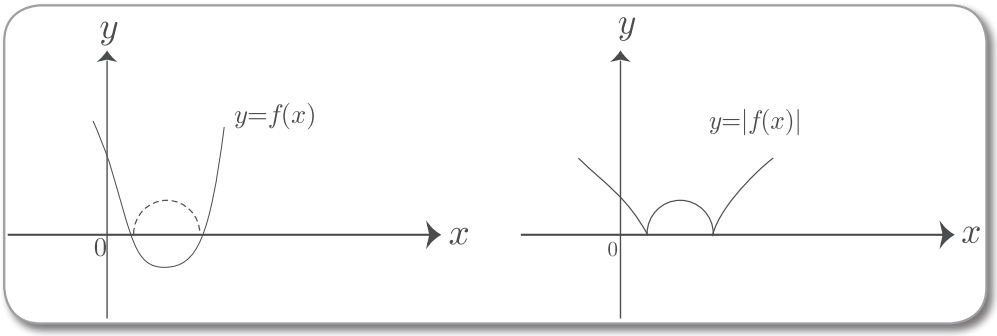


Figura 1 Figura 2

Ejemplos

1. Graficar la función.

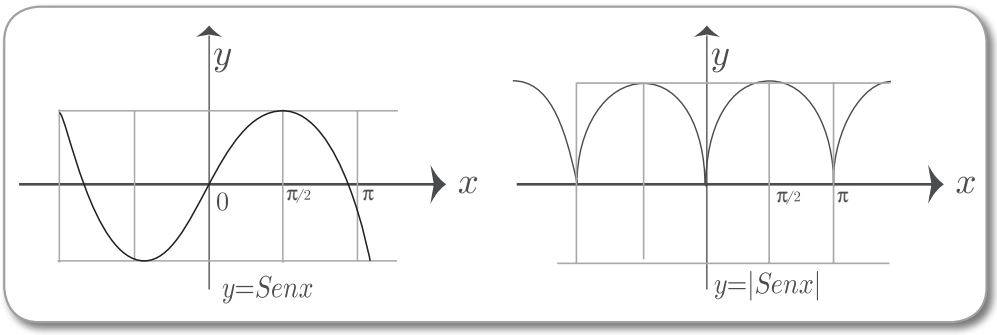
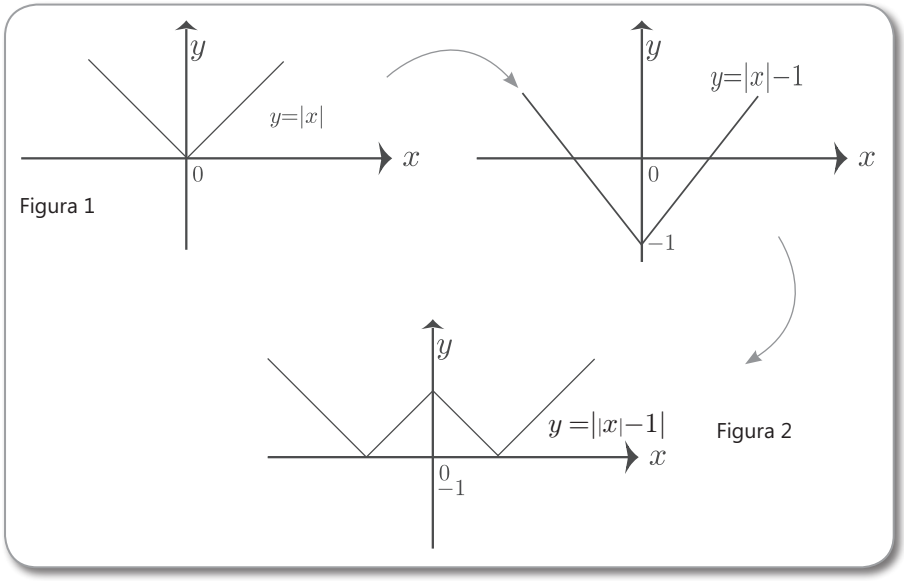


Figura 1 Figura 2

Como podemos ver en la figura 2, la porción de la gráfica $y = senx$ (figura 1), que está bajo el eje x se refleja sobre el mismo eje, dando como resultado la gráfica de $y=|senx|$ (figura 2).

---

2. Graficar $y=||x|-1|$



En primer lugar trasladamos la gráfica de $y= |x|$ una unidad verticalmente hacia abajo (figura 1), y luego la gráfica que se encuentra bajo el eje x se refleja sobre el mismo eje, para obtener la gráfica de $y=||x|-1|$, (figura 2).

---

3. Graficar $y=e^x+1$

Solución:

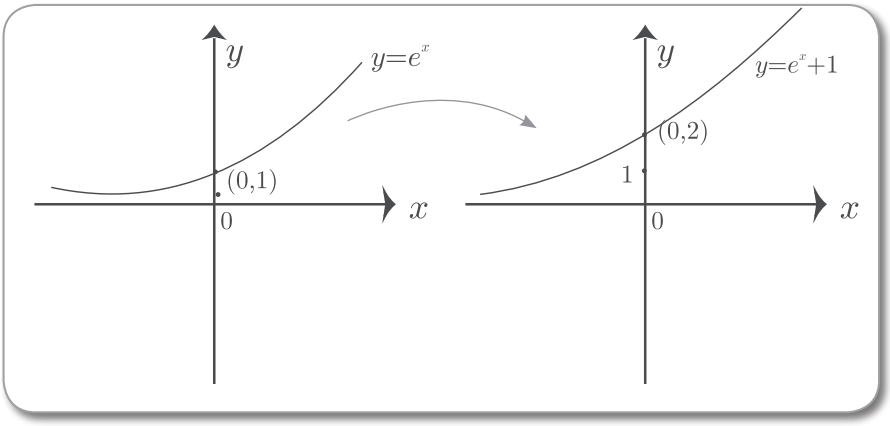


Figura 1 Figura 2

Si observamos la figura 2, consiste en la traslación vertical hacia arriba de la función original.

---

4. Graficar la función $y = \frac{1}{|x|}$.

Solución

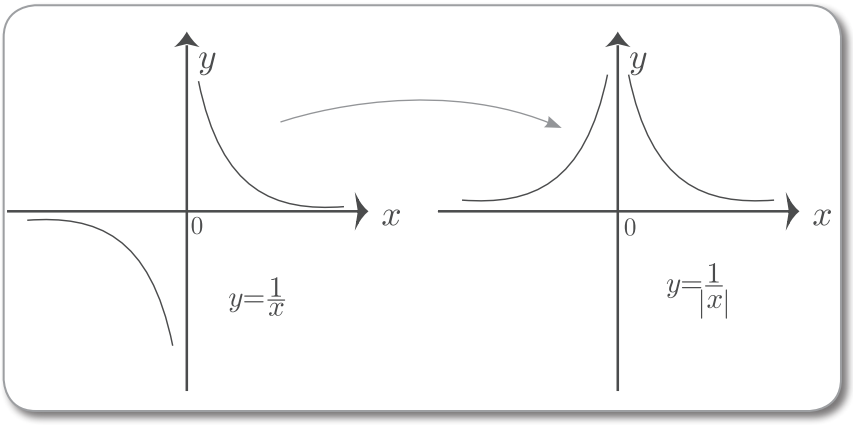


Figura 1 Figura 2

Utilizando la transformación valor absoluto en la función $y = \frac{1}{x}$. (figura 1), la porción de la gráfica que está bajo el eje x en $(-\infty, 0)$ esta se refleja sobre el eje x, obteniéndose la gráfica de la figura 2.

---

5. Graficar $y = 2 + \frac{1}{x+1}$

Solución

La clave es siempre pensar a cuál función orinal le estamos haciendo transformaciones, en este caso es la función $y = \frac{1}{x}$, la pregunta es ¿qué tipo de transformación estamos aplicando?. Estamos aplicando dos transformaciones de traslación vertical y horizontal simultáneamente, 2 unidades verticalmente hacia arriba y 1 unidad horizontalmente a la izquierda. Como se muestran en las figuras 1, 2 y 3.

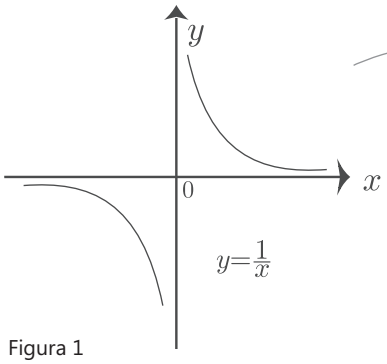


Figura 1

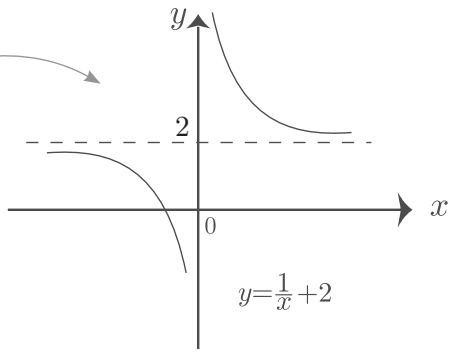


Figura 2

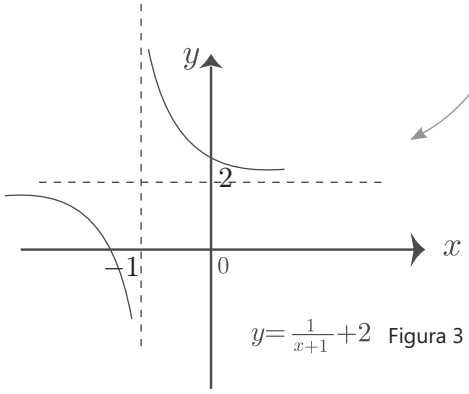


Figura 3

Ejercicio 4.6

Graficar las siguientes funciones utilizando las transformaciones apropiadas.

Sugerencia: recuerde siempre a cuál función original del listado que se da se le está aplicando la transformación, esa es la clave.

1. $y = (x-1)^2 + 2$
2. $y = -\frac{1}{x}$
3. $y = \sqrt{x+1} - 2$
4. $y = (x-1)^3 + 2$
5. $y = -\sqrt[3]{x}$
6. $y = 3^x + 1$
7. $y = (\frac{1}{3})^x - 1$
8. $y = 4^{-x} + 1$
9. $y = 2^{|x|}$
10. $y = 4 - e^{-x}$
11. $y = e^{-x}$
12. $y = ||x| - 2|$
13. $y = -\ sen\, x$
14. $y = -\ cos\, x$
15. $y = |cos\, x|$
16. $y = x^2 + x + 1$
17. $y = cos(\frac{x}{2}) + 1$
18. $y = 1 + \frac{1}{x-1}$
19. $y = \sqrt[3]{x+1} - 1$
20. $y = \sqrt{|x|}$

Sugerencia: considere los casos del valor absoluto.

21. $y = |x^2 - 3|$
22. $y = \frac{1}{3}cos(x - \frac{\pi}{3})$
23. $y = ||x| - 2| - 2|$

Sugerencia: utilice el numeral 12.

Función cuadrática

Cuando el crecimiento de la función es constante, tenemos un modelo lineal, pero en muchos problemas prácticos el crecimiento de una función puede ser a su vez creciente (concavidad hacia arriba) o decreciente (concavidad hacia abajo), en principio la función más simple que representa cada una de estas situaciones es la **función polinómica de segundo grado o cuadrática**.

La función polinómica de segundo grado $P(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ usualmente se nota $f(x)=ax^2+bx+c$ donde $a\neq0$. Como en toda función polinómica el dominio de una función cuadrática es el conjunto de los números reales.

Unas transformaciones adecuadas nos permiten hacer un análisis de la función, veamos:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a(x^2 + \tfrac{b}{a}\,x) + \text{c} \\ &= a(x^2 + \tfrac{b}{a}\,x + \tfrac{b^2}{4a^2}\,) + c - \tfrac{b^2}{4a} \\ &= a(x + \tfrac{b}{2a}\,)^2 + c - \tfrac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Cuando $x + \frac{b}{2a}=0$, es decir, $x = -\frac{b}{2a}$ tenemos que $y = f(-\frac{b}{2a} + x) = f(-\frac{b}{2a} - x) = x^2$, esto significa que la función es simétrica con respecto a $x = \frac{-b}{2a}$ y la gráfica de f se denomina parábola.

Si $a>0$ como $c - \frac{b^2}{4a}$ es una constante y $(x + \frac{b}{2a})^2$ es siempre positivo $y = f(x)$ puede hacerse tan grande como se quiera, asignando a x o a $-x$ valores suficientemente grandes, $y=f(x)$ toma un valor mínimo cuando:

$$x + \tfrac{b}{2a} = 0 \quad \text{o} \quad x = -\tfrac{b}{2a}$$
$$\text{en } x = -\tfrac{b}{2a} \quad y = c - \tfrac{b^2}{4a}\ ,$$

El punto $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\,)$ se denomina vértice de la parábola, en este caso,

$$Rec(f) = [c - \tfrac{b^2}{4a}, \infty)$$

Si $a < 0$, $a(x + \frac{b}{2a})^2$, es siempre negativo y $y = f(x)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera asignando a x o a $-x$ valores suficientemente grandes, $y=f(x)$ toma un valor máximo cuando:

$$x = -\frac{b}{2a}, \text{ en este caso } Rec(f) = (-\infty, c - \frac{b^2}{4a})$$

Intersección con los ejes

Con el eje y, $x = 0$ $y = c$, tenemos el punto $(0,c)$.

Con ele eje x, cuando $y=f(x)=0$ tenemos que $ax^2+bx+c=0$ resolviendo la ecuación:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si la ecuación tiene dos soluciones reales las intersecciones con el eje x son los puntos (x_1, 0) y (x_2, 0)

Si la ecuación tiene una solución $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ observemos que la intersección es un punto y corresponde al vértice.

Si la ecuación no tiene soluciones reales la parábola **no intersecta al eje** x

Ejemplo

1. Hacer el análisis de $f(x) = x^2 - 2x - 24$

   $Dom(f)=\mathbb{R}$; Como a=1, b=−2 y

   $c = -24$; $x = -\frac{b}{2a} = 1$ es el eje de simetría, el punto $(1, f(1)) = (1,-25)$ es el vértice y corresponde a un punto mínimo por ser $a>0$. $Rec(f)=[1,+\infty)$

   La intersección con el eje y es el punto: $(0, f(0)) = (0, -24)$

   Intersecta al eje x

   cuando:
   $$x^2 - 2x - 24 = 0$$
   $$(x - 6)(x + 4) = 0$$
   $$x = 6 \text{ o } x = -4$$

Los puntos de intersección con el eje son: $(-4, 0)$ y $(6, 0)$.

2. Hacer el análisis de $f(x) = -x^2 - 4x - 8$

   $Dom(f) = \mathbb{R}$

   Como $a = -1, b = -4$ y $c = -8$ $x = \frac{-b}{2a} = -2$ es el eje de simetría, el punto $(-2, f(-2)) = (-2, -4)$ es el vértice y corresponde a un punto máximo por ser $a < 0$.

   $Rec(f) = (-\infty, -4]$

   La intersección con el eje y es el punto $(0, f(0)) = (0, -8)$

   Intersecta al eje x cuando $-x^2 - 4x - 8 = 0$

   Como la ecuación $-x^2 - 4x - 8 = 0$ no tiene solución real, $(x = -2 \pm 2i)$ no existe intersección con el eje x.

Ejercicio 4.7

1. Haga el análisis y represente gráficamente cada una de las siguientes funciones:

   a. $f(x) = x^2 + 2x - 15$ b. $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

   c. $f(x) = 4x^2 + 12x + 9$

2. Halle los valores de x para los cuales $f(x)$ es positiva, negativa y el máximo o mínimo de cada una de las siguientes funciones:

   a. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ b. $f(x) = 6x^2 - 5x - 6$

   c. $f(x) = x^2 - 16$

3. Encuentre los ceros reales de cada una de las siguientes funciones:

   a. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$ b. $f(x) = 16 - x^2$

   c. $f(x) = x^4 + 27x$

4. La demanda mensual de un producto tiene un comportamiento lineal, se sabe que a un precio de $5.000 la unidad, se demandan 6.000 unidades mensuales y por cada $500 que rebaje en el precio, la demanda crece en 1.000 unidades. Si los costos fijos son de $8'000.000 mensuales y los costos variables de $3.000:

a. Exprese la utilidad en función del número de unidades demandadas.

b. Represente gráficamente está función.

c. ¿Cuántas unidades se deben producir para que el ingreso sea máximo?

5. Dadas las ecuaciones $25p+q^2=269$ y $5p-2q=1$

a. Identifique: ¿cuál corresponde a oferta? y ¿cuál a demanda?

b. Halle el punto de equilibrio y represente en un mismo plano las dos ecuaciones.

c. Si $p=7$ ¿qué ocurre?

6. Dadas las ecuaciones $p=q^2+4q+3$ y $p=-q^2+33$

a. Identifique cuál corresponde a oferta y cuál a demanda.

b. Explique para $q=2$ y para $q=5$ ¿qué sucede?

c. Halle el punto de equilibrio y represente en un mismo plano las dos ecuaciones.

Función exponencial

Una ecuación que tiene la forma $f(x)=a^x$ se le denomina función exponencial, donde $a>0$, acerca de esta función podemos hacer las siguientes consideraciones, en donde mostramos su gran utilidad.

a) Si $f(n)=a^n$ la función se convierte en una expresión de la forma $f(n)=a^n=a.a.a.....a\ n\ veces$

b) Si evaluamos a cero en dicha función, obtenemos $f(0)=a^0=1$

c) Si evaluamos un número racional $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y $q>0$, entonces la función toma la forma $f(\frac{p}{q})=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ este tipo de consideraciones es importante, puesto que de ella surge la necesidad de cómo evaluar un número real positivo elevado a una potencia racional, todo se reduce a un problema llamado radicación.

d) Si evaluamos $x=-n$ para $n>0$, es decir $f(-n)=a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, nos da la posibilidad de calcular una expresión de la forma a^{-n},

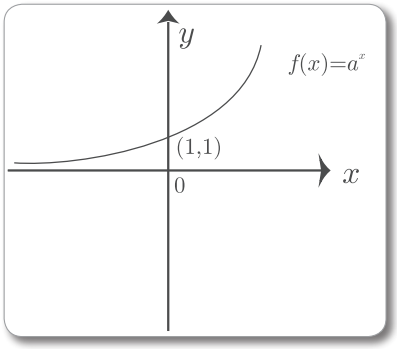
cómo calcular un número real positivo con una potencia entera negativa.

Clasificación de las funciones exponenciales

e) La función exponencial creciente $f(x)=a^x$ cuando $a>1$ y su gráfica es:

Las características de esta función son:

1. Corta al eje y en la coordenada (0,1)
2. Su dominio son los números reales
3. Su recorrido es (0,$+\infty$)

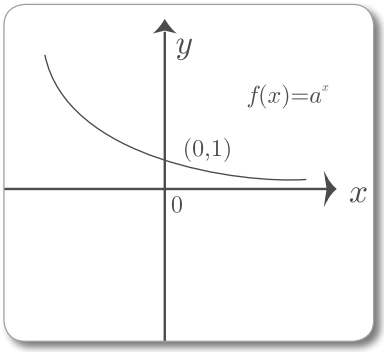


f) La función exponencial decreciente $f(x)=a^x$

Ocurre cuando el valor de a está entre $(0,1)$ es decir $0<a<1$ y su gráfica es:

Las características de esta función son:

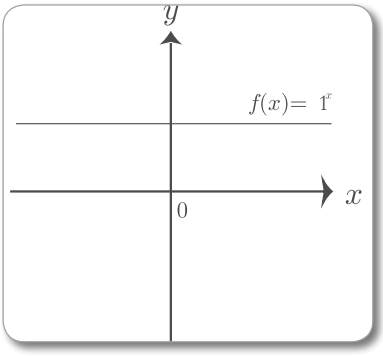
1. Corta al eje y en la coordenada (0,1)
2. Su dominio son los números reales
3. Su recorrido es (0,∞)



g) La función constante $f(x)=1^x$ si $a=1$

Las características de esta función son:

1. Corta al eje en la coordenada $(0,1)$
2. Su dominio son los números reales
3. Su recorrido es el conjunto { 1 }.



El siguiente teorema nos proporciona las propiedades de la exponenciación.
Teorema: si a y b son mayores que cero y m, n son números reales entonces:

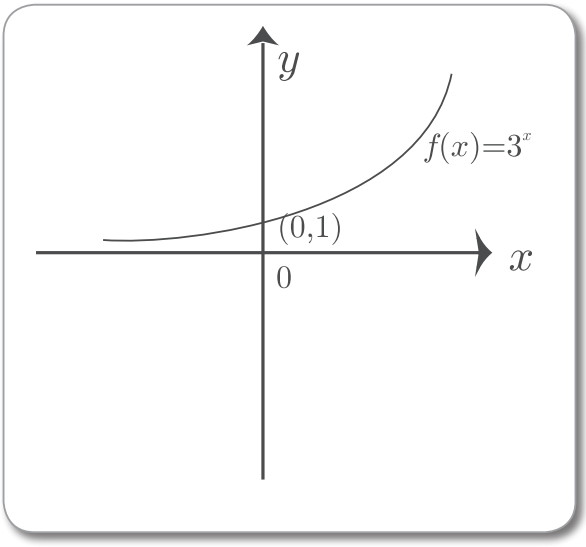
$$
\begin{aligned}
&i) && a^m.a^n = a^{m+n} \\
&ii) && \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0 \\
&iii) && (a^m)^n = a^{mn} \\
&iv) && \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad b \neq 0 \\
&v) && (a.b)^m = a^m.b^m \\
&vi) && a^0 = 1,\ a \neq 0
\end{aligned}
$$

Ahora vamos a graficar algunas funciones exponenciales:

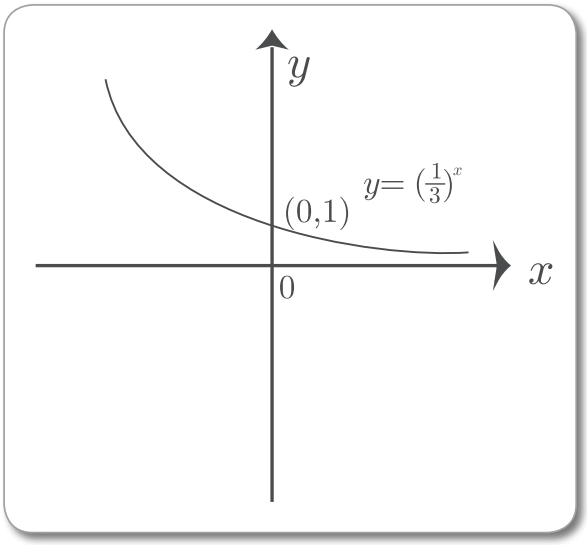
Ejemplo

Graficar: $i)\ f(x) = 3^x$, $ii)\ f(x) = (\frac{1}{3})^x$, $iii)\ f(x) = 1^x$,

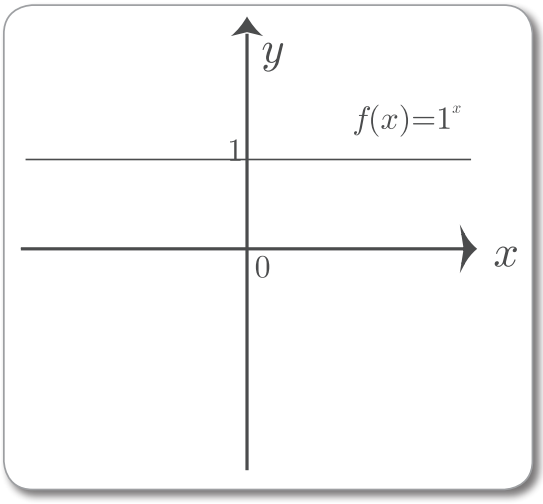
$i)$ Como 3>1 la función es creciente y su gráfica es:



$ii)$ Como $0 < \frac{1}{3} < 1$ la función es decreciente y su gráfica es:



$iii)$ Como $a=1$ la función exponencial se convierte en una función constante $f(x)=1^x$ y su gráfica es:



Si observamos cualquiera de las tres gráficas todas cortan al eje en $(0,1)$ debido a que la imagen de cero es siempre 1, es decir $f(0)=a^0 = 1$

Ejercicio 4.8

1. Trace las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $y = 2^x$ b. $y = 10^x$

   c. $y = (\frac{1}{2})^x$ d. $y = 3^x$

   e. $y = 3^{-x}$ d. $y = 5^x$

2. Empleando las transformaciones de funciones graficar:

   a. $y = 2^{-x}$ b. $y = 2^{-x} + 1$

   c. $y = 10^x + 2$ d. $y = (\frac{1}{2})^{-x}$

   e. $y = -3^{-x}$ f. $y = (0.8)^x + 1$

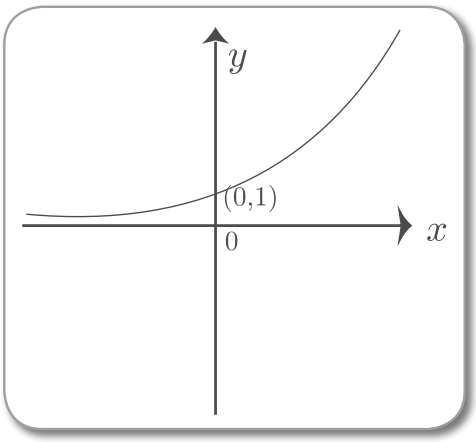
   g. $y = 1 - 2^{x+1}$ h. $y = 3^{|x|}$

   i $y = |3^x - 2|$

Función exponencial natural

Si en la función $f(x)=a^x$ tomamos $a=e$ la función se transforma en $f(x)=e^x$, el número e es un número irracional cuyo valor aproximado es $e= 2.718281828459045$, y como $e>1$ la gráfica de $f(x)$ es creciente

Las características de esta función son:



1. Corta al eje y en la coordenada (0,1), ya que $e^0=1$

2. Su dominio son los números reales

3. Su recorrido es $(0,+\infty)$.

Propiedades

Sean m y n números reales cualesquiera, entonces:

$$
\begin{aligned}
&i) \quad e^m.e^n = e^{m+n} \\
&ii) \quad \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n} \\
&iii) \quad (e^m)^n = e^{mn} \\
&iv) \quad e^0 = 1
\end{aligned}
$$

Logaritmos

Analicemos los problemas principales al estudiar las potencias.

1. Dados los números reales a y n. Encuentre un número real x tal que $x=a^n$. Este es un problema de elevar un número real a a la potencia n. Esta expresión es única y **existe** para cualquier número positivo a y cualquier número real n.
2. Dados los números reales b y n. Encuentre un número real x tal que $x^n=b$. Si b es número positivo cualquiera y n es cualquier número real distinto de cero, el problema se reduce al anterior, puesto que: $x=b^{1/n}$. En efecto,

$$x^n = (b^{1/n})^n = b^1 = b$$

   Si $n=0$ y $b=1$ $(x^0=1)$, entonces la solución es cualquier número real x distinto de cero.

   Si $n=0$ y $b\neq 1$ $(x^0=1)$, no existe solución, porque 0^0 no está definido.

3. Dados los números reales positivos a y b. Hallar un número real x tal que $a^x=b$.

   Si $a=1$ y $b=1$ $(1^x=1)$, cualquier número real x es solución.

   Si $a=1$ y $b\neq 1$ $(1^x=b)$, no existe solución.

Analicemos el caso en que $a\neq 1$.

Para cualesquiera a y b números reales positivos $a \neq 1$, **existe un único número real** "x", tal que: $\boldsymbol{a^x = b}$, "x" se denomina **logaritmo** en base "a" de "b", y se nota $log_a b$.

$$a^x = b \text{ si y solo si } x = log_a b$$

Ejemplos

1. $3^4 = 81$ significa que $log_3 81 = 4$
2. $log_x 64 = 2$ significa que $x^2 = 64$
3. Expresar en notación logarítmica: $a^{x+2} = b$; $(a-2)^x = y+z$

   Si $a^{x+2} = b$ entonces $x+2 = log_a b$

   Si $(a-2)^x = y+z$ entonces $x = log_{(a-2)}(y+z)$
4. Expresar en notación exponencial $log_a(x+y) = 3$; $log_a b^3 = m$

   Si $log_a(x+y) = 3$ entonces $a^3 = x+y$

   Si $log_a b^3 = m$ entonces $a^m = b^3$
5. Hallar x: a) $3^{2x+1} = 27$ b) $(1/3)^{-2x} = 81$ c) $log_x 64 = 3$

   a) $3^{2x+1} = 27$, como $27 = 3^3$ tenemos que:

   $3^{2x+1} = 3^3$, por la propiedad: si $a^n = a^m$ entonces $n = m$

   $2x+1 = 3$, luego, $x = 1$

Solución 2

Si $3^{2x+1} = 27$ por definición tenemos que:

$2x+1 = log_3 27 = 3$, luego, $x = 1$

b) $(1/3)^{-2x} = 81$, como $(1/3)^{-2x} = 3^{2x}$ tenemos que: $3^{2x} = 81$
$2x log_3 3 = log_3(81)$, como $81 = 3^4$ tenemos que: $2x = 4$, entonces, $x = 2$

c) $log_x 64 = 3$, por definición tenemos que: $x^3 = 64$

luego, $x = \sqrt[3]{64} = 4$

Si $a \leq 0$ ó $a=1$ ó $b \leq 0$, entonces $log_a b$ **no está definido**.

Ejemplo. $log_{(-2)}(-32)=5$ no tiene sentido.

Así pues, en la definición de logaritmo $log_a b$ tenemos siempre que: $a>0$, $a \neq 1$ y, $b>0$.

De la definición de logaritmo se deduce la identidad logarítmica fundamental:

$$a^{log_a b}=b$$

Ejercicio 4.9

1. Halle el valor de :

   a. $10^x = 0{,}0001$

   b. $9^{2x-5}=(3^x)^2$

   c. $(4^x)^2 = 2^{8x-8}$

   d. $4^x=1/32$

   e. $(1/3)^{2x}=27$

   f. $(1/2)^{-2x}=16$

2. Verifique si la afirmación es verdadera o falsa, si es falsa dé condiciones para que sea verdadera:

   a. La raíz cúbica de un número positivo siempre es menor que el número.

   b. $x^2>x$ para cualquier número positivo x.

   c. Si $(a/b)>0$ entonces $(a/b)^{-n}>(a/b)$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

3. Escriba las siguientes expresiones en notación logarítmica:

   a. $5^0=1$

   b. $4^{-2}=1/16$

   c. $8^{2/3}=4$

   d. $10^5=100.000$

   e. $(0{,}2)^3=0{,}008$

   f. $a^{10}=b$

   g. $p^x=t$

   h. $a^{m+n}=w$

i. $(a+b)^n=c$ j. $(a^2)^x=y+z$

k. $x^2=64$ l. $10^{-2}=0{,}01$

4. Escriba las siguientes expresiones en notación exponencial:

a. $log_2 32=5$ b. $log_x b=4$

c. $log_3(1/9)=1$ d. $log_{25}5=m$

e. $log_2(m+n)=y$ f. $log_{(m+n)}\, B=-3$

g. $log_2 x=(a+b)$ h. $log_{(1/2)}\, W=-2$

i. $log_2 x=$ (1/3)

5. Verifique si las siguientes igualdades se cumplen:

a. $log_{10}10=1$ b. log_2 1/8=1/3

c. $log_3(-9)=-2$ d. $log_{(1/2)}16=-4$

e. log_2 (1/8)$=-3$ f. $log_{32}2=-5$

g. $log_{10}(0{,}0001)=-4$ h. $log_{25}5=1/2$

i. $log_a a^n=n$

Propiedades

Para $a>0$, $a^n=b$ es equivalente a decir que $log_a b=n$ las propiedades del logaritmo son las mismas que se tienen en potenciación con base positiva.

Supongamos que M, N, a, b, son números reales positivos, $a\neq 1$ y $b\neq 1$, r y s números reales cualesquiera $(n\neq 0)$ tales que:

$M=a^r$ y $N=a^s$, es decir, $r=log_a M$ y $s=log_a N$

1. Como $log_a M$ existe y es único, tenemos que: Si $log_a M=log_a N$, entonces, $M=N$

   De igual manera, si $M=N$, podemos calcular a cada lado de la igualdad el log_a, y se conserva la igualdad, es decir,

   Si $M=N$, entonces: $log_a M=log_a N$. Resumiendo,

$log_a M = log_a N$ si y sólo si $M = N$

Ejemplos

1. Si $log_2\ M = log_2 23$, entonces: $M = 23$

2. Si $(1,5)^x = 225$, entonces: $log_a (1,5)^x = log_a 225$

2. En la potenciación tenemos que $a > 1$ y $r > s$ si y sólo si $a^r > a^s$ y $0 < a < 1$ y $r > s$ si y solo si $a^r < a^s$.

Si $a < 1$, entonces $log_a M > log_a N$ si y solo si $M > N$

Ejemplos

Si $log_2\ M > log_2 100$, entonces $M > 100$

Si $0 < a < 1$, entonces $(log_a M > log_a N$ si y solo si $M < N)$

$16 < 32$; por lo tanto, $log_{\frac{1}{2}}\ (16) > log_{\frac{1}{2}}\ 32$; en efecto,

$$log_{\frac{1}{2}}\ 16 = -4 > log_{\frac{1}{2}}\ 32 = -5$$

3. Si $a^r = M$ tenemos que $M^{1/r} = a$, es decir, $r = log_a M$ y $1/r = log_M a$ por lo tanto,

$$log_a \mathrm{M} \times log_{\mathrm{M}}\ a = 1$$

Ejemplos

Calcule $log_{32} 2$

Como $log_{32} 2 \times log_2\ 32 = 1$, tenemos que $log_{32} 2 = 1/log_2 32 = 1/5$

4. $$a^r \times a^s = a^{r+s}$$

Como $\mathrm{M}=a^r$ y $\mathrm{N}=a^s$ es decir, $r=log_a \mathrm{M}$ y $s=log_a \mathrm{N}$, reemplazando la propiedad: $a^r \times a^s = a^{r+s}$ significa que $\mathrm{M}\times\mathrm{N}=a^{r+s}$, es decir,

$log_a(\mathrm{M}\times\mathrm{N})= r+s$ por lo tanto:

$$log_a(\mathrm{M}\times\mathrm{N})=log_a\mathrm{M}+log_a\mathrm{N}$$

Ejemplo

$$log_3 81\times 243=log_3 81+log_3\, 243 = 4+5 = 9$$

5. $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ significa que $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = a^{r-s}$, es decir, $log_a \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = r - s$;

por lo tanto,

$$log_a \tfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = log_a \mathrm{M} - log_a \mathrm{N}$$

Ejemplo

$$log_2(1/16)= log_2 1 - log_2 16 = 0-4 = -4$$

6. $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$ significa que $M^s = a^{r\cdot s}$, es decir, $r\times s = log_a M^s = s\cdot r$; por lo tanto,

$$log_a \mathrm{M}^s = s\, log_a M$$

Ejemplo

1. $log_5\, 125^4 = 4.log_5 125 = 4\times 3 = 12$
2. Hallar el valor de x en la ecuación $2log_5 x = log_5 50$

$$2log_5 x = log_5\, 50$$

$$log_5 x^2 = log_5\, 50$$

$$x^2 = 50$$

$$x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \quad \text{o} \quad x = -5\sqrt{2}$$

$x = -5\sqrt{2}$ se descarta como solución de la ecuación inicial, ya que x debe ser positiva para que $log_5 x$ exista.

3. Aplicando propiedades expresar x en términos de y, en la igualdad

$$3log_5 x - 2log_5 y = 1$$

$$log_5 x^3 - log_5 y^2 = 1$$

$$log_5 \frac{x^3}{y^2} = 1$$

$$\frac{x^3}{y^2} = 5^1$$

$$x^3 = 5y^2$$

$$x = \sqrt[3]{5y^2}$$

Nota: los logaritmos con base 10 se denominan decimales; y en lugar de la designación $log_{10}\mathrm{M}$, se escribe: $log\mathrm{M}$.

Los logaritmos de base e (e es un número irracional, cuyo valor aproximado es $2{,}718281828459045\ldots$) se denominan naturales, y en lugar de la designación $log_e \mathrm{N}$, se escribe: $ln(\mathrm{N})$.

Como las calculadoras solo trabajan en base 10 y en base e, se hace necesario expresar $log_a b$ en función de log o ln, veamos:

Si $log_a b = n$ entonces $a^n = b$ aplicando log o ln a cada lado tenemos:

$$loga^n = logb$$

$$nloga = logb$$

$$n = \frac{logb}{loga} = log_a b$$

En general se tiene que:

$$log_x y = \frac{log_a y}{log_a x}$$

Ejemplos

1. Aplicando propiedades simplifique:

   a. $m^{3log_m x}$ b. $3log(a^2 \cdot b^4) - 2log(a \cdot b^2)$

Solución

a. $$m^{3log_m x} = m^{log_m x^3} = x^3$$

b. $$3log(a^2 \cdot b^4) - 2log(a \cdot b^2) = log(a^2 \cdot b^4)^3 - log(a \cdot b^2)^2$$
$$= log(a^6 \cdot b^{12}) - log(a^2 \cdot b^4)$$
$$3log(a^2.b^4) \; - \; 2log(a.b^2) \; = \; log\left(\frac{a^6.b^{12}}{a^2.b^4}\right) \; = log(a^4.b^8)$$

2. hallar x:

   a. $log_3\, 9^{4x} = 5x + 6$ b. $log_2(log_3(2x+1)) = 1$

   c. $log_a(x+2) = 2log_a 3 + log_a 5 - log_a 10 - log_a 2$

Solución

a. $log_3\, 9^{4x} = 5x + 6$

$4x \cdot log_3 9 = 5x + 6$, como $log_3 9 = 2$

$8x = 5x + 6$

$3x = 6$, luego, $x = 2$

b. $log_2(log_3(2x+1)) = 1$, aplicando la definición de logaritmo.

$$log_3(2x+1)) = 2^1 = 2$$
$$2x + 1 = 3^2 = 9$$
$$x = 4$$

c.
$$log_a(x+2) = 2log_a 3 + log_a 5 - log_a 10 - log_a 2$$
$$log_a(x+2) = log_a 3^2 + log_a 5 - (log_a 10 + log_a 2)$$
$$log_a(x+2) = log_a(3^2 \times 5) - log_a(10 \times 2)$$
$$log_a(x+2) = log_a 45 - log_a 20$$
$$log_a(x+2) = log_a(45/20)$$
$$log_a(x+2) = log_a \frac{9}{4}$$
$$x + 2 = \frac{9}{4}, \text{ luego, } x = \frac{1}{4}$$

3. Si $log_a \sqrt{\frac{x}{y^3}} = 3$ y $log_a \sqrt{\frac{y}{x}} = 9$, calcular $log_x y$, aplicando las propiedades de los logaritmos, tenemos

$$\frac{1}{2} log_a x - \frac{3}{2} log_a y = 3 \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} log_a x + \frac{1}{2} log_a y = -9$$

Sumando las dos igualdades obtenemos: $-log_a y = -6$

por lo tanto $log_a y = 6$

Reemplazando, tenemos que: $-\frac{1}{2} log_a x + \frac{1}{2} \times 6 = -9$

$-\frac{1}{2} log_a x = -9 - 3$ es decir, $log_a x = 24$

y como $log_x y = \frac{log_a y}{log_a x}$, luego $log_x y = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Ejercicio 4.10

1. Simplifique:

   a. $b^{log_b 3}$

   b. $b^{2log_b 2}$

   c. $3^{\frac{1}{2}log_3 81}$

   d. $10^{3log_{10} 2}$

   e. $log_5 \frac{5}{7} + log_5 \frac{49}{25}$

   f. $log_2 \frac{32}{11} + log_2 \frac{121}{16} - log_2 \frac{4}{5}$

   g. $log_a (c^2 - cd) - log_a (2c - 2d)$

   h. $log_c (a^2 - ab) - log_c (7a - 7b)$

   i. $log_x \left(a + \frac{a}{b}\right) log_x \left(c + \frac{c}{b}\right)$

   j. $3log \frac{a^2 b}{c^2} + 2log \frac{bc^2}{a^4} + 2log \frac{abc}{2}$

2. Halle el valor de x:

   a. $log_x 64 = 3$

   b. $log_5 x = -2$

   c. $3^{log_3 x} = 1/4$

   d. $log_2 8^{2x} = 4x - 8$

   e. $log_2(log_2(x + 3)) = 3$

   f. $log_x x^x = 6$

g. $log_b x = log_b 2 + 3log_b 2 - log_b 24$

h. $log_b x = \frac{1}{2} log_b 3 + log_b 4 - \frac{1}{2} log_b 2$

i. $log(x) = 3log(2) + 3log(5) - 2$

j. $lnx = \frac{1}{2} ln16 - \frac{1}{3} ln\, 8 + 1$

3. En cada caso si $x>0$, verifique si se cumple la igualdad:

a. $log\,(3x^4+6x^2) = log\,3 + 2logx + log\,(x^2+2)$

b. $ln\frac{49x^3}{13} = 2ln7 + 3lnx - ln(13)$

c. $3log\,(x+5) + log\,a - log125 = log\,a\cdot[(x+5)/5]^3$

4. Exprese el logaritmo dado en función de logaritmos de expresiones más sencillas:

a. $log\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$

b. $log_b\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)$

c. $ln\left(\frac{x(x+2)^2}{(x-2)^4}\right)$

d. $log_b\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x^2}\right)$

e. $log\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}\right)$

f. $ln\left(\sqrt{\frac{x(x^2-5)}{(x^2+3)(x^2-3)}}\right)$

5. Cuál es el valor de z, si se sabe que:
$log_a y = 6$ $\qquad log_a \sqrt{\frac{z}{y}} = log_a \sqrt[3]{\frac{y}{z^2}}$

6. Si $log3 = 0{,}48$ y $log7 = 0{,}85$, calcule:

a. $log147$

b. $log243$

c. $log63$

d. $log\left(\frac{49}{81}\right)$

7. Si $log_b\,(x,y) = 7$ y $log_b\left(\frac{x}{y}\right) = 5$ calcule:

a. $log_b \frac{\sqrt[7]{x^2}}{y^3}$ b. $log_b \frac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[4]{y^3}}$

c. $log_b \frac{\sqrt[5]{x^2}}{x^4 y^3}$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Una ecuación exponencial es aquella donde la variable es un exponente. Si a es un número real positivo es decir $a \in \mathbb{R}^+$, y x es un número real, $x \in \mathbb{R}$, entonces una ecuación exponencial es de la forma:

$a^x = b$ donde b es una constante.

Ejemplo

1. Resolver la ecuación $2^x = 64$

   Se debe buscar un número x, tal que 2 elevado al número x, dé 64. Para esta ecuación es fácil buscar el número; es 6, ya que $2^6 = 64$, luego la solución de la ecuación es $x = 6$.

2. Resolver la ecuación $5^x = 12$

   Para esta ecuación no es fácil buscar un numero $x \in \mathbb{R}$ tal, que 5 elevado a ese número x, el resultado sea 12. Luego se debe realizar el siguiente procedimiento:

   $5^x = 12$ Aplicando logaritmo natural en ambos miembros

   $ln 5^x = ln 12$ Aplicando las leyes de los logaritmos

   $x ln 5 = ln 12$ Despejando x

   $x = \frac{ln\ 12}{ln\ 5}$

   $x = 1.5439$

3. Resolver la ecuación $5^{x+3} = 8$

   $5^{x+3} = 8$ Aplicando logaritmo natural en ambos miembros

   $ln\ 5^{x+3} = ln\ 8$

   $(x+3) ln 5 = ln\ 8$ Aplicando las leyes de los logaritmos

$$x = \frac{ln\,8}{ln\,5} - 3 \quad \text{Despejando } x$$
$$x = 1.2920 - 3$$
$$x = -1.7079$$

4. Resolver la ecuación $9e^{5x}=20$
$9e^{5x}= 20$ Aplicando logaritmo natural en ambos miembros
$\ln\,(e^{5\,x}) = \ln(\frac{20}{9})$ Aplicando las leyes de los logaritmos

$$5x = \ln(\tfrac{20}{9}) \quad \text{Despejando } x$$
$$x = \tfrac{0.7985}{5}$$
$$x = 0.1597$$

Ejemplo

a. $e^{2x+3} = 1$

b. $a^x = b$

c. $3^{x^2-2} = \sqrt[3]{243}$;

d. $ln(2x+3) + ln(\,x-1)=1$

Para resolver estas ecuaciones utilizamos las propiedades de la potenciación y **logaritmación en los números reales**, recordemos que:

Para a, b , m y n números reales positivos:

$a=b$ si y sólo si $log_n\, a= log_n b$

$a=b$ si y sólo si $a^n= b^n$

$a^n=a^m$ si y sólo si $n =m$

5. Resolver $e^{2x+3} =1$.

$$e^{2x+3}= 1$$
$$2x+3= ln(1)$$
$$2x+3= 0$$
$$x = -\frac{3}{2}$$

6. Resolver $a^x=b$; $a>0$ y $b>0$

   Si a partir de las propiedades es posible expresar b como potencia racional de la base a, en que aparece la incógnita, es decir, $b=a^n$ con n número racional, tenemos: $a^x=a^n$ por lo tanto $x=n$

Otra forma de resolver la ecuación $a^x=b$; $a>0$ y $b>0$

$$a^x = b$$

$$x = log_a b$$

Si no es posible expresar $b=a^n$ con n racional, para efectos prácticos aplicamos logaritmo natural (ln) o logaritmo en base 10 (log), que son los que utilizan los instrumentos de cálculo.

Si $a^x=b$ entonces $ln(a)^x = ln(b)$

$$x \cdot ln(a) = ln(b)$$

$$x = \frac{ln(b)}{ln(a)}$$

7. Resolver: $3^{x^2-2} = \sqrt[3]{243}$

$$3^{x^2-2} = \sqrt[3]{243}$$

$$x^2-2 = log_3(243)^{1/3}$$

$$x^2-2 = (1/3)\ log_3 243$$

$$x^2-2 = 5/3$$

$$x^2-11/3 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{\sqrt{33}}{3} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{\sqrt{11}}{3} = -\frac{\sqrt{33}}{3}$$

Otra forma de resolver la ecuación $3^{x^2-2} = \sqrt[3]{243}$ es expresar, $\sqrt[3]{243}$, en la base en que aparece la incógnita, en este caso es base 3; descomponiendo el 243 tenemos que $243=3^5$, por lo tanto $\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3^{5/3}$ reemplazando en la ecuación tenemos:
$3^{x^2-2} = 3^{5/3}$ entonces $x^2-2=5/3$ luego,

$$x = \frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{\sqrt{33}}{3} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{\sqrt{11}}{3} = -\frac{\sqrt{33}}{3}$$

8. Resolver: $2log(2x+3)-log(x-1)=1$

$$2log(2x+3)^2-log(x-1)=1$$

$$\log\frac{(2x+3)^2}{x-1} = 1$$

$$\frac{(2x+3)^2}{x-1} = 10^1$$

$$4x^2+12x+9=10x-10$$

$$4x^2+2x+19=0$$

El problema se reduce a resolver una ecuación de segundo grado.

9. Hallar n en la ecuación $F=P(1+i)^n$

si, $\mathrm{F}=\mathrm{P}(1+i)^n$

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{P}}=(1+i)^n$$

$$ln\left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{P}}\right)=ln(1+i)^n$$

$$ln(\mathrm{F})-ln(\mathrm{P})=nln(1+i)$$

$$n=\frac{ln(\mathrm{F})-ln(\mathrm{P})}{ln(1+i)}$$

10. Resolver: $e^{2x}-5e^x-36=0$

Observemos que $e^{2x}=(e^x)^2$, reemplazando tenemos:

$e^{2x}-5e^x-36=(e^x)^2-5(e^x)^2-36$, esta presentación hace evidente el cambio de variable, $e^x=z$, por lo que se resuelve, así:

$e^{2x}-5e^x-36=0$, es equivalente a resolver:

$$z^2-5z-36=0$$

$$(z-9)(z+4)=0$$

$$z=9 \text{ ó } z=-4$$

Para $z=9$ tenemos $e^x=9$ por lo tanto $x=ln9$
Para $z=-4$ tenemos $e^x=-4$ por lo tanto $x=ln(-4)$ no existe.

Ejercicio 4.11

1. Halle el conjunto de las soluciones reales y complejas de:

   a. $x^4 = 16$
   b. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$
   c. $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$
   d. $x^3 - 4x^2 - 10x + 13 = 0$

2. Resuelva la ecuación exponencial dada:

   a. $3^{x+1} = 81$
   b. $2^{x+2} = 4^{x-1}$
   c. $e^x - e^{-x} = 2$
   d. $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$
   e. $e^{2x} - 2e^{-2x} - 1 = 0$
   f. $e^{3x} - 3e^{2x} + 4e^x - 4 = 0$
   g. $2e^{4x} + e^{3x} + e^{2x} + 11e^x - 6 = 0$
   h. $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
   i. $3e^{3x} - 7e^{2x} - 19e^x - 5 + 4e^{-x} = 0$
   j. $2e^{3x} - 4e^{-3x} - 7 = 0$
   k. $5^x = 7^{x+1}$
   l. $3^x - 3^{-x} = 4$

3. Resuelva la ecuación logarítmica dada:

   a. $logx - log\,(x-2) = log\,2$
   b. $log\,x + log\,(x-1) = log\,6$
   c. $ln12 - ln(x-1) = ln(x-2)$
   d. $log\,(x-2) + log\,(x-1) = log\,6$
   e. $log\,(2x-3) = 1 - log\,(x-2)$
   f. $ln|x| + ln|x+3| = ln18$
   g. $log\,|x+3| = log\,14 - log\,|x-2|$
   h. $log\,|x| + log\,|x-2| = log\,1$
   i. $log|x| + log|x-2| = log(1.000)$

j. $log_a(2x-1)+log_a x = log_a(x+4)$

k. $log\,(x\,+3)\;=\;2$

l. $log_2(x\;+\;4)-\;log_2(x-3)\;=\;3$

Problemas

1. La población actual de cierta ciudad es de 2'500.000 habitantes y crece anualmente en un 8%. Calcular la población en:

   a. 1 año b. 2 años c. 10 años d. n años

Solución:

a. Sea $\mathrm{P}_0 =$ 2'500.00 la población actual, calcular la población en un año equivale a hallar el 8% más de 2'500.000, es decir, $\mathrm{P}_1 =$ 2'500.000 (1,08) = 2'700.000 habitantes.

b. Calcular la población en 2 años equivale a hallar el 8% más de P_1, $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}1$

   1,08 P_0 $(1{,}08)^2 =$ 2'916.000 habitantes.

c. Calcular la población en 10 años equivale a hallar el 8% más de P_9, a su vez P_9 equivale a hallar el 8% más de P_8 .. . etc.

   $\mathrm{P}_{10} = \mathrm{P}9\ (1{,}08) = \mathrm{P}_8(1{,}08)^2 = \mathrm{P}7\ (1{,}08)^3 = \ldots = \mathrm{P}_0\ (1{,}08)^{10}$

   P^{10}=2'500.000$(1{,}08)^{10}$ = 5'397.313 habitantes.

d. $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_0\ (1{,}08)^n$ =2'500.000$(1{,}08)^n$

   Para una tasa de crecimiento i, por período, la población P_0 en n períodos es:

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_0\ (1+i)^n$$

2. ¿En cuántos años se duplica una población P, si crece anualmente en un 10% ?

   $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}$; $\mathrm{P}_n = 2\mathrm{P}$; $i = 0{,}1$ $(10\%$, anualmente$)$; $n =$? Reemplazando tenemos:

   $2\mathrm{P} = \mathrm{P}(1{,}1)^n$; cancelando P nos queda:

$(1{,}1)^n=2$ calculando logaritmo natural a cada lado,

$ln(1{,}1)^n = ln2$, aplicando propiedad de logaritmo; $n \times ln(1{,}1) = ln2$

$$n = \frac{ln2}{ln(1{,}1)} = 7{,}27 \text{ años} = 7 \text{ años, 3 meses, 7 días}$$

3. ¿En qué % anual crecerá una población de 5'000.000, si se estima que en 5 años es de 7'000.000?

$P_0 = 5'000.000$; $P_n = 7'000.000$; $n=5$; $i=?$; reemplazando tenemos
$7'000.000=5'000.000(1+i)^5$ simplificando
$5(1+i)^5=7$; $(1+i)^5=7/5$; $1+i=(1{,}4)^{1/5}$; $i=1{,}0696-1$
$i=0{,}0696=6{,}96\%$ anual

4. Halle el valor futuro de $1'000.000 colocado a una tasa de interés del 3% mensual durante un año, si el interés es:

a. Simple b. Compuesto

Solución

El valor actual en este caso $1'000.000 se denomina valor presente, y lo notaremos P, el valor presente, más los intereses se denomina valor futuro y lo notaremos por F.

a. $P=1'000.000$ $i=0{,}03$ (3% mensual), $n=12$ meses (1 año) $F = ?$

El interés simple significa que los intereses que produce P en un periodo $(P \times i)$ es igual para cada uno de los n períodos que esté colocado el capital, es decir,

$$F = P + Pin$$
$$F = P(1+in)$$
$$F = 1'000.000(1+0{,}03 \times 12) = \$1'360.000$$

b. $P=1'000.000$ $i=0{,}03(3\%$ mensual$)$ $n=12$ meses $(1$ año$)$ $F = ?$

El interés compuesto significa que los intereses de un período forman parte del capital en siguiente período, para $n=1$ tenemos:

$F_1=P(1+i)$; para $n=2$ tenemos:

$F_2=F_1(1+i)=P(1+i)^2$; para $n=3$ tenemos:

$F_3=F_2(1+i)=P(1+i)^3$; en general para n períodos

$F=P(1+i)^n$; resolviendo el problema tenemos:

$$F=1'000.000(1,03)^{12}=1'425.760,88$$

5. Una deuda de 10 millones que se debe pagar dentro de 10 meses, se conviene pagar hoy (anticipadamente) con un tasa de descuento del 2,5% mensual. Calcular el valor anticipado de la deuda si el interés es:

   a. Simple b. Compuesto

Solución

a. $F=10'000.000$, $i=0,025$, $n=10$ $P=$? reemplazando en

$F=P(1+i\times n)$ tenemos:

$10'000.000=P(1+0,025\times 10)$

$10'000.000=P\times 1,25$ $P=\$8'000.000$

b. $F=10'000.000$ $i=0,025$ $n=10$ $P=$? reemplazando en
$F=P(1+i)^n$

tenemos:

$10'000.000=P(1+0,025)^{10}$

$10'000.000=P\times 1,28008$; $P=\$7'811.984$

Observe que el valor anticipado de la deuda es mayor cuando la tasa de descuento es simple.

6. Convertir una tasa del 9% trimestral compuesta a una tasa equivalente:

   a. Anual b. Semestral c. Mensual

Solución

a. Como un año tiene 4 trimestres y las tasas son equivalentes, esto significa que hacer una capitalización anual de intereses equivale a hacer cuatro capitalizaciones trimestrales, es decir, para un valor presente P se tiene que: $F=P(1+i)^1=P(1+0,09)^4$; donde i es la tasa de interés anual

Cancelando P tenemos: $(1+i)=(1,09)^4$ donde i=41,16% anual.

b. Como un semestre tiene 2 trimestres, para un valor presente P se tiene que:

$F=P(1+1)^1=(1+0,09)^2$; donde i es la tasa de interés semestral

Cancelando P tenemos: $(1+i)=(1{,}09)^2$, donde $i=18{,}8\%$ semestral

c. Como un trimestre son 3 meses, una capitalización trimestral equivale a tres capitalizaciones mensuales, para un valor presente P, tenemos:

$\mathrm{F}=\mathrm{P}(1+i)^3=\mathrm{P}(1+0{,}09)^1$, donde i es la tasa de interés mensual $(1+i)^3=1{,}09$ de donde $i=(1{,}09)^{1/3}-1=0{,}029$; $i=2{,}9\%$ mensual

Ejercicio 4.12

1. Convierta una tasa del 18% semestral a una tasa equivalente:

   a. Anual b. Mensual c. Trimestral d. Diaria

2. Un préstamo de $10'000.000 se conviene cancelar en un solo pago dentro de un año, a una tasa de interés del 3,2% mensual. ¿Cuál es el valor por pagar?

3. Si se conviene pagar anticipadamente una deuda de $4'000.000 que vence en 8 meses, con una tasa de descuento del 7% trimestral, halle el valor anticipado de la deuda.

4. Si el salario mínimo en 1995 es de $120.000 y tiene un incremento estimado del 20% anual, calcule:

   a. El salario mínimo para el 2000

   b. En cuántos años se duplica el salario.

   c. ¿En qué año aproximadamente, el salario mínimo será de $1'000.000?

5. ¿A qué tasa de interés mensual se debe colocar un capital para que se duplique en 15 meses?

6. Un crédito de $12'000.000 se pacta pagar en 36 cuotas mensuales iguales a una tasa del 3% mensual. Halle el valor de la cuota, si el pago de esta es:

   a. Vencida b. Anticipada

7. Una población que hoy es de 1'000.000 de habitantes tiene un crecimiento continuo del 7% anual.

   a. Calcule la población en 10 años b. ¿En cuántos años se duplica?

8. ¿Qué tasa de crecimiento anual continuo tiene una población que se duplica en 15 años?
9. Una especie en vía de extinción disminuye su población en un 10% anual. En cuántos años la población actual se reducirá:

   a. A la mitad b. Al 30% c. En un 30%
10. Se quiere pagar el saldo de una deuda que tiene pendiente 10 cuotas mensuales de $200.000. Halle el saldo si se paga una tasa de interés del 54% efectivo anual.
11. Halle la rentabilidad efectiva anual de un título que se compra por el 96% de su valor y vence en 36 días.
12. Un crédito para compra de carro por $20'000.000 se paga a 36 meses en cuotas fijas mensuales, si se paga un interés del 2% compuesto mensual, calcular:

    a) Valor de la cuota b) Saldo al final del segundo año.

Aplicaciones de la función exponencial

Los modelos matemáticos para explicar crecimiento o decrecimiento porcentual de población, motivan en principio al estudio de la función definida como:

$$y = f(x) = P(1+k)^x \text{, donde } P = c \text{ y } 1+k = b$$
$$y = f(x) = c \cdot b^x \; a, b > 0$$

Esta función se denomina **exponencial**.

El número e

La base mas importante en las funciones exponenciales es el número e, este número se puede explicar a partir de problemas prácticos como el siguiente.

Ejemplo

Hallar el valor futuro en un año de $1 colocado a una tasa de interés compuesto anual del 36% capitalizable:

a. Semestralmente b. Trimestralmente

c. Mensualmente d. Diariamente

e. Continuamente.

Una tasa de interés compuesto anual que se capitaliza o se le aplican los intereses en más de un período durante el año, se denomina **nominal**, y se nota por j; el número de períodos de capitalización se nota por m.

a. Capitalizable semestralmente: significa que los intereses se causan cada semestre, es decir, $m=2$, por lo tanto la tasa de interés semestral es $i=\frac{j}{2}=18\%$.

Como $P=1$ el valor futuro en un año es:

$$F=P(1+i)^n=P(1+\frac{j}{2})^m=\mathrm{P}(1+\frac{j}{2})^2$$

$$F=1(1+0{,}18)^2=1{,}3924$$

Observemos que la tasa de interés efectiva anual es el 39,24%.

b. Capitalizable trimestralmente: los intereses se causan cada trimestre, es decir, $m=4$, por lo tanto la tasa de interés trimestral es

$i=\frac{j}{4}=9\%$. El valor futuro en un año es:

$$F=\mathrm{P}(1+i)^n=P(1+\frac{j}{4})^4$$

$$F=1(1+0{,}09)^4=1{,}4115$$

La tasa de interés efectiva anual es el 41,15%.

c. Capitalizable mensualmente: los intereses se causan cada mes, es decir, $m=12$, por lo tanto la tasa de interés mensual es $i=\frac{j}{12}=3\%$.
El valor futuro en un año es:

$$F=\mathrm{P}(1+i)^n=P\,(1+\frac{j}{12})^{12}$$

$$F=1(1+0{,}03)^{12}=1{,}4257$$

La tasa de interés efectiva anual es el 42,57%.

d. Capitalizable diariamente: los intereses se causan cada día, es decir, $m=360$, por lo tanto la tasa de interés diario es $i=\frac{j}{360}=0{,}1\%$.

El valor futuro en un año es:

$$F = \mathrm{P}(1+i)^n = P\,(1+\tfrac{j}{360})^{360}$$

$$F = 1(1+0{,}03)^{360} = 1{,}433$$

La tasa de interés efectiva anual es el 43,3%.

Observemos que entre más capitalizaciones, mayor es el **valor futuro** F y la tasa de interés efectiva anual, pero a su vez el crecimiento es cada vez menor. y. Capitalizar continuamente significa que m tiende a infinito, $m \to \infty$, por lo tanto el **valor futuro** en un año es encontrar a qué valor tiende; $F = (1+\frac{j}{m})^m$ cuando $m \to \infty$

Se puede demostrar que: $(1+\frac{1}{m})^m \to e =$ 2,7182 cuando $m \to \infty$ y

$$(1+\frac{j}{m})^m \to e^j \text{ cuando } m \to \infty$$

Por lo tanto, el valor futuro en un año es $F = e^{0{,}36}$ 1,4333 y la tasa de interés efectiva anual es el 43,33%.

En general, en la expresión $F(t) = Pe^{kt}$, F se mide el crecimiento $(k>0)$ o decrecimiento $(k<0)$ exponencial continuo (que denominaremos exponencial) de un valor inicial $P>0$, que tiene una variación porcentual k por período, durante t número de períodos.

Función logarítmica

Del estudio de los números reales tenemos que si $b>0$ y $b^x = y$ entonces $x = log_b y$, si $y = f(x) = b^x$, la función definida como $g(x) = log_b x$ es la **función inversa** de f, es decir, $g(x) = f^{-1}(x) = log_b x$

La función logarítmica $y = f(x) = log_b x$ tiene las siguientes propiedades:

a. $Dom(f) = (0, +\infty)$

b. $Rec(f) = (-\infty, +\infty)$

c. f no es par ni impar

d. Si $b>1$, f es siempre creciente y si $0<b<1$, f es siempre decreciente.

e. f intersecta al eje x en el punto (1, 0) y no intersecta al eje y.

Aplicaciones

Ejemplos

1. El número de bacterias en un cultivo crece exponencialmente, si inicialmente están presentes en un cierto cultivo 5.000 bacterias y 30 minutos después están presentes 20.000. Hallar la tasa de crecimiento por minuto y ¿cuántas bacterias estarán presentes al final de una hora?

Si $Q(t)$ representa el número de bacterias en función del tiempo t en minutos. Como el número de bacterias crece exponencialmente, e inicialmente estaban presentes 5.000 bacterias, Q es una función definida como:

$$
\begin{aligned}
& & Q(t) &= 5.000\, e^{kt} \\
\text{Cuando } t = 30 & & Q(30) &= 20.000 \\
& & 20.000 &= 5.000 e^{30k} \\
& & e^{30k} &= 4 \\
& & 30k &= ln4 \\
& & k &= \frac{ln4}{30} = 0{,}0462
\end{aligned}
$$

El número de bacterias presentes al final de una hora es $Q(60)$.

$Q(60) = 5.000e^{0{,}0462(60)} = 80.000$ bacterias

2. Está previsto que dentro de t años, la población de un cierto país será de $P(t) = 50e^{0{,}02t}$ millones.

   a. ¿Cuál será la población dentro de 30 años?
   b. ¿En cuántos años se duplica la población?

Solución

a. $P(30) = 50e^{0{,}02(30)} = 91{,}1$ millones
b. $P(t) = 2P(0) = 100$
   $P(t) = 50.e^{0{,}02t} = 100$
   $e^{0{,}02t} = 2$
   $0{,}02t = ln2$

$t = \dfrac{ln2}{0.02} = 34{,}65$ por tanto en 34,65 años se duplica la publicación

3. ¿Cuánto dinero se debe invertir en una cuenta en dólares que paga un interés anual del 7% compuesto continuamente, para que dentro de 10 años el saldo sea de U$40.000?

$$P.e^{0,07t} = F$$
$$P.e^{0,07(10)} = 40.000$$

$$P = \frac{40.000}{e^{0,7}}$$

$$P = 19.863{,}4 \text{ dólares}$$

4. El valor V de una máquina se deprecia exponencialmente en un 8% anual, si después de 10 años su valor es de $2'000.000. Exprese el valor de la máquina en función del tiempo en años y con base en esta función, calcular en cuántos años se deprecia la maquinaria, si tiene un valor de salvamento del 20% del valor inicial.

   Encuentre un modelo para la depreciación acumulada:
   $V(t)=V_0e^{kt}$, como la máquina se deprecia un 8% anual, $k=-0{,}08$
   $V(t)=V_0e^{-0,08t}$, después de 10 años $V(10)=2'000.000$
   $V_0e^{-0,08(10)}=2'000.000$
   $V_0=2'000.000/e^{-0,8}=\$4'451.100$

   el valor de salvamento es $0{,}2\times 4'451.100=890.220$, debemos hallar

$$t \text{ cuando } V(t) = \$890.220$$
$$4'451.100\, e^{-0,8t} = 890.220$$
$$e^{-0,08t} = 890.220/4{,}451.100$$
$$-0{,}08t = ln(0{,}2)$$
$$t = ln\,(0{,}2)/-0{,}08 = 20 \text{ años}$$

   La depreciación acumulada en el momento es:
   $D(t)=V_0-V_0e^{-0,08t}$

$$D(t)= 4'451.100(1-e^{-0,08t})$$

Observemos que $D(t)$ es creciente pero acotada, la depreciación acumulada máxima es V_0. En general, si A, B y k son constantes positivas, la función f definida como $f(x)=B-A\cdot e^{-kt}$, es creciente y acotada, $f(x)<B$, $(\forall x\in Dom(f))$. Muchos modelos prácticos responden a esta característica.

Función logística

Ejemplos

1. La eficiencia o el aprendizaje en función del tiempo de entrenamiento o de estudio.

En una población determinada B algunos fenómenos como la propagación de enfermedades contagiosas; la variación promedio del número de personas enfermas, y, con respecto al tiempo, t, es directamente proporcional tanto al número de personas enfermas y, como al número de personas que no están enfermas $B-y$,

$\frac{\triangle y}{\triangle t} = ky(B-y)$, la solución a esta ecuación cuando $\triangle t \to 0$ origina la función $f(t) = \frac{B}{1+A.e^{-Bkt}}$;B, A y k y constantes positivas esta función se denomina **función logística**.

La **función logística** es un modelo bastante preciso para medir el crecimiento de una población, cuando los factores ambientales imponen un límite superior en el tamaño posible de la población, también describe la propagación de rumores en una comunidad.

2. Los registros de salud pública indican que t días después del brote de una enfermedad, $Q(t)=200/1+\ 39e^{-1,2t}$ personas han contraído la enfermedad.

   a. ¿Cuántas personas tenían la enfermedad inicialmente?

   b. ¿Cuántas personas han contraído la enfermedad al final de la segunda semana?

   c. Si la tendencia continúa, aproximadamente ¿cuántas personas contraerán la enfermedad?

Solución

a. Calculamos $Q(0)$ $Q(0) = 200/(1+39e^{-1,2(0)}) = 5$ personas.

b. Calculamos $Q(2)$ $Q(2) = 200/(1+39e^{-1,2(2)}) = 44$ personas.

c. Cuando $t \to \infty$ $Q(t) = 200$ personas.

Ejercicio 4.13

1. Calcule por inspección
   a. $\ln e^3$
   b. $\ln \sqrt{e}$
   c. $e^{\ln 5}$
   d. $e^{2 \ln 3}$
   e. $e^{3\ln 2 - 2\ln 5}$
   f. $\ln\left(e^3 . \sqrt[3]{e} / e^{1/6}\right)$
2. Halle el valor de x:
   a. $2 = e^{0,06\,x}$
   b. $Q_o/2 = Q_o e^{-1,2x}$
   c. $3 = 2 + 5e^{-4x}$
   d. $-2 \ln x = b$
   e. $100 = x.e^{0,2(10)}$
   f. $4.e^{2/x} = 20$
   g. $a^k = e^{kx}$
   h. $-\ln x = t/(50 + C)$
   i. $5 = 3\ln(x) - (1/2)\ln(x)$
   j. $\ln(x) = (1/3)\ln(16) + 2\ln(2))$
   k. $\ln(x) = 2(\ln(3) - \ln(5))$
3. En cuánto tiempo se duplica un capital, si se invierte a un interés nominal anual del 28%, si se capitaliza:
   a. Semestralmente
   b. Trimestralmente
   c. Continuamente
4. Un capital en dólares que se coloca en un banco, se triplica cada 8 años. ¿Qué interés anual ofrece el banco, si este se compone continuamente?
5. Algunos demógrafos creen que la tierra puede soportar una población máxima de cuarenta mil millones de personas. Si la población de la tierra era aproximadamente de tres mil millones en 1960 y de cuatro mil millones en 1975, y está creciendo exponencialmente. ¿En qué año alcanzará la población el límite teórico de cuarenta mil millones?
6. La cantidad que contiene un cuerpo después de t años de cierta sustancia radiactiva está dada por la función Q, definida $Q(t)=Q_0 e^{-0,003t}$

Halle la vida media o tiempo en que la cantidad $Q(t)$ de la sustancia se reduce a la mitad de la sustancia original $Q(t)=\frac{Q_0}{2}$.

7. El radio se desintegra exponencialmente. Si su vida media es de 1.690 años. ¿Cuánto tardará una muestra de 200 gramos de radio en reducirse a 10 gramos?
8. Si el Producto Interno Bruto (PIB) de un cierto país en 1975 era de US$ 250 (miles de millones) y en 1995 es de US$ 600 (miles de millones). Encuentre un modelo para predecir el (PIB) en el 2000 si está creciendo:
   a. Linealmente
   b. Exponencialmente
   c. Una tasa anual k
   d. Si crece exponencialmente que % anual en promedio está creciendo.
9. Un trabajador sin experiencia revisa 270 unidades por hora, de un producto, después de 6 meses de experiencia revisa 420 unidades por hora. Si se considera que puede alcanzar un tope de 600 unidades, y el número de unidades por hora en función del tiempo de experiencia en meses $Q(t)$ está dado por: $Q(t)=B-Ae^{-kt}$. Halle $Q(t)$ y con base en esa función cuántas unidades por hora revisa al completar un año de experiencia.
10. Se estima que la población de un cierto país crece exponencialmente. Si la población era de 25 millones en 1978 y de 35 millones en 1995.
    a. ¿Cuál será la población en el 2000?
    b. ¿En qué año la población será de 50 millones?
11. El director de correos de una gran ciudad estima que después de t meses en el trabajo, el empleado medio puede clasificar $Q(t)=800-400e^{-0,5t}$ cartas por hora.
    a. ¿Cuántas cartas puede clasificar por hora un empleado sin experiencia?

b. ¿Cuántas cartas puede clasificar por hora un empleado con 6 meses de experiencia?

c. Aproximadamente cuántas cartas máximo por hora podrá clasificar un empleado medio?

12. Un estudio estadístico acerca del funcionamiento de un artefacto, muestra que la fracción de estos que funcionan después de t años de uso es aproximadamente de $f(t)=e^{-0,12t}$.

a. ¿Qué porcentaje de artefactos se espera que trabajen al cabo de 4 años?

b. ¿Qué porcentaje de artefactos dejan de funcionar durante el año 4?

13. Un fábrica de bombillos ha encontrado que la fracción de bombillos que se funden en t horas está dada por $f(t)=1-e^{-0,003t}$

a. ¿Qué porcentaje se funde durante las primeras 24 horas?

b. ¿Qué porcentaje funciona pasadas 48 horas?

c. ¿Qué porcentaje se funde entre 24 y 48 horas?

14. A y B reciben cada uno una tasa de café bien caliente, A le agrega a su café una crema que le disminuye la temperatura en 5°C, 30 segundos después, B le agrega a su café crema que, le disminuye la temperatura en 5°C y proceden a tomar cada uno su tasa de café. ¿Quién toma el café más caliente?

Tenga en cuenta la Ley de Newton del enfriamiento que dice: en un cuerpo que se está enfriando, la rapidez con que la temperatura $T(t)$ cambia es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente que lo rodea. Sugerencia utilizar la función $T(t) = ce^{kt}+Tm$, donde T es la temperatura del objeto y $T(m)$ temperatura del medio.

15. Un accidente de tráfico fue presenciado por el 2% de los habitantes de un pequeño pueblo. Si el número de habitantes que oyeron hablar sobre el accidente t horas después, viene dado por una función de la forma $f(t)=B/(1+Ce^{-kt})$, donde es la población del pueblo y el 25% de los habitantes oyeron hablar sobre el accidente después de 2 horas.¿En cuánto tiempo se enteraron de la noticia?

a. El 50% de los habitantes b. El 75%

16. La cantidad de carbono 14 radiactivo (C−14) que permanece en un fósil está dada por la función f definida como $f(t)=C_0e^{kt}$, si la *semivida* o vida media del C−14 es de 5.600 años, determine la edad de un fósil que contiene el 0,1% de la cantidad original de C−14.

Funciones hiperbólicas

Las funciones exponenciales naturales como $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ son muy útiles porque al combinarlas se pueden formar otras funciones llamadas **funciones hiperbólicas**. En primer lugar graficaremos las funciones:

$$y = \tfrac{1}{2}e^x \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{2}e^{-x}$$

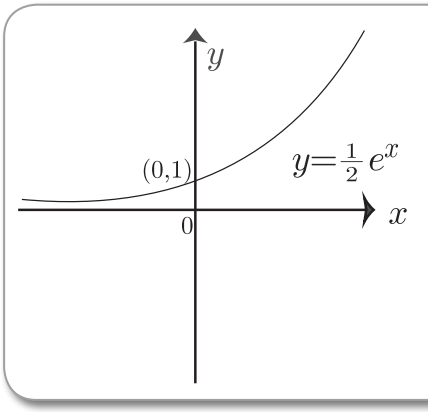


Figura 1

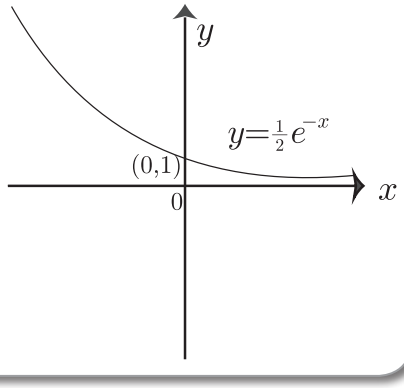


Figura 2

Al sumar estas funciones obtenemos la expresión:

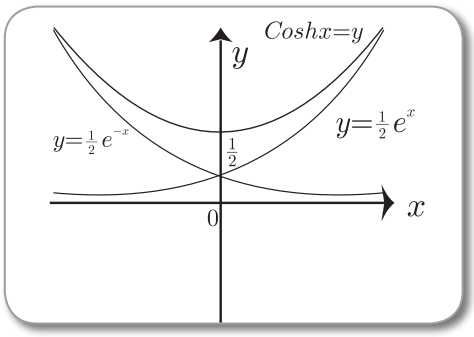
$$y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

A esta expresión se le denomina **coseno hiperbólico**

y se nota $Cos\ hx = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

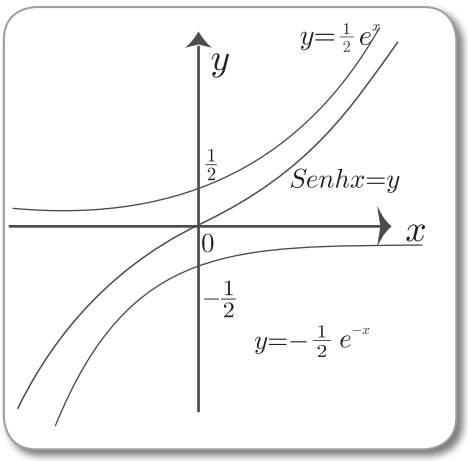
Nótese que $f(x)\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ es una función par, porque

$$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=f(x)$$



De manera análoga podemos definir el **seno hiperbólico**. Simplemente restando las dos funciones y nos queda:

$$Cosh\ x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$



También podemos definir tangente hiperbólico, cotangente hiperbólica, secante hiperbólico y cosecante hiperbólica, es decir existen muchas analogías con las funciones trigonométricas ordinarias.

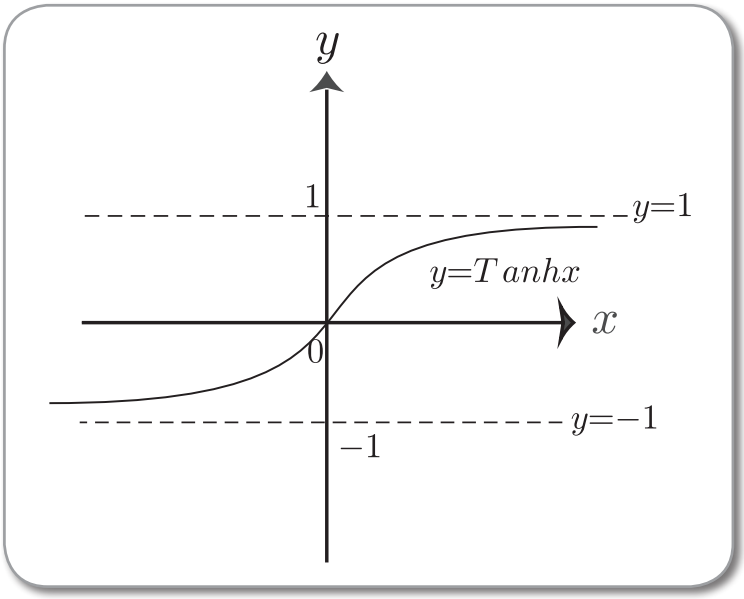
$$Sen\,h\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad Sech\,x = \frac{1}{Cosh\,x}$$

$$Cosh\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad Csch\,x = \frac{1}{Senh\,x}$$

$$Tanh\,x = \frac{Senh\,x}{Cosh\,x} \qquad Coth\,x = \frac{Cosh\,x}{Senh\,x}$$

Observe que el dominio y el recorrido de $Senhx$ son los números reales, mientras que el dominio de $Coshx$ son los números reales y el recorrido es el intervalo $[1,+\infty)$. Vale la pena anotar que la función $Tanhx$ se define así:

$$Tanh\,x = \frac{Senh\,x}{Cosh\,x} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



Identidades hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas tienen identidades análogas a las de las funciones trigonométricas ordinarias. A continuación se enumeran algunas de ellas:

$$Senh(-x) = -Senh\,x$$

$$Cosh(-x) = Cosh\,x$$

$$Cosh^2\,x - Senh^2\,x = 1$$

$$1 - Tanh^2\,x = Sech^2\,x$$

$$Senh(x+y) = Senh\,x.Cosh\,y + Cosh\,x\,.Senh\,y$$

$$Cosh(x+y) = Cosh\,x.Cosh\,y + Senh\,x\,.Senh\,y$$

Ejemplo

1. Probar que $Senh(-x) = -Senhx$

$$Senh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} =$$
$$= \frac{-(-e^{-x} + e^{x})}{2} = \frac{-(e^{x} - e^{-x})}{2} = -Senh\,x$$

Por lo tanto $Senh(-x) = -Senhx$

2. Probar que: $Cosh^2x - Senh^2x = 1$

$$Cosh^2\,x - Senh^2\,x = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + 2e^{x}.e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^{x}.e^{-x} + e^{-2x}}{4}$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Por lo tanto: $Cosh^2x - Senh^2x = 1$

Ejercicio 4.14

1. Encuentre el valor numérico de cada expresión:

   a. $sen\,h(0)$ b. $cos\,h(0)$

   c. $sen\,h(0) + cos\,h(0)$ d. $tan\,h(1)$

   e. $sen\,h(2)$ f. $sen\,h(2)$

2. Demuestre que:

   a. $cos^2\,h(x) - sen^2 h(x) = 1$

   b. $1 - tan^2 h(x) = sen^2 h(x)$

   c. $sen\,h(-x) = -sen\,h(x)$

   d. $cos\,h(-x) = cos\,h(x)$

   e. $cos\,h(x) + sen\,h(x) = e^x$

   f. $cos\,h(x) - sen\,h(x) = e^{-x}$

   g. $sen\,h(x+y) = sen\,h(x)cos\,h(y) + cos\,h(x)sen\,h(y)$

   h. $tan\,h(ln\,x) = \frac{1+tanh(x)}{1-tan\,h(x)}$

   i. $\frac{1+tanh(x)}{1-tan\,h(x)} = e^{2x}$

3. Demuestre que $sen\,h(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1})$ para $x \geq 1$

4. Demuestre que $tan\,h(x) = \frac{1}{2}(\frac{1+x}{1-x})$ para $-1 < x < 1$

5. Esta pregunta es de consulta.
   Relacione la ecuación con su gráfica numeradas I. a VI

   a. $y = sen\,h(x)$

   b. $y = cos\,h(x)$

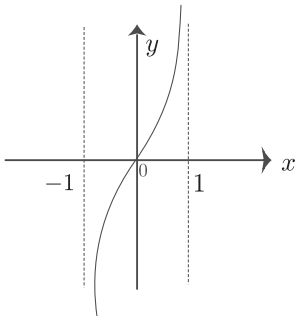
c. $y = tan\, h(x)$

d. $y = tan^{-1} h(x)$

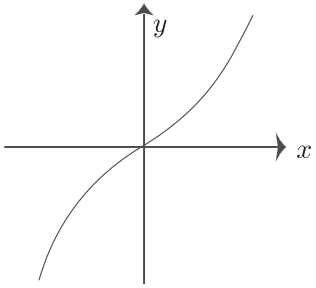
e. $y = cos^{-1} h(x)$

f . $y = sen^{-1} h(x)$

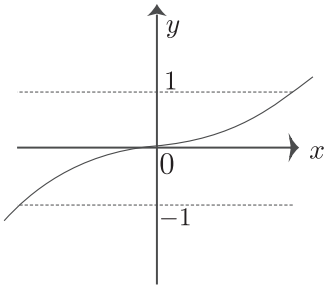
I)



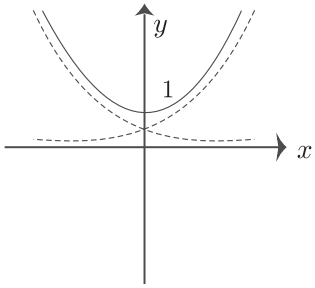
II)



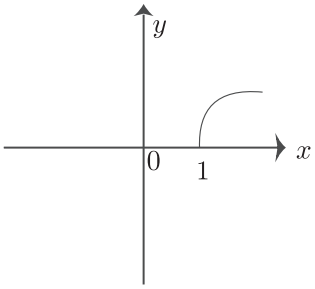
III)



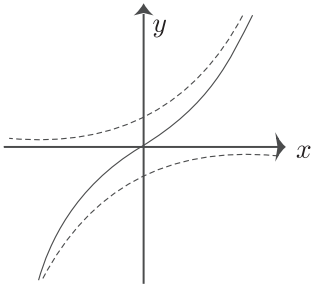
IV)



V)



VI)

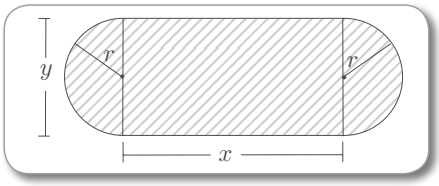


Modelos funcionales

En el planteamiento y solución de algunos problemas se requiere la construcción de modelos funcionales, donde se relacionan más de una variable y se debe expresar la solución en términos de una sola variable; estos procedimientos se utilizan en los cursos de cálculo. A continuación se presentan algunos ejemplos de modelos funcionales relacionados con geometría, ingeniería y administración.

Ejercicio 1

Un campo deportivo tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos. Si la parte recta del ancho del campo deportivo es la tercera parte de la parte larga, expresar el área del campo en función de la parte mas larga.



Solución

Sea $y = \frac{x}{3}$ que es la tercera parte de x.

El área total del campo es la suma del área del rectángulo mas el área de los dos semicírculos, es decir;

$A = x \cdot y + \pi r^2$; $\quad r = \frac{x}{6}$ como $3y = x$ entonces,

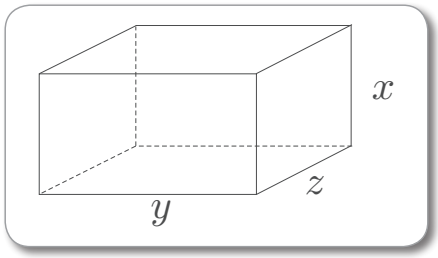
$A = x \cdot \left(\frac{x}{3}\right) + \pi \left(\frac{x}{6}\right)^2$

$A = \frac{x^2}{3} + \pi \frac{x^2}{36}$

$A = \frac{x^2}{3}\left(1 + \frac{\pi}{12}\right)$ Unidades de área (cuadradas)

Ejercicio 2

En una caja sin tapa que se muestra el la siguiente figura, expresar el volumen de la caja en función de su altura x si la altura es la mitad del largo y, y $\frac{4}{5}$ de su ancho z.



Solución

x es la altura de la caja

y es el largo de caja

z es el ancho de la caja

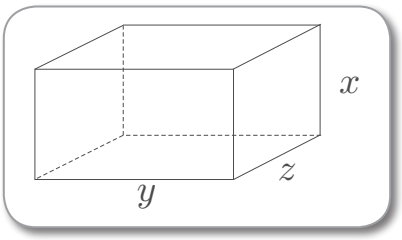
Como $x = \frac{y}{2}$ y $x = \frac{4}{5}z$ entonces, el volumen de la caja es:

$V = y.z.x$

$\mathrm{V} = (2x)(\frac{5x}{4})(x) = \frac{5}{2}x^3$ Unidades de volumen (cúbicas)

Ejercicio 3

Expresar el área superficial (Área Lateral Área de la Base) de la caja sin tapa del ejemplo anterior.



Solución

$\mathrm{A} = y.z + 2yx + 2zx$

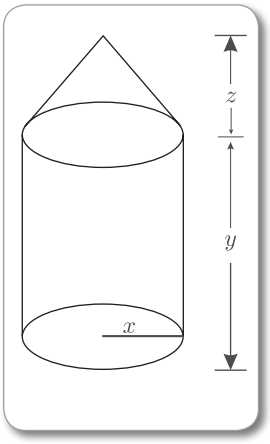
$\mathrm{A} = (2x)(\frac{5}{4}x) + 2(2x)(x) + 2(\frac{5}{4}x)x$

$\mathrm{A} = \frac{5}{2}x^2 + 4x^2 + \frac{5}{2}x^2$

$A = 9x^2$ Unidades de área (cuadradas)

Ejercicio 4

Un gorro tiene un diseño como se muestra en la siguiente figura; expresar el volumen del gorro en función de su radio x, si la altura y del cilindro es igual al radio x y x es la mitad de la altura z del cono.



Solución

El volumen del gorro es la suma del volumen del cilindro más el volumen del cono.

x es el radio del cilindro
y es la altura del cilindro, que es igual al radio del cilindro, entonces $x = y$, como $x = \frac{z}{2}$ mitad de la altura del cilindro, entonces se tiene que:

Volumen del gorro = Volumen del cilindro + Volumen del cono

$\mathrm{V} = \pi x^2 y + \frac{1}{3}\pi x^2 z$

$\mathrm{V} = \pi x^2 x + \frac{1}{3}\pi x^2 (2x)$

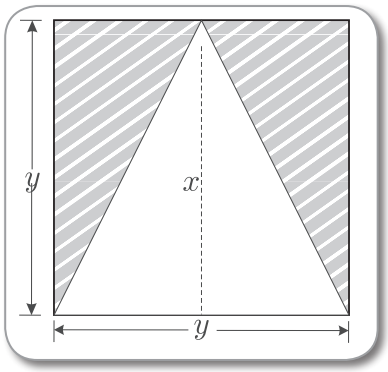
$\mathrm{V} = \pi x^3 + \frac{2}{3}\pi x^3$

$\mathrm{V} = \pi x^3 (1 + \frac{2}{3})$

$\mathrm{V} = \frac{5}{3}\pi x^3$ Unidades de volumen (cúbicas)

Ejercicio 5

Un triángulo isósceles está dentro de un cuadrado de lado y como se muestra en la figura siguiente. Encuentre una función que modele el área que está por fuera del triángulo y dentro del cuadrado, en términos de la altura x del triángulo isósceles.



Solución

El área del cuadrado es y^2 y el área del triángulo isósceles es $\frac{y.x}{2}$ luego el área sombreada se modela por medio de la función:

$\mathrm{A} = y^2 - \frac{y.x}{2}$

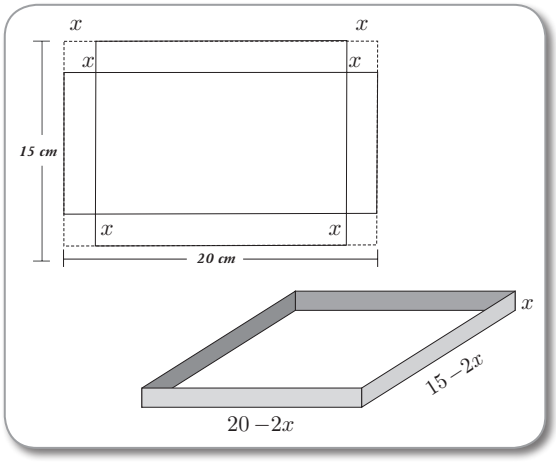
$\mathrm{A} = x^2 - \frac{x.x}{2}$ por ser $x = y$

$\mathrm{A} = x^2 - \frac{x^2}{2}$

$\mathrm{A} = \frac{x^2}{2}$ Unidades de volumen (cúbicas). Unidades de área (cuadradas)

Ejercicio 6

Una caja sin tapa debe construirse con un cartón rectangular de 15 cms de ancho por 20 cms de largo, cortando cuadrados iguales de lado x en cada esquina y después doblando los lados como se muestra en la siguiente figura. Exprese el volumen de la caja abierta en función de x



Solución

Cuando la caja se arma las dimensiones son:

El largo $20-2x$ y el ancho $15-2x$ y la altura de caja es x

$V=$ largo $\times$ ancho $\times$ alto

$V=(20-2x)(\,15-2x)(x)$

$V=(300-40x-30x+4x^2)(x)$

$V=300x-40x^2-30x^2+4x^3$

$V=4x^3-70x^2+300x$ Unidades de volumen (cúbicas)

Ejercicio 7

Una editorial produce textos escolares universitarios, la editorial pone un anuncio publicitario en una revista especializada, el costo del anuncio es de US$50, y producir cada texto cuesta US$12, y la editorial cobra US$13 por cada uno.

Sea x el número de textos producidos y vendidos.

Sea r el ingreso y sea C el costo total de cada texto:

a. Exprese el costo C en función de x

b. Exprese el ingreso r como una función de x

c. Para que valor de x es el ingreso r es igual al costo C (Punto de Equilibrio)

Solución

a. El costo fijo es de US$50, y por cada texto que se produce el costo variable es de US$12, luego el costo total C en función de x es:

$$C=12x+50 \text{ Dólares}$$

b. Como cada texto se vende en US$13, entonces el ingreso está dado por: $r=13x$

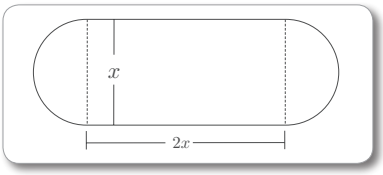
c. La editorial tendrá un punto de equilibrio cuando el ingreso r es igual al costo C, entonces tenemos:

$$13x = 12x + 50$$

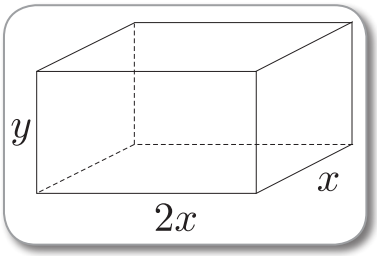
$$x = 50 \text{ Libros de texto}$$

Ejercicio 4.15

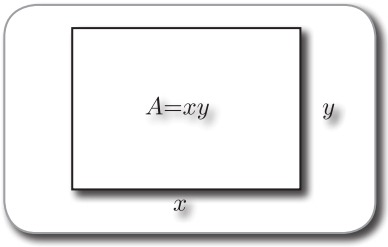
1. Un campo deportivo tiene de forma un rectángulo con dos semicírculos, si el ancho es la mitad del largo exprese el área del campo en función del largo.



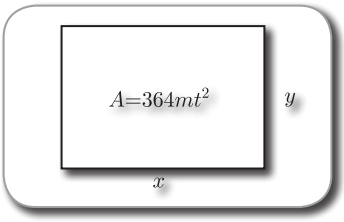
2. Una caja rectangular sin tapa tiene 20 mts^3 de volumen. La longitud de la base es el doble de su ancho. El material para la base cuesta \$20 por metro cuadrado, y para los lados \$12 por metro cuadrado. Exprese el costo de los materiales en función del ancho de la base.



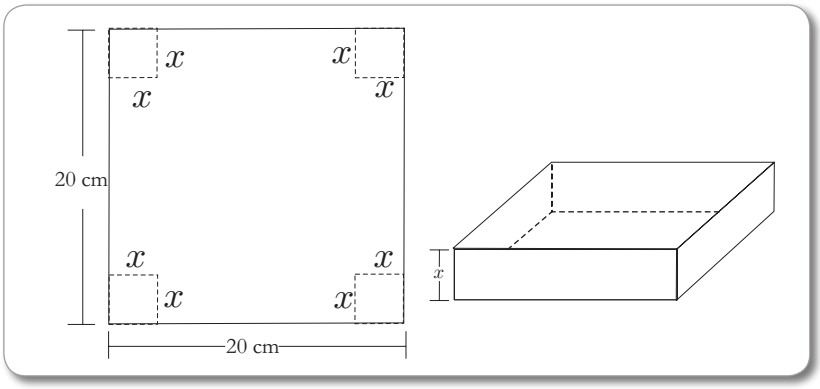
3. Un rectángulo tiene 40 metros de perímetro. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.



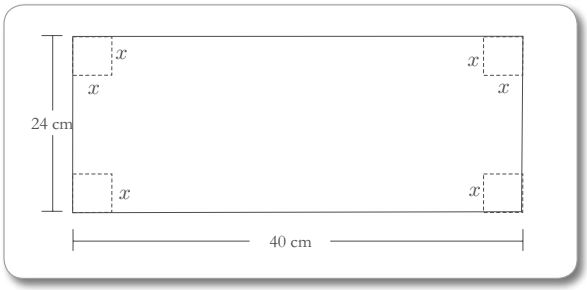
4. Un rectángulo tiene 364 mts^2 de área. Exprese su perímetro como función de la longitud de cada uno de sus lados.



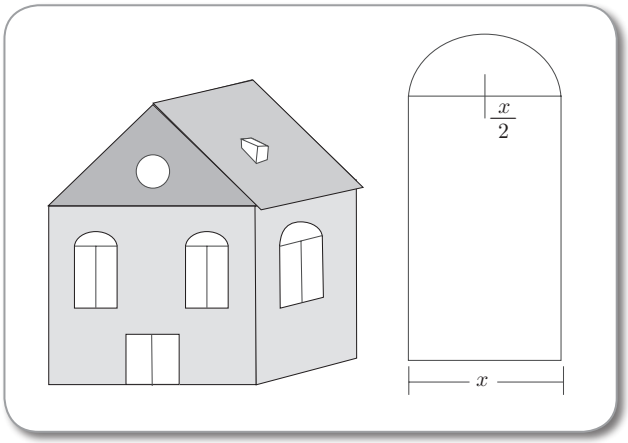
5. Se forma una caja sin tapa a partir de una pieza cuadrada de lámina de 20 cms., cortando cuadrados iguales de lado x en cada esquina, para después doblar hacia arriba los rectángulos, como se puede ver el siguiente figura. Exprese el volumen V en función de x.



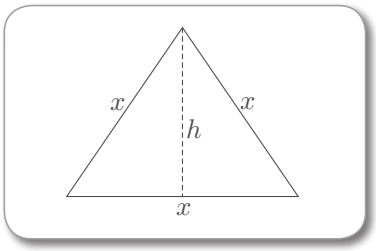
6. Haga el problema anterior si la lámina es rectangular de 40 cms., de largo por 24 cms de ancho.



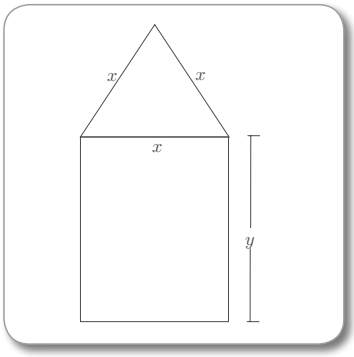
7. Observe las ventanas de la casa en la figura siguiente, tienen forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 40 pies, exprese el área de la ventana en función del ancho x.



8. Exprese el área de un triángulo equilátero en función de la longitud de uno de sus lados.

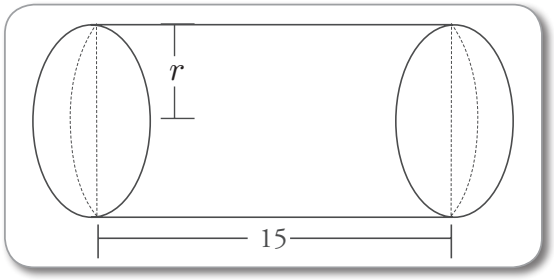


9. Observe la siguiente figura, es un rectángulo coronado por un triángulo equilátero, si el perímetro de la figura es de 60 metros, exprese el área en función del ancho x.

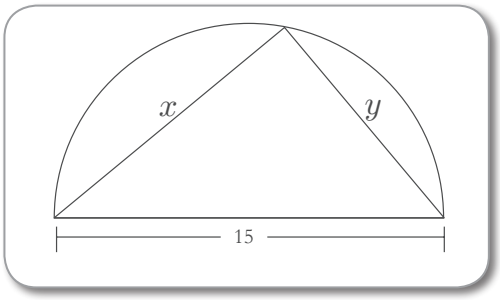


10. Dos aviones salen del aeropuerto de Bogotá al mismo tiempo, uno hacia el Este a 750 kms/h y el otro hacia el Norte a 800 kms/h. Si es t el tiempo (en horas), después de su salida, encuentre una función que exprese la distancia d de los aviones t horas después de su salida.

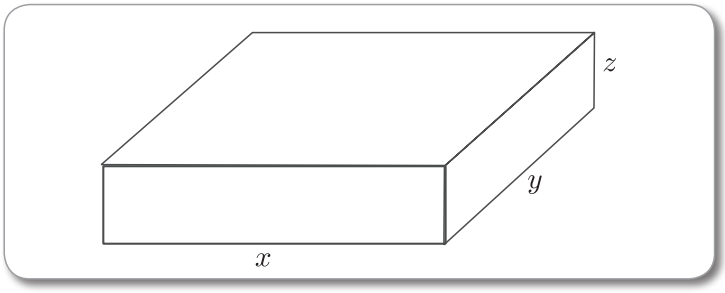
11. Hay que fabricar un tanque de acero para gas en forma de cilindro circular recto de 15 pies de altura, con una semiesfera unida en cada extremo. Aún no se sabe cuánto tiene que medir r. Exprese el volumen en (pies cúbicos) del tanque como función de r (en pies).



12. Exprese el área del triángulo ABC como función de x.

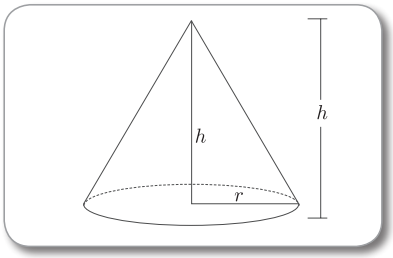


13. Exprese el volumen de una caja rectangular con tapa en función de su largo x , si su largo es el doble del ancho y el triple de su altura.

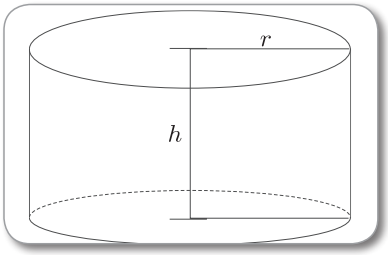


14. Exprese el área superficial de la caja del ejercicio anterior en función de su largo x.

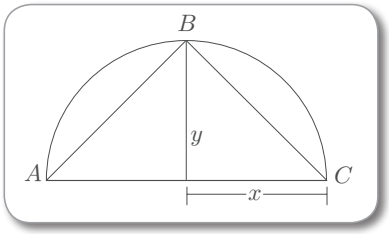
15. Exprese el volumen del cono en función de su altura h, si el radio del cono es el doble de la altura.



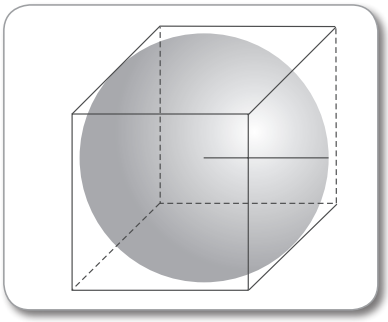
16. Exprese el área superficial A_s del cilindro circular recto en función de la altura h, si la altura es igual al radio r.



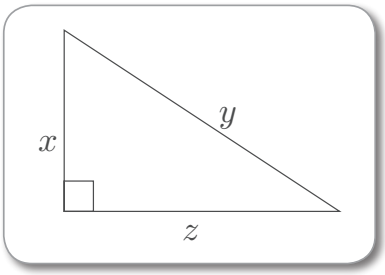
17. Un triángulo isósceles inscrito en un semicírculo de diámetro x. Encuentre una función que modele el área que está por fuera del triángulo ABC y dentro del semicírculo en términos de la altura y de triángulo isósceles.



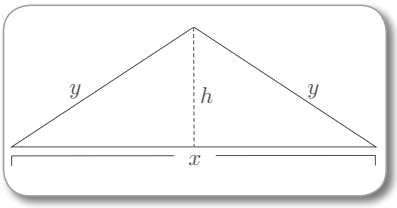
18. Una esfera de radio r está dentro de una caja cúbica, como se muestra en la figura siguiente. Si el diámetro de la esfera coincide con la medida de un lado de la caja, encuentre una función que modele el volumen de la esfera en términos del lado de la caja x.



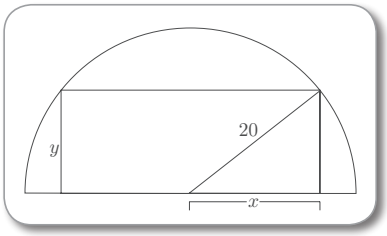
19. En un triángulo rectángulo un cateto mide el triple que el otro cateto x. Encuentre una función que modele el perímetro del rectángulo en función del cateto pequeño.



20. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 150 cms. Encuentre una función que modele el área del triángulo en términos de la longitud de su base x.



21. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 20 cms. Encuentre una función que modele el perímetro p del rectángulo en términos de su altura y.



22. El costo mensual por conducir un autobús depende de la distancia en kilómetros. La administración calcula que en el mes de noviembre gastó $760.000 por conducir 960 kms y que en diciembre gastó $ 920.000 y recorrió 1.600 kms.
    a) Exprese mediante una función el costo mensual C en función de la distancia recorrida x, suponiendo que el modelo adecuado es una función lineal.
    b) Encuentre el costo de conducir 3.000 kms al mes (utilizar parte a).
    c) Trace la gráfica de la función. ¿Qué representa la pendiente de la recta?

Resumen del capítulo 4

Logarítmos

a. $y = log_a x$ equivale a $a^y = x$

b. $log_a a^x = x$

c. $lnx = log_e x$

d. $log_a x^r = r log_a x$

e. $log_a 1 = 0$

f. $log_b u = \frac{lnu}{lnb}$

g. $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$

h. $logx = log_{10} x$

i. $log_a xy = log_a x + log_a y$

j. $a^{log_a x} = x$

k. $log_a a = 1$

Exponentes

Si todas la bases son diferentes a cero:

a. $u^m u^n = u^{m+n}$

b. $u^0 = 1$

c. $(uv)^m = u^m v^m$

d. $\left(\frac{u}{v}\right)^m = \frac{u^m}{v^m}$

e. $\frac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$

f. $u^{-n} = \frac{1}{u^n}$

g. $(u^m)^n = u^{mn}$

Rectas

Pendiente de la recta que pasa por $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para $x_2 \neq x_1$.
$P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

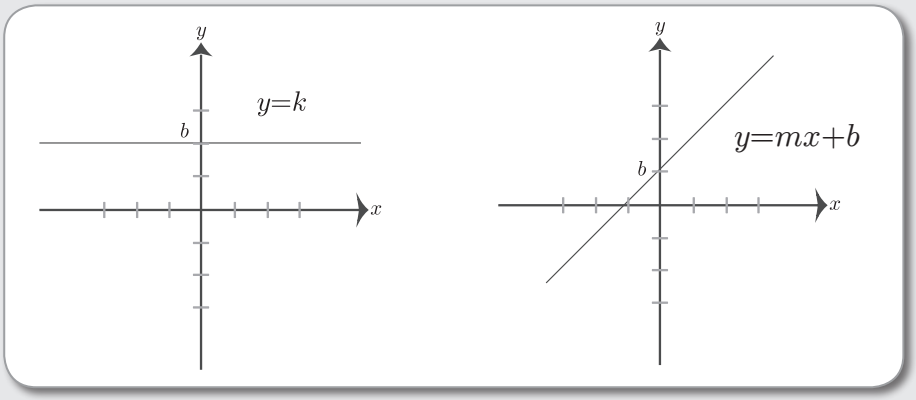
Forma de punto-pendiente de la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ cuya pendiente es m.

Forma simplificada de la ecuación de la $y = mx + b$ recta cuya pendiente es m y cuya ordenada al origen es b.

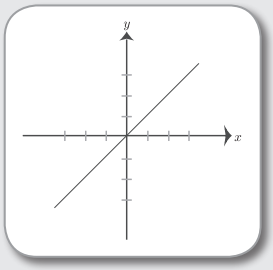
Ecuación simétrica de la recta con intersección $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
e intersección $y = b$.

Tabla de resumen del capítulo 4

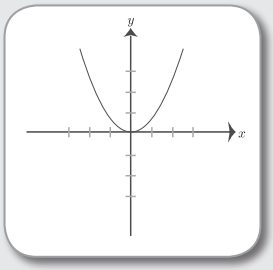
Gráfica de funciones lineales: $f(x)= mx+b$



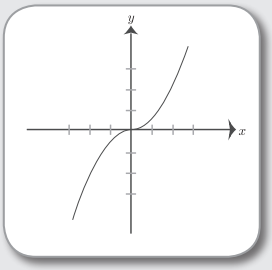
Galería de funciones básicas



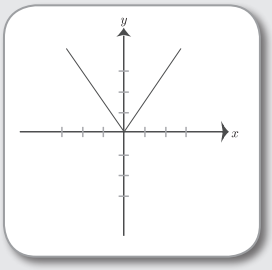
Función identidad
$f(x)= x$
Dominio $= (-\infty,\infty)$
Rango $= (-\infty,\infty)$



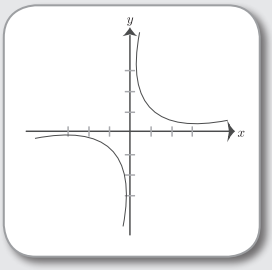
Función cuadrática
$f(x)= x^2$
Dominio $= (-\infty,\infty)$
Rango $= [0,\infty)$



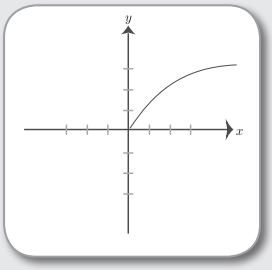
Función cúbica
$f(x)= x^3$
Dominio $= (-\infty,\infty)$
Rango $= (-\infty,\infty)$



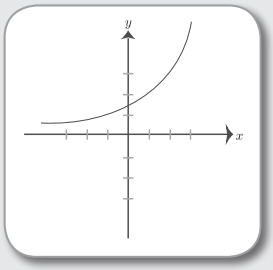
Función valor absoluto
$f(x)= |x|$
Dominio $= (-\infty,\infty)$
Recorrido $= [0,+\infty)$



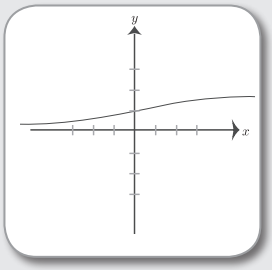
$f(x) = \frac{1}{x}$
Dominio $= (-\infty,0) \cup (0,\infty)$
Recorrido $= (-\infty,0) \cup (0,\infty)$



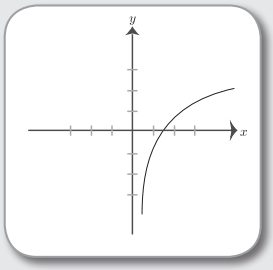
Función raíz cuadrada
$f(x)=\sqrt{x}$
Dominio $= [0,+\infty)$
Recorrido $= [0,+\infty)$



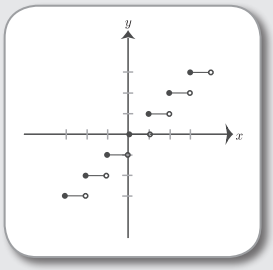
Función exponencial
$f(x)= e^x$
Dominio $= (-\infty,\infty)$
Recorrido $= (0,+\infty)$



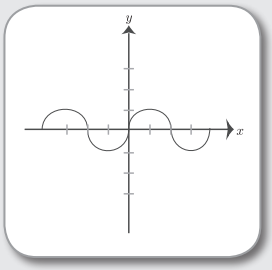
Función logística
$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$
Dominio $= (-\infty,\infty)$
Recorrido $= (0,1)$



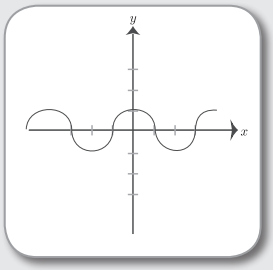
Función logaritmo natural
$f(x)= lnx$
Dominio $= (0,\infty)$
Recorrido $= (-\infty,\infty)$



Función máximo entero
$f(x)= [x]$
Dominio $= (-\infty,\infty)$
Recorrido = todos los enteros

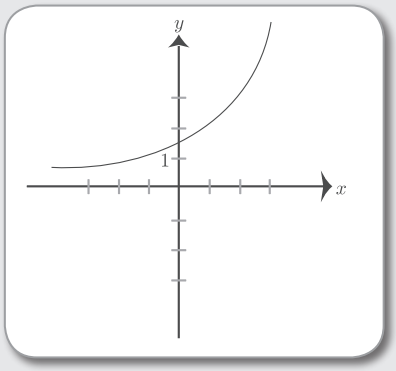


Función seno
$f(x)= sen\ (x)$
Dominio $= (-\infty,\infty)$
Recorrido $= [-1,1]$

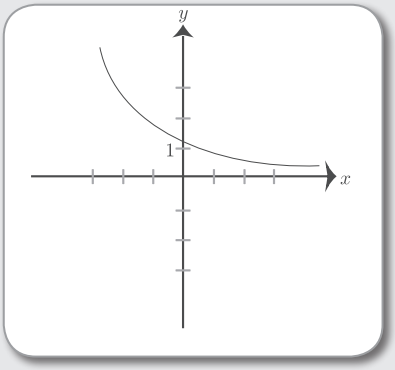


Función coseno
$f(x)= cos\ (x)$
Dominio $= (-\infty,\infty)$
Recorrido $= [-1,1]$

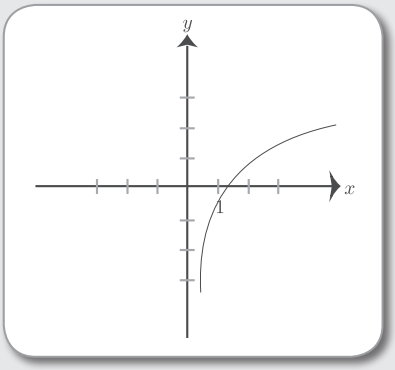
Funciones exponenciales y logarítmicas



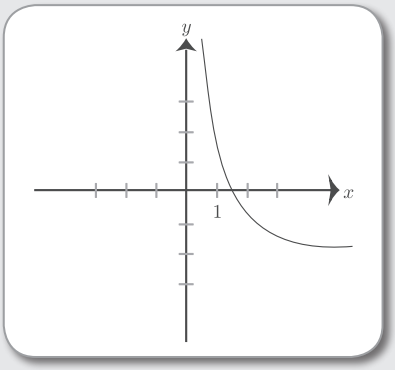
$y = a^x$
$a>1$



$y = a^x$
$0<a<1$



$y = log_a x$
$a>1$



$y = log_a x$
$0<a<1$

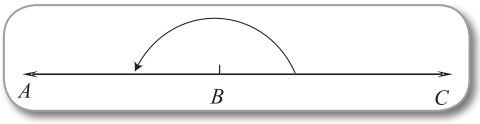
5 Trigonometría plana

Objetivos

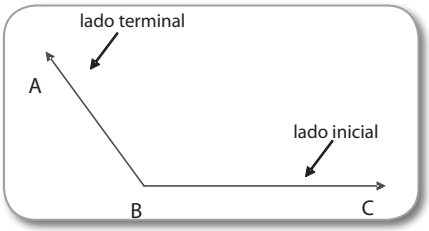
- Identificar los sistemas de medición de grados y radianes con sus respectivas conversiones.
- Deducir los valores de los ángulos notables del círculo trigonométrico de radio uno, por medio de triángulos y las razones trigonométricas.
- Resolver problemas, aplicativos que conducen a la construcción de triángulos rectángulos y no rectángulos.
- Identificar y probar las identidades trigonométricas: pitagóricas e identidades con operaciones en sus ángulos.
- Identificar los elementos básicos con sus gráficas de las funciones trigonométricas de: seno, coseno, tangente y sus respectivas funciones inversas.
- Analizar en las gráficas de las funciones trigonométricas las transformaciones de amplitud, período y desplazamiento fase.
- Resolver ecuaciones trigonométricas inversas por medio de las funciones trigonométricas inversas.

Ángulos y longitud de arco

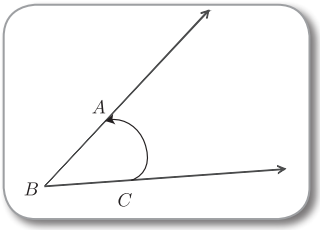
Ángulo plano: ABC está formado por dos semirrectas AB y BC. El punto B es el vértice del ángulo, (punto común).



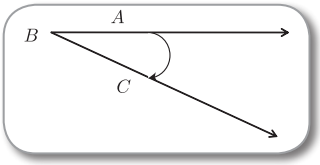
Un ángulo plano se genera mediante un giro (en un plano), de una semirrecta desde una posición inicial BC hasta una posición terminal BA, de esta manera el punto B sigue siendo un vértice, AB **lado terminal**, y BC el **lado inicial**.



Ángulo positivo: un ángulo generado es positivo si el sentido del giro (indicado por una flecha curvilínea) es contrario a las manecillas de un reloj.



Ángulo negativo: un ángulo generado es ne gativo, si el sentido del giro esta en sentido de las manecillas del reloj.



Medida de un ángulo: el tamaño de un ángulo depende de que tanto se abre o rote uno de sus lados alrededor del vértice, hasta que coincida con el lado inicial. La unidad de medida para medir un ángulo, se denomina "grado" y la medida de un ángulo es el número de grados que tiene.

Se define un grado (°) como la medida del ángulo central subtendido por un arco igual a $\frac{1}{360}$ de la circunferencia:

Un minuto (') es $\frac{1}{60}$60 de grado

Un segundo (") es $\frac{1}{60}$60 un minuto

Luego 1^{o} 60' y 1' = 60"

Ejemplos

a) $\frac{1}{4}\ (36° 24') = 9° 6'$

b) $\frac{1}{2}\,(127° 24') = \frac{1}{2}\,(126° 84') = 63° 42'$

c) $\frac{1}{4}\,(74° 29' 20'')$

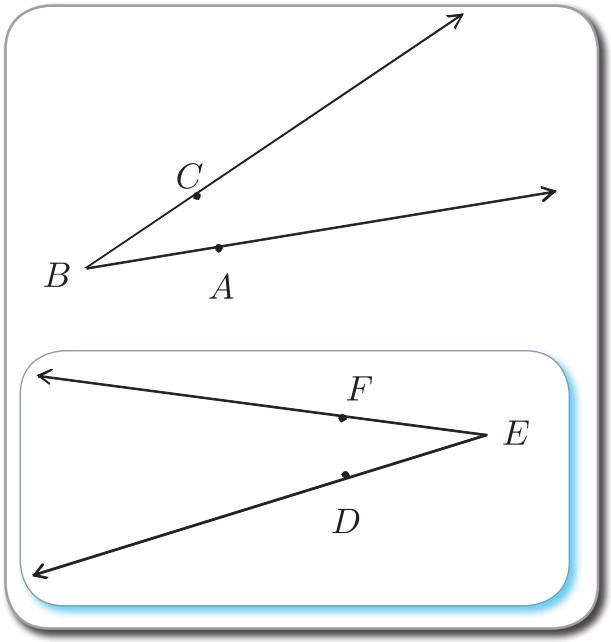
$= \frac{1}{4}\,(\,(74° 29' 20'')$

$= \frac{1}{4}\,(72° 149' 20'')$

$= \frac{1}{4}\,(72° 148' 80'') = 18° 37' 20''$

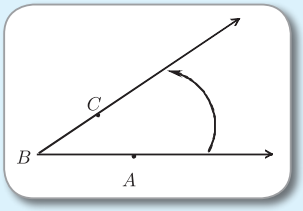
Observe el transportador en la figura, muestra que el ángulo ∠A mide 90°.

Hay una manera especial de describir dos ángulos de la misma medida se dice que ∠ABC es congruente con ∠DEF si tienen la misma medida y se denota: ∠ABC≅∠DEF.

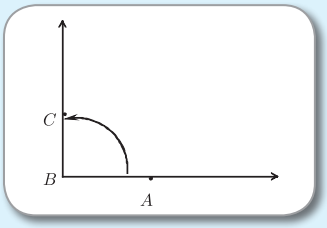


Tipos de ángulos

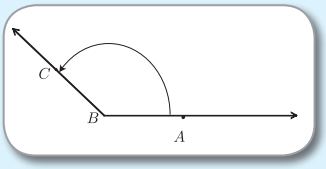
Ángulo agudo: es un ángulo que mide menos de 90°.



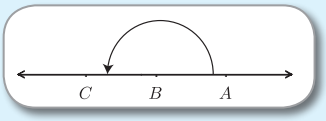
Ángulo recto: es un ángulo que mide 90°.



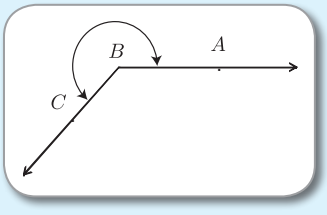
Ángulo obtuso: es un ángulo que mide más de 90°.



Ángulo llano: es un ángulo que mide 180°.

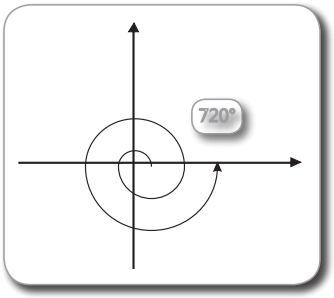


Ángulo reflejo: es un ángulo que mide más de 180° y menos de 360°, es decir: 180°∠ C° ∠360°.



Ejemplos

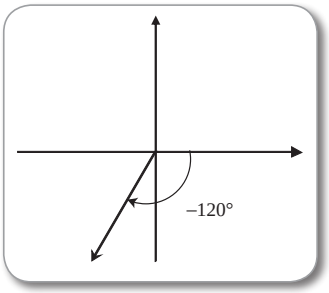
1. Dibuje el ángulo de 720°



Solución

Este ángulo equivale a dos rotaciones en sentido contrario a las manecillas del reloj (**sentido levógiro**).

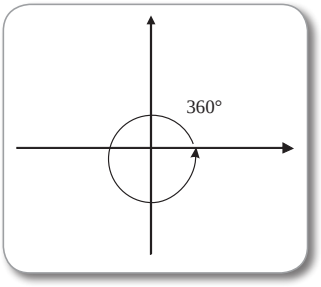
2. Dibuje el ángulo de $-120°$



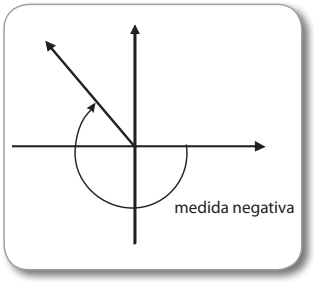
Solución

Como $120^{o} = \frac{1}{3}(360^{o})$. Este ángulo corresponde a un tercio de una rotación en sentido al de las manecillas del reloj como se muestra en la figura (**sentido dextrógiro**).

3. Supongamos que vamos a medir un ángulo de 360°, esto significa que hay una rotación completa en sentido contrario a las manecillas del reloj como se muestra en la siguiente figura.

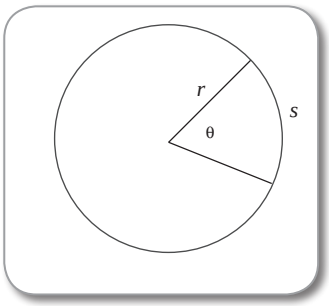


4. Si las rotaciones son en sentido al de las manecillas del reloj, la medida será negativa.



Medición en radianes

Se define un radian (rad)., como la medida de un ángulo cuya longitud del arco es igual a la del radio de la circunferencia.

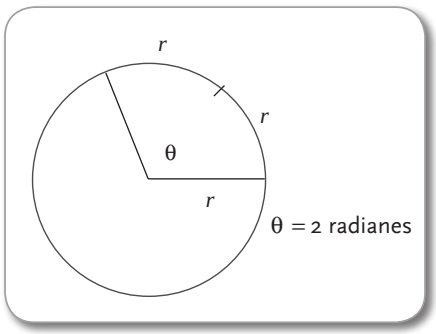


Longitud de arco

En una circunferencia de radio r, un ángulo central θ de radianes determina un arco de longitud:

$$S=r\theta$$

Es decir longitud de arco es igual a radio $\times$ ángulo central en radianes.



Ejemplo

¿Cuál es la longitud de arco determinada por un ángulo central $\frac{\pi}{6}$ radianes, en una circunferencia de 20 cms. de radio?

Solución

$$S = r.\theta = 20\ (\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{20\pi}{6} = 10.47 \text{ cms.}$$

De acuerdo con la definición de longitud de arco anteriormente mencionada, podemos también definir el ángulo θ en radianes como:

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{Longitud\ de\ arco}{radio\ del\ circulo}$$

La pregunta pertinente que nos sugerimos es:

¿A qué es igual el ángulo de 360 en radianes?

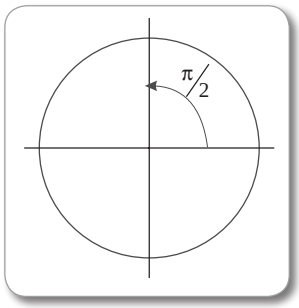
Una rotación completa subtiende un arco igual en longitud a la circunferencia del círculo $2\pi r$, por lo tanto utilizando la definición de radian obtendríamos:

Una rotación = $\frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianes.

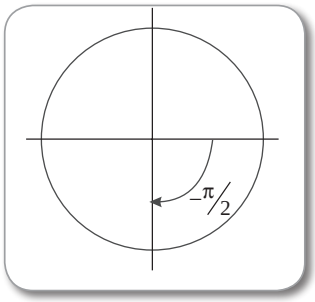
Muy sencillo si 360° equivalen a 2π radianes y 180° es la mitad del ángulo de 360°, entonces π equivalen a 180° radianes.

Ejemplo

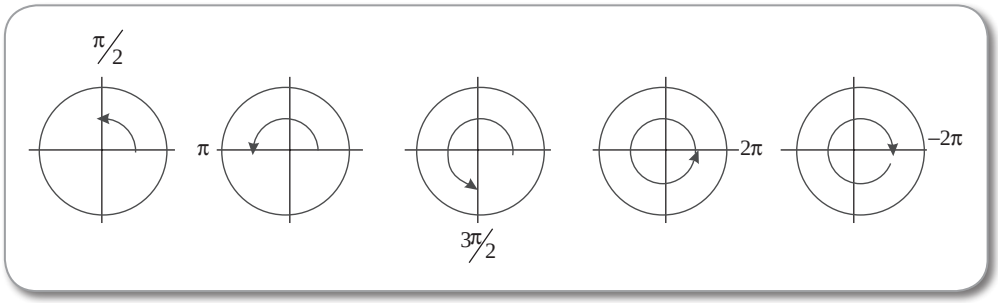
1. El ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes que se muestran en la figura, se obtiene por la rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj.



2. $-\frac{\pi}{2}$ es obtenido de un cuarto de la rotación completa en el sentido de la manecillas del reloj.



3. Vamos a mostrar algunos ángulos especiales, en radianes:



Relación entre grados sexagesimales y radianes

Siempre es posible convertir la medida de un ángulo a grados y viceversa, sabemos que 360° equivalen a 2π radianes, 180º grados equivalen a π (la mitad).

Ejemplos

1. Convertir 60º en radianes.

Solución

Solo basta con plantear una regla de tres simple:

Grados		Radianes
180º	equivale	π
60º	equivale	x

Despejamos la variable x, obteniéndo: $x = \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$

Luego 60º equivalen en radianes a $\frac{\pi}{3}$, si observamos el razonamiento anterior, equivale a dividir π en tres partes iguales.

2. Convierta 300º a radianes.

Solución

Grados		Radianes
180º	equivale	π
300º	equivale	x

Despejando x obtenemos $x = \frac{300^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{3}$

3. Convierta $3\pi/4$ a grados.

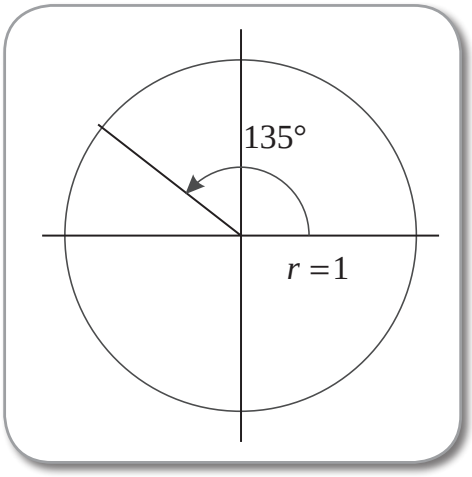
Solución

Es similar al planteado anteriormente:

Grados		**Radianes**
180°	equivale	π
x	equivale	$\frac{3\pi}{4}$

Ahora despejando x, obtenemos: $x = \frac{\frac{3\pi}{4} \cdot 180^o}{\pi} = 135^o$

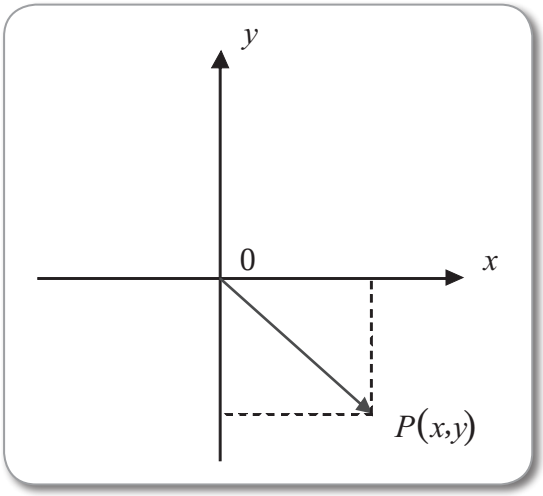
El siguiente diagrama muestra un círculo unitario marcado en radianes, así como en grados.



Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Coordenadas rectangulares

Consiste en dos ejes o rectas numéricas, una vertical y otra horizontal cuya intersección se llama **origen**, usualmente se acostumbra escoger el sentido positivo de cada eje, tal como se muestra en la figura:

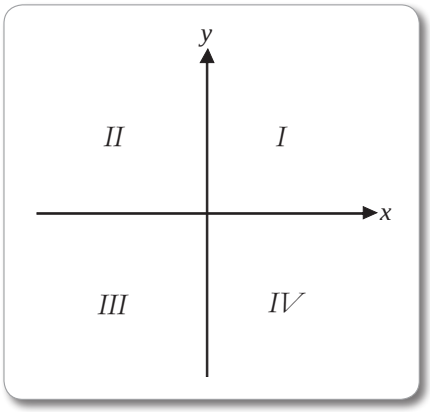


Esto es, positivo hacia la derecha del eje x, y positivo hacia arriba del eje horizontal y.

La ubicación de un punto p cualquiera en un plano rectangular queda determinada por las distancias de los ejes, llamadas coordenadas, a la coordenada x o abscisa de un punto P.

El punto p de la abscisa x, y la ordenada y, se denota por P (x,y).

Los ejes dividen al plano en cuatro partes, llamadas *cuadrantes*, que se numeran I, II, III y IV. En la figura siguiente se muestran los cuadrantes numerados y los signos correspondientes a las coordenadas de un punto en cada uno los cuadrantes.



La distancia no dirigida d de un punto P(x,y) al **origen**, llamada **distancia** de P, está dada por: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Así a cada punto del plano están asociados tres número: x, y y d.

Ejemplo

Localizar los siguientes puntos en un sistema de coordenadas rectanculares y encontrar el valor de d, correspondiente a cada uno de ellos:

$A\,(1, 2)$ $\quad B(-3, 4)$ $\quad C = (-3, -3\sqrt{3})$ $\quad D\,(4, -5)$

Solución

Para A: $d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

Para B: $d = \sqrt{9 + 16} = 5$

Para C: $d = \sqrt{9 + 27} = 6$

Para D: $d = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

Ángulos en posición normal

Un ángulo está en posición *normal*, respecto a un sistema de coordenadas cartesianas, cuando su vértice coincide con el *origen* y su lado inicial con el semieje positivo de las x.

Un ángulo pertenece al **primer cuadrante** cuando, colocado en posición normal, su lado terminal cae en dicho cuadrante. Definiciones semejantes se aplican a los otros cuadrantes.

Por ejemplo, los ángulos 30º, 60º y -330º son ángulos del primer cuadrante, 120º es un ángulo del segundo cuadrante; -120º es un ángulo del tercer cuadrante; -10º y 710º son ángulos del cuarto cuadrante.

Son **ángulos coterminales** los que, puestos en posición normal, tienen lados terminales coincidentes. Por ejemplo, 30º y -330º, -10º y 710º son pares de ángulos coterminales con él.

Los ángulos de 0º, 90º, 180º y 270º y todos sus ángulos *coterminales*, reciben el nombre de ángulos *cuadrangulares*.

Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Sea $p(x, y)$ un punto cualquiera diferente del origen y θ el ángulo *puesto en posición normal*, definimos seis funciones trigonométricas θ, que se definen, en términos de abscisa, ordenada y la distancia p.

$$\text{Seno } \theta = \operatorname{sen}\theta = \frac{ordenada}{distancia} = \frac{y}{d}$$

$$\text{Coseno } \theta = \cos\theta = \frac{abscisa}{distancia} = \frac{x}{d}$$

$$\text{Tangente } \theta = \tan\theta = \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{y}{x}$$

$$\text{Cotangente } \theta = \cot\theta = \frac{abscisa}{ordenada} = \frac{x}{y}$$

$$\text{Secante } \theta = \sec\theta = \frac{distancia}{ordenada} = \frac{d}{x}$$

$$\text{Cosecante } \theta = \csc\theta = \frac{distancia}{ordenada} = \frac{d}{y}$$

Signos algebraicos de las funciones

Como d es positivo, los signos de las funciones trigonométricas, en los distintos cuadrantes dependen de los signos de x y y, como se muestra en el siguiente cuadro.

Cuadrantes

	I	II	III	IV
Seno	+	+	−	−
Coseno	+	−	−	+
Tangente	+	−	+	−
Secante	+	−	−	+
Cosecante	+	+	−	−
Cotangente	+	−	+	−

Las funciones de un ángulo dado están definidas unívocamente. Sin embargo, cuando se conoce el valor de la función de un ángulo, el ángulo no queda definido unívocamente.

Por ejemplo, si $sen\,\theta = \frac{1}{2}$ entonces, $\theta = 30º, 150º, 390º, 510º, \ldots$

En general existen dos posiciones posibles del *lado terminal*, por ejemplo, los lados terminales de 30º y 150º del ejemplo anterior. Las excepciones a esta regla ocurren cuando el ángulo de *cuadrangular*.

Ejemplo

Determinar los valores de las funciones trigonométricas del ángulo θ (el menor de los ángulos positivos en posición normal), si p es el punto del lado terminal de θ y las coordenadas de p son:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

Por lo tanto, las seis funciones trigonométricas:

$$Sen\,\theta = 4/5\,; \qquad Cos\theta = -3/5; \qquad Tan\,\theta = -4/3$$

$$Cot\,\theta = -3/4 \qquad Sec\theta = -5/3; \qquad Cosc\,\theta = 5/4$$

Ejemplo

Encontrar los valores de: $Sen\theta$ y $Cos\theta$, dada $Tan\theta = -3/4$.

Solución

Puesto que $Tan\,\theta = \frac{y}{x}$ es negativa, el ángulo θ está en el segundo cuadrante.

a) Si $x=-4$ e $y = 3$, entonces la distancia d es:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

Por lo tanto $Sen\theta=3/5$ y $Cos\theta = -4/5$

b) Si $x=4$ e $y = -3$, el ángulo θ aparece en el cuarto cuadrante y la distancia d también es $d=5$.

Por lo tanto, $Sen\theta=-3/5$ y $Cos\theta= 4/5$

Funciones trigonométricas de los ángulos cuadrangulares

El *lado terminal* de un ángulo cuadrangular coincide con uno de los ejes. Un punto P (distinto del origen) del *lado terminal* tiene por coordenadas $x = 0$, $y \neq 0$, ó $x\neq0$, $y=0$. En ambos casos sucede que dos de las seis funciones no están definidas.

Por ejemplo, el *lado terminal* del ángulo 0º coincide con el semieje positivo de las x y la ordenada de P es 0. Como el denominador de las relaciones que definen la cotangente y la cosecante es la ordenada, estas funciones no están definidas. Para indicar estas conclusiones algunos autores utilizan la notación Cot 0º$=\infty$ y otros utilizan, Cot 0º$= \pm \infty$

Ángulo θ	$Sen\theta$	$Cos\theta$	$Tan\theta$	$Cot\theta$	$Sec\theta$	$Csc\theta$
0°	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
90°	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
180°	0	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$
270°	-1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1

Triángulos y funciones trigonométricas de 30°, 45° y 90°

Dentro de la gama de ángulos de funciones, existen unas muy importantes llamadas **funciones trigonométricas**. La palabra trigonometría significa **medida del triángulo**, los griegos inventaron la trigonometría hace más de 2000 años y los hindúes consideraron la trigonometría básicamente para el empleo de la astronomía.

Históricamente, las funciones trigonométricas se originaron como relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo.

El triángulo rectángulo es aquel en que uno de sus ángulos es recto, como se muestra en la figura 1 siguiente:

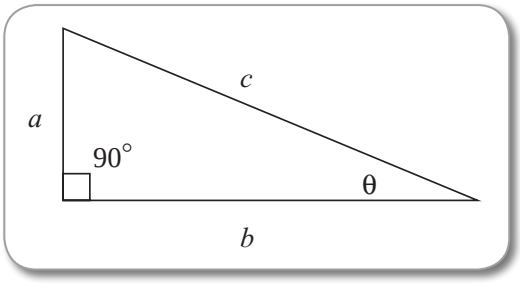


Figura 1

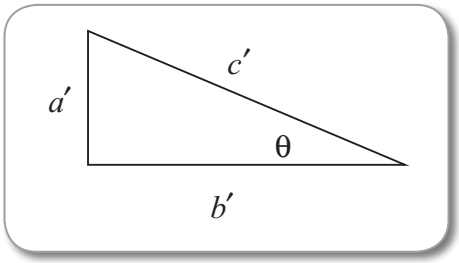
En un triángulo rectángulo, el lado opuesto del ángulo recto se llama **hipotenusa**, en el triángulo que se muestra, la hipotenusa tiene una longitud c, el lado opuesto al ángulo θ tiene longitud a, y el lado adyacente a θ tiene longitud b.

La razón $\frac{a}{b}$ depende del ángulo θ, y a esta razón se le llama función tangente. Hay seis funciones que nacen de obtener seis razones entre las longitudes de los lados a, b y c del triángulo:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{b}{a}$$

Estas seis soluciones dependen solo del ángulo θ y no del tamaño del triángulo.

Por ejemplo, consideremos un triángulo de menor tamaño que el anterior.



Como los dos triángulos tienen ángulos iguales, los triángulos son semejantes por lo tanto podemos establecer las razones correspondientes $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$, $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$, $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$, $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$ y $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$ de esta manera podemos determinar las seis relaciones en forma única; ahora la pregunta que surge es: ¿cómo se llaman estas seis razones?

Es muy sencillo, se llaman **funciones trigonométricas**, y sus nombres específicos son: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, y sus símbolos son: Sen, Cos, Tan, Cot , Sec, $Cosc$.

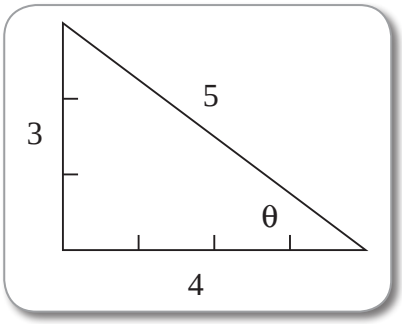
Con base al triángulo rectángulo y a las seis razones, anteriormente mencionadas, definimos las seis funciones trigonométricas:

Si θ es el ángulo agudo del triángulo rectángulo entonces por definición,

$Sen\,\theta = \frac{a}{c} = \frac{op}{hip}$	Función Seno
$Cos\,\theta = \frac{b}{c} = \frac{ady}{hip}$	Función Coseno
$Tan\,\theta = \frac{a}{b} = \frac{op}{ady}$	Función Tangente
$Cot\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{ady}{op}$	Función Cotangente
$Sec\,\theta = \frac{c}{b} = \frac{hip}{ady}$	Función Secante
$Cosc\,\theta = \frac{c}{a} = \frac{hip}{op}$	Función Cosecante

Ejemplo

En el siguiente triángulo, encuentre el valor de: $Sen\ \theta$, $Cos\ \theta$, $Tan\ \theta$, $Cot\ \theta$, $Sec\ \theta$, y $Cosc\ \theta$.



Solución

$Sen\ \theta = 3/5$	$Cosc\ \theta = 5/3$
$Cos\ \theta = 4/5$	$Sec\ \theta = 5/4$
$Tan\ \theta = 3/4$	$Cot\ \theta = 4/3$

Ejemplo

Si θ es el ángulo agudo, y $Cos\theta{=}4/5$, calcular los valores de las seis funciones trigonométricas de θ.

Solución

El triángulo rectángulo que representa el ejercicio, es, donde θ es el ángulo agudo, el lado adyacente es igual a 4, y la hipotenusa es igual a 5, utilizando el teorema de Pitágoras calculamos el valor de OP.

$$\begin{aligned}(OP)^2 + 4^2 &= 5^2\\ (OP)^2 &= 5^2 - 4^2\\ (OP)^2 &= 9\\ OP &= \sqrt{9} = 3\end{aligned}$$

Aplicando la definición de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo obtenemos:

$Sen\ \theta = 3/5$	$Cosc\ \theta = 5/3$
$Cos\ \theta = 4/5$	$Sec\ \theta = 5/4$
$Tan\ \theta = 3/4$	$Cot\ \theta = 4/3$

Identidades recíprocas

Vamos a definir otras identidades que son útiles e importantes para calcular valores de las funciones trigonométricas:

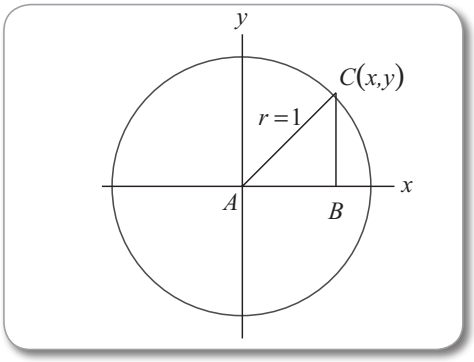
$$Sen\ \theta = \frac{1}{Cosc\,\theta} \qquad Cos\theta = \frac{1}{Sec\,\theta} \qquad Tan\ \theta = \frac{1}{Cot\,\theta}$$

$$Csc\,\theta = \frac{1}{Sen\,\theta} \qquad Sec\theta = \frac{1}{Cos\,\theta} \qquad Cot\,\theta = \frac{1}{Tan\,\theta}$$

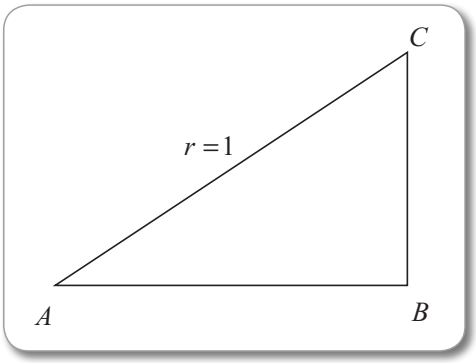
Cálculo de los valores trigonométricos de ángulos de 45º, 30º y 60º

En primer lugar consideremos un **Círculo unitario**.

Es decir con lado igual a 1, cualquier punto sobre la circunferencia es la coordenada



(x,y). Ahora observemos el triángulo △ABC



Aplicando la definición de las funciones trigonométricas $Cos\ \theta = x$ y $Sen\ \theta = y$ lo cual quiere decir que cualquier coordenada sobre el círculo unitario se puede escribir como:

$$(x,y)=(Cos\theta,Sen\theta)$$

Además aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$x^2+y^2=1$$

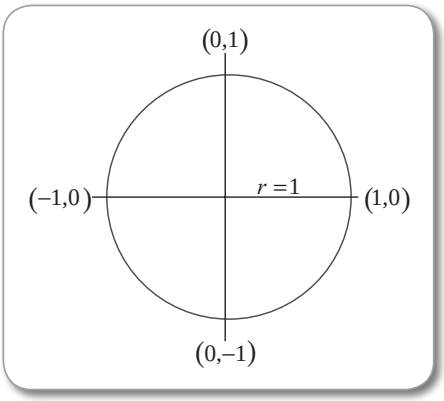
ó

$$Cos^2\theta+Sen^2\theta=1$$

Todo lo anterior es para afirmar que la primer componente de (x,y) es casualmente el coseno del ángulo θ y la segunda componente es el seno del ángulo θ, cuando el círculo es de radio uno.

Ejemplo

Dibujemos el círculo con radio uno y observemos las coordenadas en 0º, 90º, 180º, 270º para indagar cuáles son los valores trigonométricas del $Sen\theta$ y del $Cos\theta$.



En cero grados las coordenadas son $(1,0)=(Cos(0),\ Sen\ (0))$.

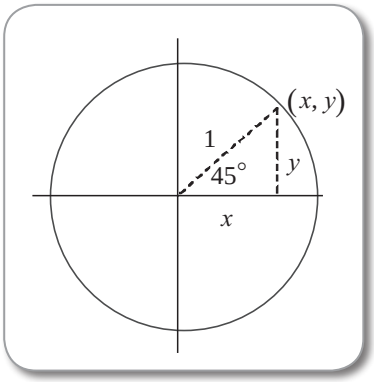
Esto quiere decir que $Cos(0)=1$ y $Sen\ (0)=0$, similar con las otras coordenadas.

$(0,1) =(Cos\ (90º),\ Sen\ (90º))$, entonces, $Cos90º = 0$, y $Sen90º = 1$

$(-1,0) = (Cos(180º),\ Sen(180º))$, entonces, $Cos180º = -1$ y $Sen\ 180º = 0$

$(0,-1) =(Cos(270º),\ Sen\ (270º))$, entonces, $Cos(270º) = 0$, y $Sen\ (270º) = -1$

Ahora nos preguntamos?



¿Cómo saber el valor de las coordenadas?.
$(x,y) = (Cos45°,\ Sen45°)$.
Es muy sencillo, con un círculo de radio igual a 1 ubicamos el ángulo de $45°$ equivalente a $\pi/4$.

La construcción auxiliar que se observa, es un cuadrado con radio 1, donde la coordenada x es igual a la coordenada y, ($x = y$).

Utilizando el teorema de Pitágoras obtenemos:

$$x^2+y^2=1 \qquad \text{Teorema de Pitágoras}$$
$$2x^2=1 \qquad \text{Como } x=y$$
$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{Despejando}$$
$$x = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{Racionalizando}$$

Como $x=y$, entonces $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ahora podemos concluir que:

$(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\text{Cos}\,45^{\text{o}}, \text{Sen}\,45^{o})$

Por lo tanto $Cos\ 45^{\text{o}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $Sen\ 45^{\text{o}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ángulo de 30º

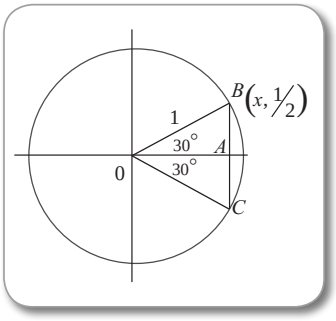
Nuestro interés es saber cuánto valen las coordenadas (x,y) cuando el ángulo θ=30º en un círculo de radio uno

Vamos a hacer una construcción auxiliar, formando un triángulo, equilátero de lado uno

La pregunta que nos podemos formular es cuanto vale la coordenada y.

Note, que la distancia BA es causalmente la mitad de la distancia BC y como BC es igual a 1, entonces $BA = \frac{1}{2}$, luego la coordenada y es igual a $\frac{1}{2}$ $(y = \frac{1}{2})$, ahora para calcular la coordenada x solo basta con utilizar el teorema de Pitágoras,

$$x^2 + (1/2)^2 = 1$$
$$x^2 = 1 - 1/4$$
$$x^2 = 3/4$$
$$x = \pm\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$
$$x = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$



Por lo tanto la coordenada x y y es: $(x,\ y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = (Cos\ 30^o, Sen\ 30^o)$

$$Cos\ 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Sen\ 30^o = 1/2$$

Ángulo de 60º

Similarmente tomamos un círculo de radio uno, con una construcción auxiliar de un triángulo equilátero con un ángulo θ=60º.

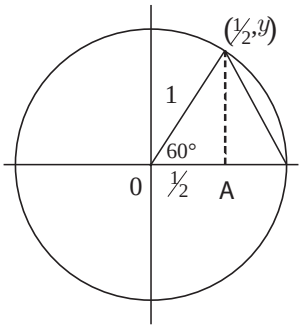
Como se muestra la figura el valor de la coordenada x es OA=1/2, solo nos resta saber cuánto vale y:

$x^2+y^2=1$

Sustituyendo: $(\frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y^2 = 1 - 1/4$$



Simplificando; $y^2 = \frac{3}{4}$

$$y = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como y está en el primer cuadrante de la circunferencia el valor de la misma es positivo y es $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ es decir: $(x,y) = (Cos\ 60^o, Sen\ 60^o) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Identidades fundamentales

En primer lugar se hará una lista de algunas identidades trigonométricas fundamentales con su respectivas demostraciones y luego con las mismas deducir el valor de *Sec*, *Cosc*, *Tang* y *Cot* de 30°, 60° y 45°.

1. Las identidades recíprocas.

$$Cosc\,\theta = \frac{1}{Sen\,\theta} \qquad Sec\,\theta = \frac{1}{Cos\,\theta} \qquad Cot\,\theta = \frac{1}{Tan\,\theta}$$

2. Las identidades de tangente y cotangente.

$$Tan\,\theta = \frac{Sen\,\theta}{Cos\,\theta} \qquad Cot\,\theta = \frac{Cos\,\theta}{Sen\,\theta}$$

Para demostrar la identidad de la tangente, considere el triángulo rectángulo que se muestra en la figura 1; se aplican las definiciones de las funciones trigonométricas como sigue:

$$Tan\,\theta = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{Sen\,\theta}{Cos\,\theta}$$

Además para probar la identidad

$$Cot\,\theta = \frac{1}{Tan\,\theta} = \frac{1}{Sen\,\theta/Cos\theta} = \frac{Cos\,\theta}{Sen\,\theta}$$

Ya estamos preparados para deducir los valores de las otras funciones trigonométricas $Cosc$, Sec, Tan y Cot de 30°, 45° y 60°.

Ángulo 60°. Aplicando las identidades obtenemos:

a) $Cosc\,60^o = \frac{1}{Sen\,60^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $Sec\,60^o = \frac{1}{Cos\,60^o} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

c) $Cot\,60^o = \frac{Cos\,60^o}{Sen\,60^o} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $Tan\,60^o = \frac{Sen\,60^o}{Cos\,60^o} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Ángulo de 45°

a) $Cosc\,45^o = \frac{1}{sen\,45^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = Sec\,45^o$

b) $Tan\,45^o = \frac{Sen\,45^o}{Cos\,45^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

c) $Cotg\ 45^\circ = \frac{Cos\ 45^\circ}{\text{Sen } 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

Ángulo de 30º

De manera similar los cálculos son :

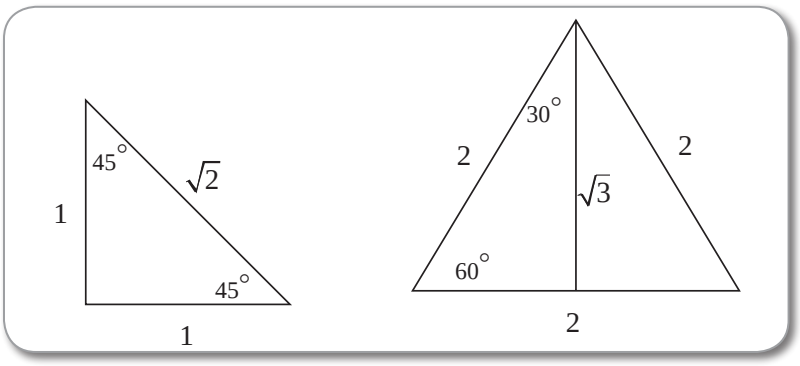
$$Cosc\ 30^\circ = 2,$$

$$Sec\ 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$Cotg\ 30^\circ = \sqrt{3}$$

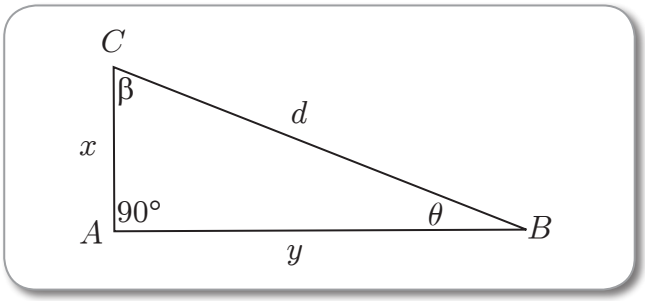
Resumiendo las funciones trigonométricas de 30º, 45º, 60º en una tabla:

Ángulo θ	$Sen\ \theta$	$Cos\ \theta$	$Tan\ \theta$	$Cot\ \theta$	$Sec\ \theta$	$Cosc\ \theta$
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$



Relaciones trigonométricas

Consideremos el triángulo *ABC*.



Podemos definir las 6 funciones trigonométricas tanto para el ángulo θ, como para el ángulo β como sigue:

Ángulo β	**Ángulo θ**
$Sen\,\beta = \frac{y}{d}$	$Sen\,\theta = \frac{x}{d}$
$Cos\,\beta = \frac{x}{d}$	$Cos\,\theta = \frac{y}{d}$
$Tan\,\beta = \frac{y}{x}$	$Tan\,\theta = \frac{x}{y}$
$Cot\,\beta = \frac{x}{y}$	$Cot\,\theta = \frac{y}{x}$
$Sec\,\beta = \frac{d}{x}$	$Sec\,\theta = \frac{d}{y}$
$Csc\,\beta = \frac{d}{y}$	$Csc\,\theta = \frac{d}{x}$

Observando la tabla anterior podemos encontrar las siguientes relaciones de igualdad:

$$Sen\,\beta = Cos\,\theta \quad Cos\,\beta = Sen\,\theta \quad Tan\,\beta = Cotg\,\theta$$
$$Cot\,\beta = Tan\,\theta \quad Sec\,\beta = \text{Cosc}\,\theta \quad Cosc\,\beta = Sec\,\theta$$

Ejemplo

Hallar las seis funciones trigonométricas para los ángulos dados.

Solución

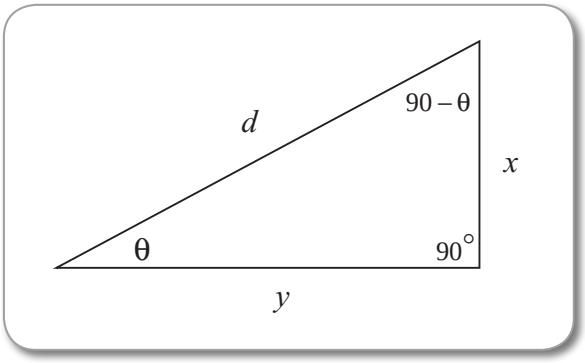
Según las definiciones anteriores tenemos:

$$Sen\ 30^\circ = \frac{1}{2} = Cos\ 60^\circ \qquad Csc\ 30^\circ = 2 = Sec\ 60^\circ$$

$$Sen\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = Cos\ 30^\circ \qquad Csc\ 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} = Sec\ 30^\circ$$

$$Tan\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = Cot\ 60^\circ \qquad Cot\ 30^\circ = \sqrt{3} = Tan\ 60^\circ$$

Otras relaciones trigonométricas que podemos encontrar dependen de que los ángulos internos de un triángulo es de 180º por lo tanto si un ángulo mide θ el otro ángulo mide $90° - \theta$, es decir $\beta = 90°$. Observemos nuevamente el triángulo *ABC*. En el triángulo rectángulo de la figura siguiente:



$$Cos\,(90^\circ - \theta) = \frac{x}{d}$$

$$Csc\,(90^\circ - \theta) = \frac{d}{y}$$

$$Cot\,(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y}$$

Notemos que:

$$Sen\,\theta = \frac{x}{d} \quad \text{así;} \quad Cos\,(90^o - \theta) = Sen\,\theta$$

$$Sec\,\theta = \frac{d}{y} \quad \text{así;} \quad Csc\,(90^o - \theta) = Sec\,\theta$$

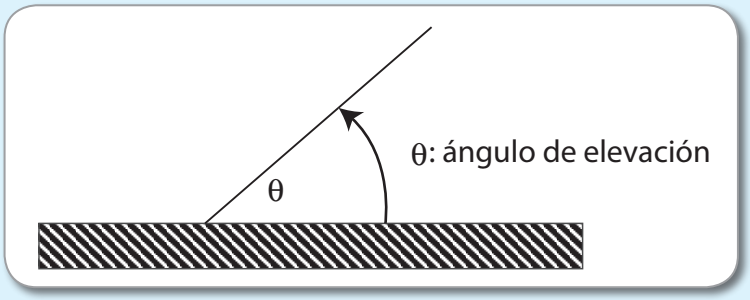
$$Tan\,\theta = \frac{x}{y} \quad \text{así;} \quad Cot\,(90^o - \theta) = Tan\,\theta$$

Resolución de triángulos rectángulos

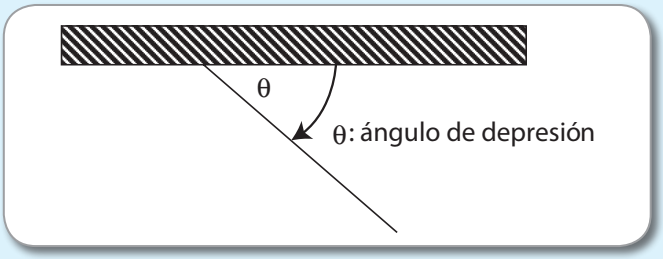
En varias situaciones, las funciones trigonométricas pueden emplearse para determinar distancias que difícilmente podrían medirse de manera directa por ejemplo, en campos de la ingeniería, como topografía, arquitectura, ingeniería mecánica, física, etc.

Vale la pena, antes de mostrar algunos ejemplos de aplicaciones de las funciones trigonométricas en triángulos rectángulos, mencionar dos aspectos importantes:

Ángulo de elevación: es el ángulo que se toma por encima de una línea horizontal, observemos la figura:

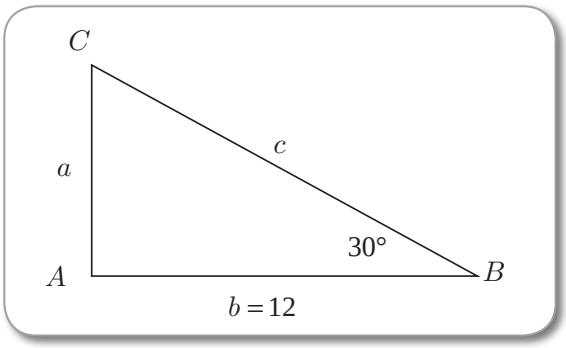


Ángulo de depresión: es el que se toma por debajo de la línea horizontal.



Ejemplos

1: En el triángulo *ABC*, θ=30° y b=12. Calcular las partes restantes



Con referencia a la figura anterior:

$Tan\,30^{\circ} = \frac{a}{12}$ $\qquad$ $Tan\,\theta = \frac{OP}{ady}$

a=$12(Tan30^{\circ})$ $\qquad$ Despejando a:

$a \approx 6.9282$ $\qquad$ Resultado

Para calcular el valor de c, se puede utilizar la función coseno o secante:

1) $Cos\,30^{\circ} = \frac{12}{c}$ $\qquad$ $Cos\,\theta = \frac{ady}{Hip}$

$c = \frac{12}{Cos\,30^{\circ}} \approx \frac{12}{0.86}$ $\qquad$ Despejando c

$c \approx 13.85$ $\qquad$ Resultado

2) $Sec\,30^{\circ} = \frac{c}{12}$ $\qquad$ $Sec\,\theta = \frac{hip}{ady}$

c =$(Sec\,30^{\circ})12$ $\qquad$ Despejando: c

$c \approx 13.85$ $\qquad$ Resultado

2. En el triángulo *ABC*, θ=58º y c=8, calcular las partes restantes.

Solución

En este ejercicio se conocen un ángulo agudo y la hipotenusa. Como, θ=58º; entonces el otro ángulo es 90º−58º es decir 32º.

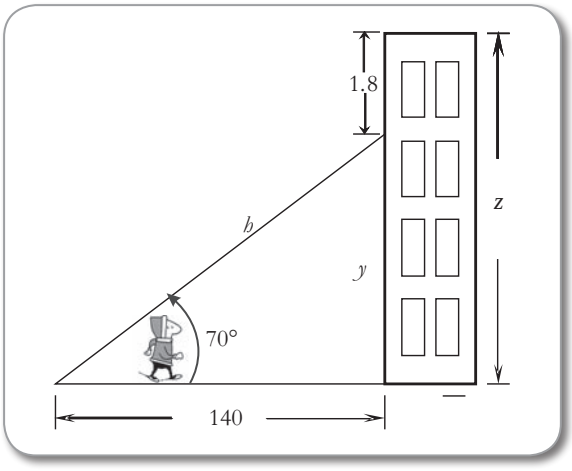
La función que relaciona el lado opuesto del ángulo θ con la hipotenusa, es la función seno.

$Sen\ 58^{o} = \frac{x}{8}$	$Sen\ \theta = \frac{Op}{hip}$
$x = 8.\ (Sen\ 58^{o})$	Despejo x
$x = 8\ (0.84)$	Simplificando:
$x \approx 6{,}78$	Resultado

Para encontrar el valor de y

$Cos\ 58^{o} = \frac{y}{8}$	$Cos\ \theta = \frac{ady}{hip}$
$y = 8.\ Cos\ (58^{o})$	Despejando y
$y = 8.\ (052)$	Simplificando
$y \approx 4.24$	Resultado

3. Observe la figura siguiente:

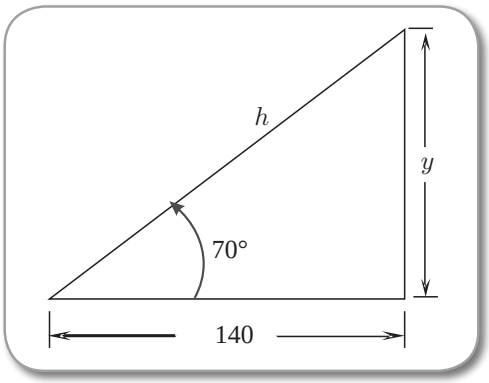


1) ¿Cuál es la altura del edificio ?

2) ¿Cuál es la longitud de la línea que une al observador con la parte superior del edificio?

Solución

1) En primer lugar consideremos el triángulo rectángulo como se muestra en la figura siguiente:



Observamos que la altura del edificio es $z = 1{,}8 + y$, solo nos falta saber cuánto vale y en metros.

Para ello utilizamos la función tangente que relaciona el ángulo de 70º con 140 mts y y.

$Tan\,70^{\circ} = \frac{y}{140}$ $\qquad$ $Tan\theta = \frac{op}{ady}$

$y = 140.\ (Tan 70^{\circ})$ $\qquad$ Despejando y

$y \approx 140\ (2.74)$

$y \approx 384,\ 6$ metros

Luego la altura aproximada del edificio es:

$z = 1.8$ mts. $+ 384,\ 6$mts.$= 386.44$mts.

2) Como la línea es la hipotenusa del triángulo considerado, entonces mediante la función coseno, obtenemos:

$Cos 70^{o} = \frac{140}{h}$ $\qquad$ $Cos\theta = \frac{ady}{hip}$

$h = \frac{140}{Cos\, 70^{o}}$ $\qquad$ Despejando h

$h = \frac{140}{0.342}$

$h = 409{,}33$ metros

4. La torre de un antena de radio se levanta sobre un edificio de 205 pies de altura. Desde un punto situado en el suelo a 498 pies de la base del edificio, se observa que un ángulo subtendido por la torre es de 10º ¿Cuál es la altura de la antena?

Solución

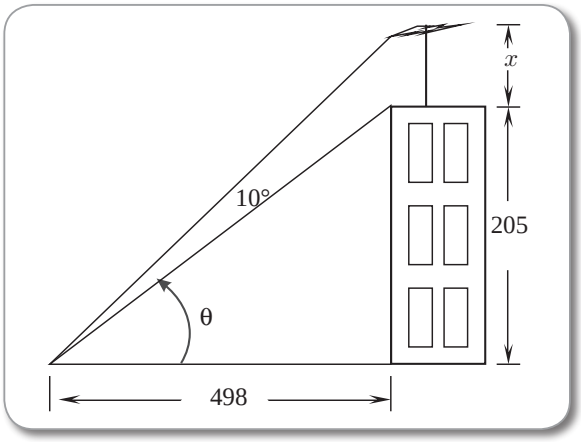
Para calcular θ utilizamos la función tangente:

$Tan\,\theta = \frac{205}{498}$ $\qquad$ $Tang\,\theta = \frac{op}{ady}$

$Tan\,\theta = 0.4116$ $\qquad$ Simplificando

$\theta = Tan^{-1}(0.4116)$ $\qquad$ Utilizar calculadora para $arc\text{-}\,tang$

$\theta \approx 22^{o}$



Ahora el ángulo es igual a: $\theta+10º$, es decir 32º, por lo tanto para hallar x utilizamos nuevamente la función tangente.

$Tan\ 32º = \frac{205+x}{498}$ $\qquad$ $Tan\ \alpha = \frac{op}{ady}$

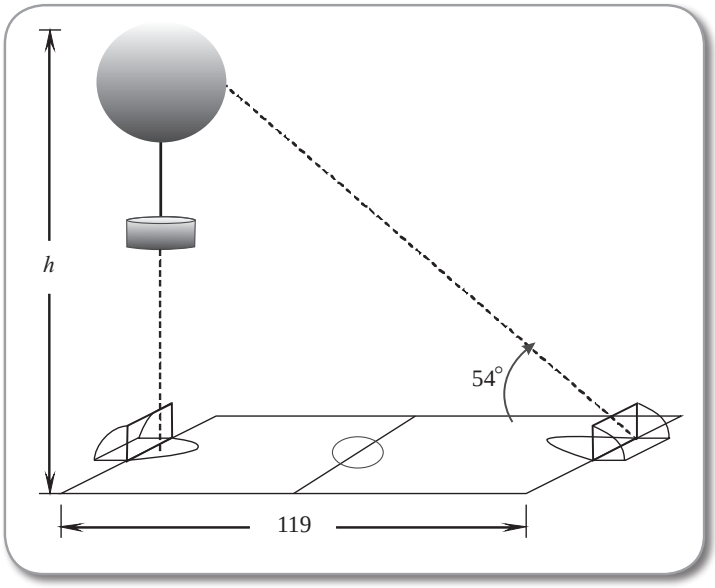
$0.6248 = \frac{205+x}{498}$ $\qquad$ Simplificando

$311.184 = 205+x$

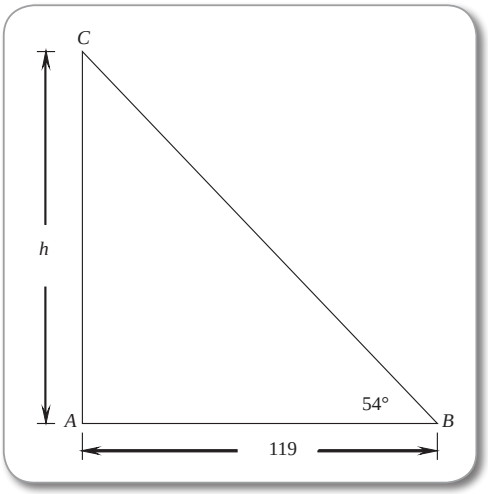
$x = 106.184$ mts

5. **Ángulo de depresión**

Un turista está a bordo de un globo, observa desde la góndola del globo, cuando pasa por un extremo de un campo de fútbol, como se muestra en la figura.



El ángulo de **depresión** hasta el otro extremo del terreno de fútbol mide 54º. Se sabe que la longitud del campo, incluyendo las zonas de los extremos miden 119 yardas ¿a qué altura pasó el globo sobre el terreno de fútbol?



Solución

Queremos determinar la altura del triángulo rectángulo ABC, podemos relacionar la función tangente en el triángulo rectángulo,

$Tan\ 54^o = \frac{h}{119}$

$h=(119)\ Tan\ 54^o$

$h=163.789$ yardas

Aplicaciones a los vectores

Componentes de un vector

Un vector de posición p que forma un ángulo θ, con respecto al eje x positivo, puede descomponerse en vectores componentes P_x y P_y a lo largo de los ejes x e y, respectivamente, con magnitudes P_x y P_y donde:

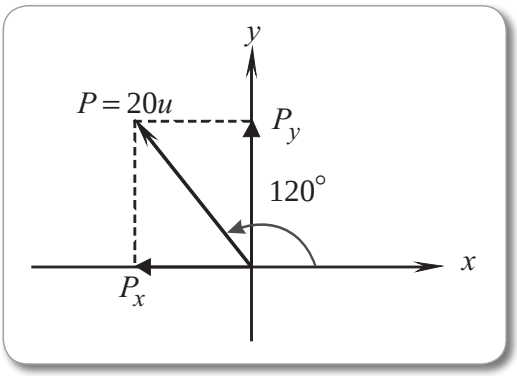
$$P_x=PCos\theta \qquad \text{y} \qquad P_y=PSen\theta$$

Ejemplos

6. Descomponga en sus componentes horizontal y vertical un vector de 20 unidades de longitud y un ángulo de 120º.

Solución

Considere que se trata de un vector posición y coloque el punto inicial en el origen. Se sabe que $P=20u$ y $\theta=120^o$ de modo que:



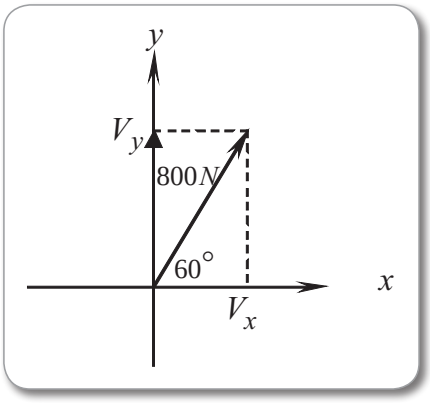
$$P_x = P\,Cos\theta = 20Cos120^{\circ} = 20.\,(-0{,}5) = -10$$

y

$$P_y = P\,Sen\theta = 20Sen120^{\circ} = 20\,(0.866) \approx 17.32$$

7. Un cable tensionado ejerce una fuerza de 800 N (*Newtons*) con un ángulo 60º, con respecto al eje horizontal, descomponga esta fuerza en sus componentes horizontal y vertical.

   Si el cable se representa por el vector V, entonces la descomposición horizontal Vx y la descomposición Vy con $\theta =$ 60º es:



$$V_x = 800\ Cos\ 60^{\circ}$$
$$= 800\ (0.5)$$
$$= 400\ \text{N}$$

y

$$V_y = 80060$$
$$= 800.\ (0.86)$$
$$= 692.8\ \text{N}$$

Observamos que este cable tensionado ejerce una fuerza horizontal de 400 *Newtons*, y una fuerza vertical aproximadamente de 692. 8 *Newtons*.

Reducciones a funciones de ángulos positivos

Ángulo cofinales

Sea θ un ángulo cualquiera; entonces

$$Sen\,(\theta + n\,360^o) = Sen\,\theta \qquad Cot\,(\theta + n360^o) = Cot\,\theta$$

$$Cos\,(\theta + n\,360^o) = Cos\,\theta \qquad Sec(\theta + n\,360^o) = Sec\,\theta$$

$$Tan\,(\theta + n\,360^o) = Tan\theta \qquad Cosc(\theta + n\,360^o) = Cosc\,\theta$$

A continuación presentamos algunos ejemplos de estas identidades:

i) $Sen400^o = Sen(40^o+360^o) = Sen40^o$

ii) $Cos(850^o) = Cos(130^o + 2(360^o)) = Cos(130^o)$

iii) $Tan(-1000^o) = Tan(80^o - 3(360^o)) = Tan(80^o)$

Funciones del ángulo negativo

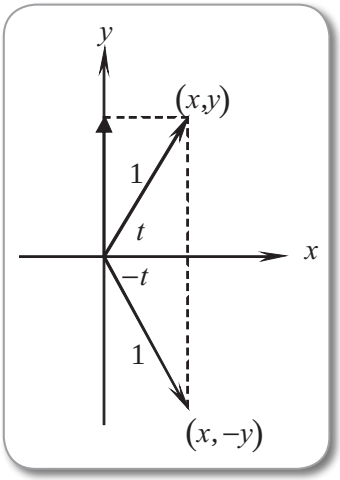
Vamos a establecer las fórmulas en donde aparecen funciones de $-t$ para cualquier ángulo t.

a) $Sen\,(-t) = -Sen(t)$	c) $Cosc(-t) = -Cosc(t)$	e) $Tan(-t) = -Tan(t)$
b) $Cos\,(-t) = Cos(t)$	d) $Sec(-t) = Sec(t)$	a) $Cot\,(-t) = -Cot(t)$

Vamos a demostrar:

a) Inicialmente tomemos un círculo con radio uno:

Note: que a medida que el ángulo



aumenta de 2π al punto (x,y) traza un círculo unitario y lo mismo sucede en sentido a las manecillas del reloj, aplicando la definición de funciones trigonométricas tenemos:

$$Sen\,(-t) = -\frac{y}{1} = -Sen\,t$$

Ahora $Cos\,(-t) = x = Cos\,t$

$$Tan\,(-t) = \frac{y}{x} = -Tan\,t$$

Las demás fórmulas se demuestran en forma similar.

Citamos algunos ejemplos:

$$Cos\,(-\pi) = Cos\,\pi = -1$$

$$Sen\,(-0^o) = Sen\,0^o = 0$$

$$Tan\,(-\tfrac{\pi}{3}) = -Tan\,(\tfrac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

$$Sec\,(-\tfrac{\pi}{3}) = Sec\,(\tfrac{\pi}{3}) = 2$$

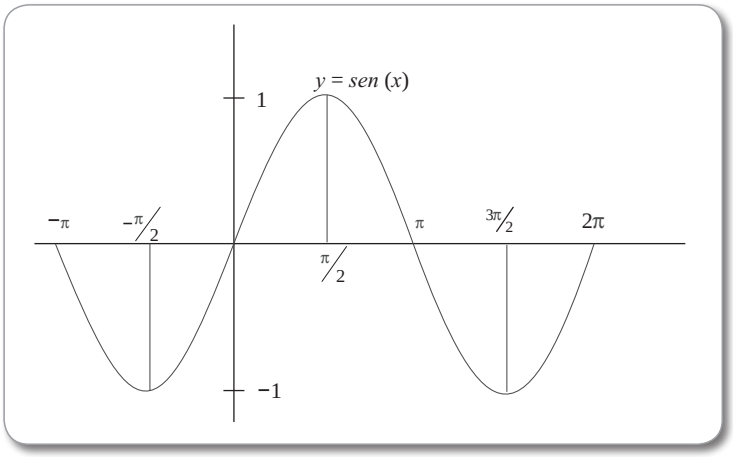
$$Sen\,(-\tfrac{\pi}{4}) = -Sen\,(\tfrac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Cos\,(-\tfrac{\pi}{6}) = Cos\,(\tfrac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gráficas de las funciones trigonométricas

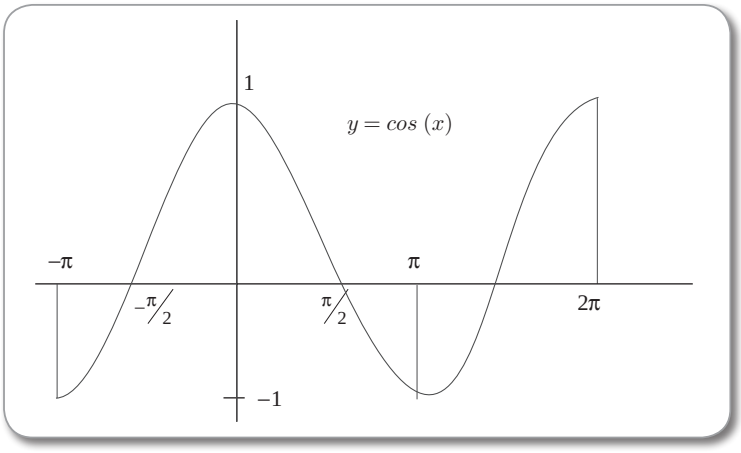
A continuación graficamos las seis funciones trigonométricas estudiando su comportamiento tales como definición, dominio, rango, asíntotas verticales, abscisa en x, ordenadas en y, período, estudiar si son funciones pares o impares, simetría.

Función seno



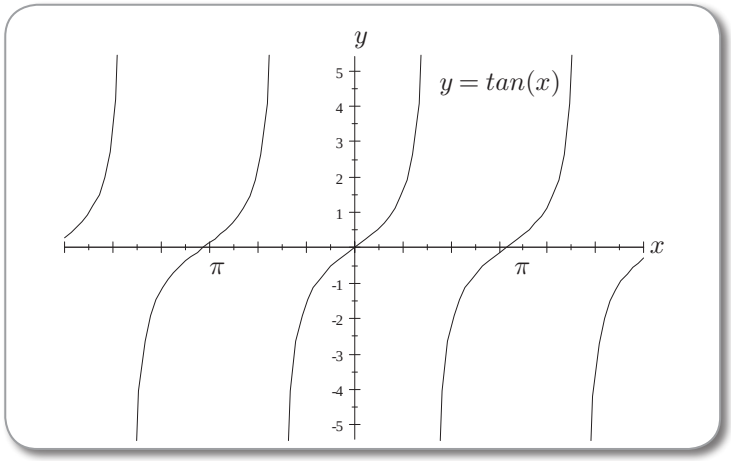
La definición es $\frac{y}{r}=Sen\theta$, el dominio son todos los números reales, no tiene asíntotas verticales, recorrido $[-1,1]$, el período es 2π, lo cual significa que cada 2π radianes la gráfica se repite; es una función impar porque cumple la propiedad de que $f(-x)=-f(x)$ además, tiene simetría en el origen porque $\forall(x,y)\in G\Rightarrow(-x,y)\in G$, donde G es la gráfica de la función.

Función coseno



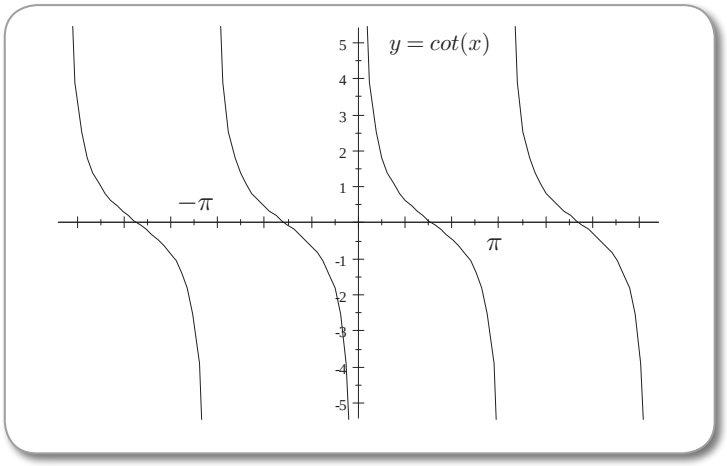
Definición $cos\theta=\frac{x}{r}$ el dominio todos los reales, recorrido $[-1,1]$ el período es 2π, es una función par porque $f(-x)=f(x)$ y tiene simetría en el eje y $\forall(x,y\in G\Rightarrow(-x,y))\in G$, donde G es la gráfica de la función.

Función tangente



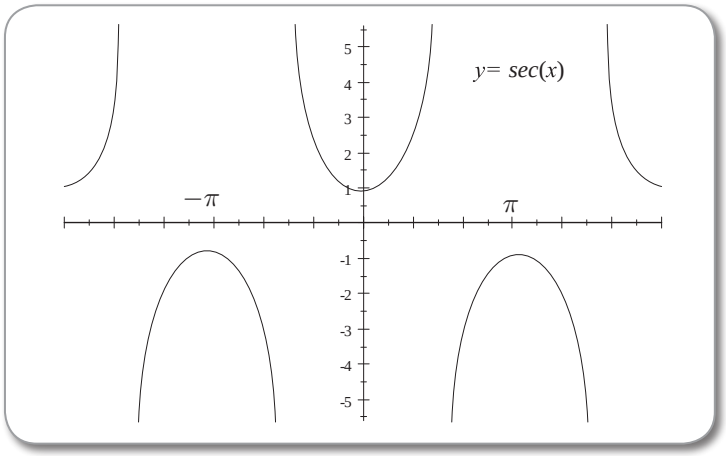
Definición: $Tan\,\theta = \frac{y}{x}$, dominio todos los reales diferentes de $\frac{\pi}{2} + \pi n$, asíntotas en $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. El recorrido todos los reales, tiene período π, es una función impar porque cumple la propiedad: $f(x) = -f(-x)$, además tiene simetría en el origen porque $\forall (x,y) \in G \Rightarrow (-x,-y) \in G$, donde G es la gráfica de la función.

Función cotangente



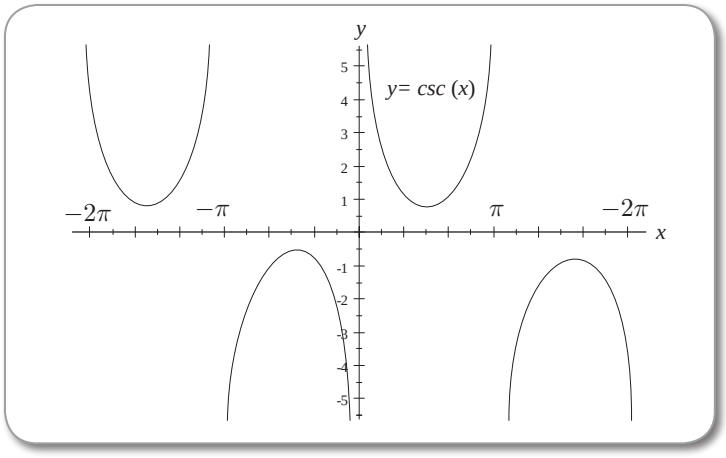
Definición $Cot\,\theta = \frac{x}{y}$, el dominio son todos los reales diferentes de πn, tiene asíntotas en $x = \pi n$ el recorrido son todos los números reales, tiene período π, es una función par porque $f(-x) = f(x)$, además tiene simetría en el origen porque $\forall (x,y) \in G \Rightarrow (-x,-y) \in G$, donde G es la gráfica de la función.

Función secante



Definición $Sec\theta = \frac{r}{x}$, dominio en todos los reales diferentes de $\frac{\pi}{2} + \pi n$, asíntotas verticales en $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, el recorrido es el intervalo $(-\infty -1] \cup [1, +\infty]$ el período 2π, es una función par porque cumple la propiedad: $f(-x) = f(x)$, y tiene simetría respecto al eje y porque $\forall (x,y) \in G \Rightarrow (-x,y) \in G$. donde G es la gráfica de la función.

Función cosecante



Definición $Csc\theta = \frac{r}{y}$ el dominio son todas los números $\{x \in \mathbb{R}\} | x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}\}$, existen asíntotas en $x = \pi n$, el recorrido es el conjunto $(-\infty, -1] \cup [1 + \infty)$, el período 2π, es una función impar porque cumple la propiedad: $f(-x) = -f(x)$,

y además tiene *simetría respecto al origen*, porque $\forall(x,y)\in G\Rightarrow(-x,-y)\in G$, donde G es la gráfica de la función.

Variaciones de las gráficas de seno y coseno

Consideremos las gráficas de las ecuaciones ó dicho de otra manera de las funciones trigonométricas de la forma:

$$f(t)= aSen(bt+c)$$

y $$g(t)= aCos(bt+c)$$

Estos modelos matemáticos nos pueden representar o relacionar situaciones como el movimiento de una onda del sonido, las vibraciones como por ejemplo la cuerda de una guitarra, es decir todo aquello que tenga que ver con fenómenos oscilatorios o armónicos.

Las variaciones que se deben tener en cuenta para estudiar este tipo de funciones son:

1 Amplitud

2 Período

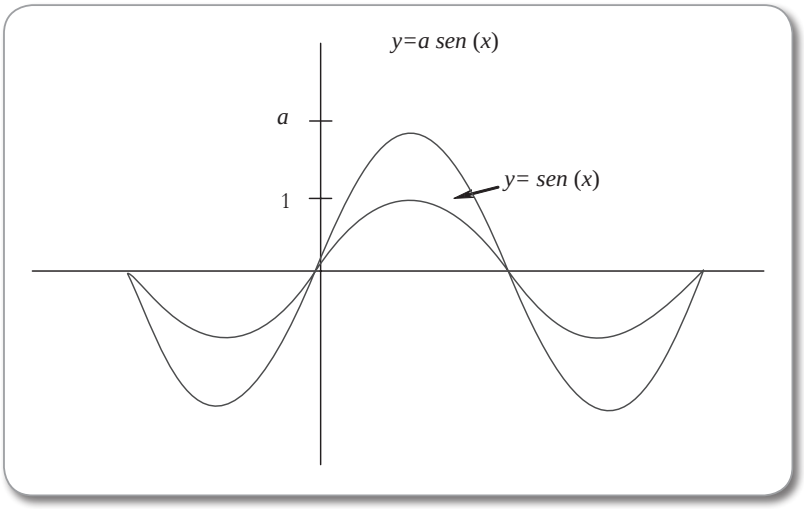
3 Desplazamiento fase

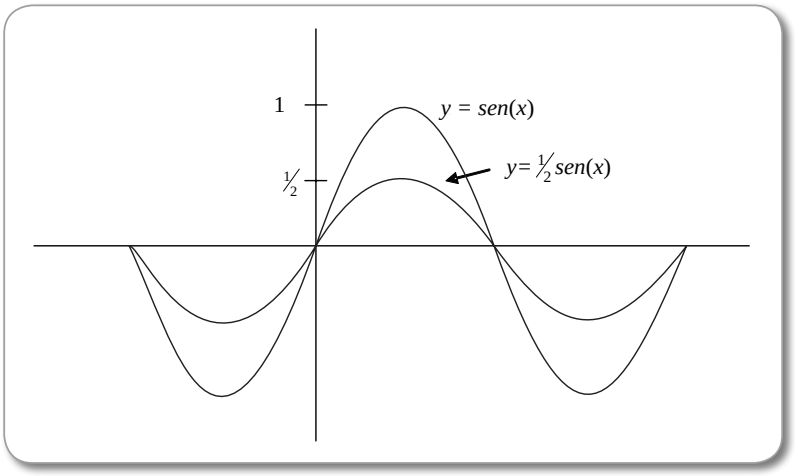
Amplitud
Es la máxima ordenada que puede presentar la función, en el caso de la función seno y coseno se representa con el número $|a|$ (Valor absoluto de a) mediante la modelación:

$$y= aSen\ t$$

$$y= aCos\ t$$

Como se muestra en la figura siguiente:



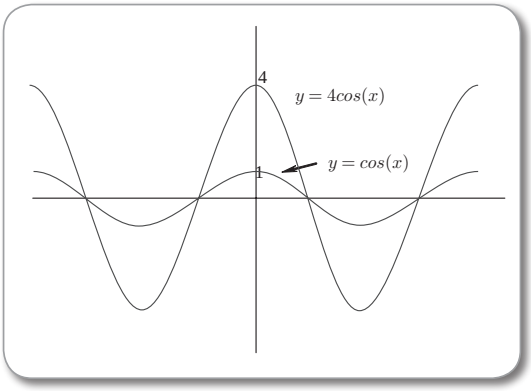


Ejemplo

Hallar la amplitud y la gráfica de $y = 4Cos\ x$

Solución

Siguiendo el modelo $y = aCosx$ nos damos cuenta que la amplitud es 4 esto significa multiplicar por 4 las coordenadas de y, como se muestra la figura siguiente:



Período

El período lo podemos asociar como la longitud de la onda, en otras palabras, si tenemos la función $y = Senx$ recordando el período es 2π, si $t{=}0$, la función $Senx$ repetirá sus valores comenzando en $bt{=}2\pi$ ó $t = \frac{2\pi}{b}$, lo cual significa que la función $y{=}Sen(bt)$tiene un período de $\frac{2\pi}{b}$ lo que representa en la gráfica se repetirá $p = \frac{2\pi}{b}$ unidades.

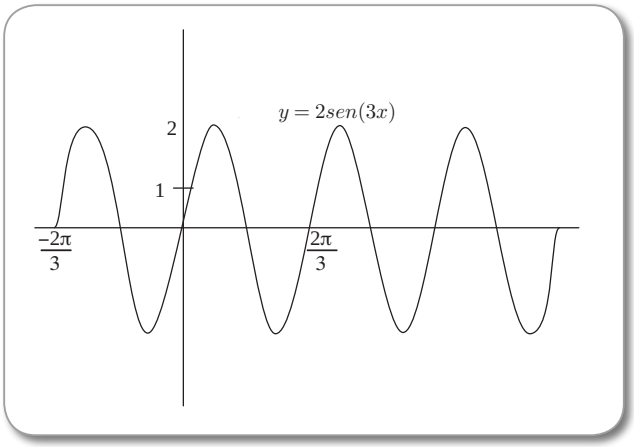
Ejemplo

Hallar el período de $y = 2Sen3x$

Solución

En este caso, el valor de $b{=}3$ por lo tanto el período es:
$p = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$.

Esto significa que cada $\frac{2\pi}{3}$ unidades se repite la gráfica.



Fase

Si formulamos a $y=aSen(bt\pm c)$ como $y = a\,Sen\,[b(t \pm \frac{c}{b})]$ esta función anterior se obtiene de traducir la función $y=aSen(bt)$ horizontalmente una distancia $\frac{|c|}{b}$, ahora dependiendo de si el valor de c es mayor que cero o menor que cero, la gráfica se traslada hacia la derecha o a la izquierda.

Por lo tanto hay que tener en cuenta lo siguiente:

a) Si $c>0$ la gráfica de la función se traslada horizontalmente hacia la izquierda

b) Si $c<0$ la gráfica se traslada horizontalmente hacia la derecha

El número $-\frac{c}{b}$ se denomina **Desplazamiento de fase de la función**:

$$y = Sen(bt+c)$$

Ejemplo

Determine la amplitud, período y desplazamiento de fase de:

$y = 15\,Cos\,(2t - \frac{5\pi}{2})$

Solución

Tomemos $a=15$ $b=2$ y $c = -\frac{5\pi}{2}$

a) Amplitud

La amplitud es: $|a|=|15|=15$

b) Período $p = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$,es decir, la gráfica se repite cada π unidades.

Desplazamiento fase: $-\frac{c}{b} = -\frac{(-\frac{5\pi}{2})}{2} = \frac{5\pi}{4}$ como $c = -\frac{5\pi}{2}$, y es menor que cero, significa que la gráfica $y = 15\,Cos\,(2t - \frac{5\pi}{2})$ se desplaza $\frac{5\pi}{4}$ unidades hacia la derecha.

Desplazamiento vertical

Suponga que tenemos las funciones $y = aSen(bt+c)+k$ $y = aCos(bt+c)+k$ la pregunta que nos podríamos hacer es, ¿qué papel desempeña la constante k?

El papel que desempeña k en la gráfica es trasladarla verticalmente k unidades.

a) Si $k>0$ la gráfica se traslada verticalmente k unidades hacia arriba.

b) Si $k<0$ la gráfica se traslada verticalmente k unidades hacia abajo.

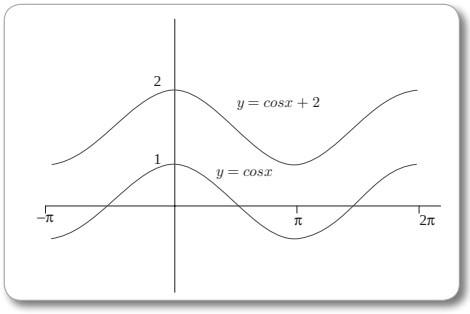
Ejemplo

Trazar la gráfica de: $y= Cos\ x+2$

Solución

Es importante observar que: $y= Cos\ x+2 \neq Cos(x+2)$

La figura que aparece en seguida se traslada verticalmente 2 unidades hacia arriba.



Identidades trigonométricas

Es obvio formularnos una pregunta, ¿qué es una identidad?

Recordemos que una ecuación como: $7(x-1)= 7x-7$, es válida para todos los reales, por lo tanto, una identidad es una ecuación donde es válida para todos los reales.

Si tomamos la ecuación trigonométrica:

$$\frac{Cos\,\theta}{Cot\,\theta} = Sen\ \theta$$

Es una identidad porque: $\frac{Cos\,\theta}{Cot\,\theta} = \frac{Cos\,\theta}{\frac{Cos\,\theta}{Sen\,\theta}}$

$$= Cos\,\theta\,(\frac{Sen\,\theta}{Cos\,\theta})$$

$$= Sen\,\theta$$

Para todos los números reales θ con $Cot\,\theta \neq 0$.

Existen muchas identidades trigonométricas, pero las fundamentales se clasifican en:

a) Pitagóricas

b) Cociente

c) Recíprocas

d) Identidades pares e impares

a) Pitagóricas

La primera identidad pitagóricas es:

$$Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1 \qquad (1)$$

De aquí podemos deducir otras identidades:

$$Cos^2\theta = 1 - Sen^2\theta \qquad (2)$$

y

$$Sen^2\theta = 1 - Cos^2\theta \qquad (3)$$

Ahora si dividimos a (1) entre $Cos^2\theta$ nos queda la ecuación:

$$\frac{Cos^2\theta}{Cos^2\theta} + \frac{Sen^2\theta}{Cos^2\theta} = \frac{1}{Cos^2\theta}$$
$$1 + Tan^2\theta = Sec^2\theta \qquad (4)$$

Análogamente si dividimos a (1) entre $Sen^2\theta$, y nos da la identidad:

$$Cot^2\theta + 1 = Cosc^2\theta \qquad (5)$$

b) Cociente

Las identidades de cociente son dos:

$$Tan\,\theta = \frac{Sen\,\theta}{Cos\,\theta} \qquad Cot \qquad (6)$$

$$Cot\,\theta = \frac{\boldsymbol{Cos\,\theta}}{\boldsymbol{Sen\,\theta}} \qquad (7)$$

c) Recíprocas

$$Sec\,\theta = \frac{1}{Cos\,\theta} \qquad Csc \qquad (8) \quad Cot$$

$$Csc\,\theta = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{Sen\,\theta}} \qquad (9)$$

$$Cot\,\theta = \frac{1}{tan\,\theta} \qquad (10)$$

d) Identidad pares e impares

Estas identidades ya las habíamos mencionado anteriormente:

$$Sen(-\theta) = -Sen\theta \qquad Cosc(-\theta) = -Cosc\,\theta$$

$$Cos(-\theta) = Cos\theta \qquad Sec(-\theta) = Sec\,\theta$$

$$Tan(-\theta) = -Tan\theta \qquad Cot(-\theta) = -Cot\theta$$

Nota: las identidades anteriores sirven para simplificar otras identidades más complejas, como veremos en los siguientes ejemplos:

Ejemplos

1. Escriba como una sola expresión trigonométrica $Cosc\theta\ Sen\theta$

Solución

Utilizando la identidad recíproca $\frac{1}{Sen\,\theta} = Cosc\,\theta$ tenemos lo siguiente:

$$Cosc\theta\ Sen\,\theta = (\tfrac{1}{Sen\,\theta}).Sen\,\theta$$

$$Cosc\theta\ Sen\,\theta = 1$$

2. Verificar que: $Sec\theta - Cos\theta = Sen\theta.Tan\theta$:

Tomemos el lado izquierdo para llegar al lado derecho

$$\begin{aligned} Sec\,\theta - Cos\,\theta &= \tfrac{1}{Cos\,\theta} - Cos\,\theta && \text{Identidad recíproca} \\ &= \tfrac{1-Cos^2\theta}{Cos\,\theta} && \text{Sumando expresiones} \\ &= \tfrac{Sen^2\theta}{Cos\,\theta} && \text{Identidad pitagórica} \\ &= Sen\,\theta\ (\tfrac{Sen\,\theta}{Cos\,\theta}) && \text{Identidad cociente} \\ &= Sen\,\theta.Tan\,\theta \end{aligned}$$

3. Verificar la identidad: $Sec\,\theta - Sec\,\theta\ Sen^2\theta = Cos\,\theta$

Solución

Tomamos la expresión del miembro de la izquierda para llegar al miembro de la derecha.

$Sec\theta - Sec\,\theta\, Sen^2\theta =$

$= Sec\,\theta\,(1 - Sen^2\theta)$ Factorizando

$= Sec\,\theta\,(Cos^2\theta\,)$ Identidad recíproca

$= \frac{1}{Cos\,\theta}\,.\,(Cos^2\theta)$ Identidad recíproca

$= Cos\,\theta$ Simplificación de términos

4. Verificar la identidad

$$\frac{1}{Tan\,\theta + Cot\theta} = Sen\,\theta.\,Cos\,\theta$$

Solución

Demostraremos la identidad tomando la expresión del lado izquierdo para llegar al lado derecho:

$\frac{1}{Tan\,\theta + Cot\,\theta} = \frac{1}{\frac{Sen\,\theta}{Cos\,\theta} + \frac{Cos\theta}{Sen\,\theta}}$ Identidad de cociente

$= \frac{1}{\frac{Sen^2\,\theta + Cos^2\theta}{Cos\theta.Sen\theta}}$ Sumando términos

$= \frac{Cos\theta.\,Sen\,\theta}{Sen^2\theta + Cos^2\theta}$ Medios y extremos

$= \frac{Cos\theta\ Sen\theta}{1}$ ya que $Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1$

$= Cos\,\theta.\,Sen\,\theta$

5. Verificar la identidad $|Sen\,\theta| = \frac{|Tan\,\theta|}{\sqrt{1+Tan^2\theta}}$

Solución

Tomamos la expresión de lado derecho para llegar al lado izquierdo.

Sea $\frac{|Tan\,\theta|}{\sqrt{1+Tan^2\theta}} = \frac{|Tan\,\theta|}{\sqrt{Sec^2\theta}}$ Identidad pitagórica

$$= \frac{|Tan\theta|}{|Sec\,\theta|} \quad \text{por ser} \; = \; |\text{Sec}\,\theta| = \sqrt{Sec^2\theta}$$

$$= \frac{|\frac{Sen\,\theta}{Cos\,\theta}|}{|\frac{1}{Cos\,\theta}|}$$ Identidad de cociente y recíproca

$$= |\frac{Sen\,\theta}{Cos\,\theta} \cdot \frac{Cos\,\theta}{1}|$$

$$= |Sen\theta|$$ Medios y extremos

Fórmula de suma y diferencia de dos ángulos

En esta sección estudiaremos algunas identidades correspondientes a suma y diferencia de dos ángulos. Estas identidades son importantes para estudios más avanzados en matemáticas como:

- Cálculo
- Mecánica ondulatoria
- Teoría de circuitos eléctricos
- En otras áreas técnicas

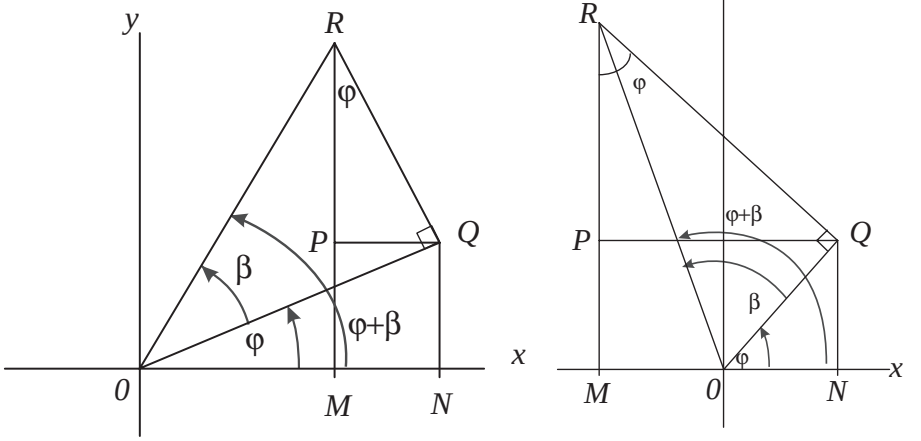
En primer lugar nuestro problema consiste en saber cómo puedo calcular:

Sea, $Sen(\varphi+\beta)$ ó $Cos(\varphi+\beta)$

Cuando φ y β son dos ángulos positivos.

Solución

Sean dos ángulos φ y β positivos agudos tales que $\varphi+\beta<$ 90° fig.(a), y $\varphi+\beta>$ 90° fig.(b)



Hagamos la construcción geométrica de manera que el ángulo φ este en posición normal, mientras que el ángulo β esté de tal forma que su vértice caiga en O, y que su lado inicial coincide con el lado final del ángulo φ.

Sea *R* un punto cualquiera del ángulo final de $\varphi+\beta$, trace los segmentos *RM*, *RQ*, *QN* y *QP*, de tal manera que *RM* sea perpendicular a *OX* y *QP*, entonces, $\angle$MRQ=φ, porque sus lados correspondientes (*OM* y *MR*, *OQ* y *QR*) son perpendiculares.

Sea: $Sen\,(\varphi + \beta) = \frac{MR}{OR}$ Definición de Seno

$= \frac{MP+PR}{OR}$ Por ser $MP+PR=MR$

$= \frac{MP}{OR} + \frac{PR}{OR}$ Suma de expresiones

$= \frac{MP}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OR} + \frac{PR}{QR} \cdot \frac{QR}{OR}$ por ser $MP=NQ$

$= \frac{NQ}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OR} + \frac{PR}{QR} \cdot \frac{QR}{OR}$

$= Sen\,\varphi . Cos\,\beta + Cos\,\varphi\, Sen\,\beta$

Definición de funciones trigonométricas, por lo tanto:

$Sen(\varphi+\beta)=Sen\varphi\, Cos\beta+ Cos\varphi\, Sen\beta$ y

$Cos\,(\varphi+\beta) = \frac{OM}{OR}$ Definición de función coseno

$= \frac{ON-MN}{OR}$ Por ser $OM=ON-MN$

$= \frac{ON}{OR} - \frac{MN}{OR}$ Diferencia de expresiones

$= \frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OR} - \frac{MN}{QR}\cdot\frac{QR}{OR}$

$= \frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OR} - \frac{PQ}{QR}\cdot\frac{QR}{OR}$ Por ser $MN=PQ$

$= Cos\,\varphi\,.\,Cos\,\beta - Sen\,\varphi.\,Sen\,\beta$ Definición de seno

Por lo tanto: $Sen\,(\varphi\pm\beta) = Sen\,\varphi Cos\,\beta \pm Cos\,\varphi Sen\,\beta$

Fórmula de la diferencia de seno y coseno

$$Sen\,(\varphi\pm\beta) = Sen\,\varphi Cos\,\beta \pm Cos\,\varphi Sen\,\beta$$

$$Cos\,(\varphi\pm\beta) = Cos\,\varphi Cos\,\beta \mp Sen\,\varphi Sen\,\beta$$

Ejemplos

1. Calcular $Sen(15°)$

Solución: podemos expresar así, $15°= 45°-30°$ entonces, $Sen(15°) = Sen(45°-30°)$

$= Sen45°\cdot Cos30° - Cos45° Sen30°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

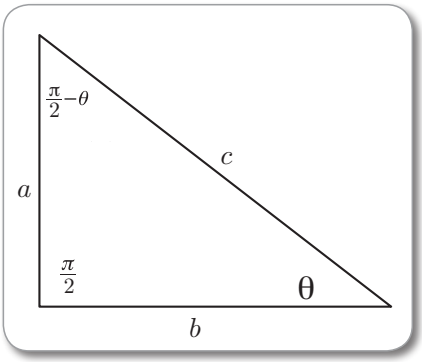
2. Halle $Cos\,(\frac{7\pi}{12})$

Solución: utilizando el hecho de que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ entonces

$$\begin{aligned} Cos\left(\tfrac{7\pi}{12}\right) &= Cos\left(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= Cos\,\tfrac{\pi}{3} \cdot Cos\,\tfrac{\pi}{4} - Sen\,\tfrac{\pi}{3} \cdot Sen\,\tfrac{\pi}{4} \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

Ahora utilizando las fórmulas de suma y diferencia de dos ángulos de seno y coseno demostramos otras fórmulas llamadas de cofunción.

En primer lugar tomemos el triángulo rectángulo:



Si θ es un ángulo agudo medido en radianes y, $\frac{\pi}{2} - \theta$ es el complemento de θ, entonces podemos considerar las siguientes razones trigonométricas:

$$i) \quad Sen\,\theta = \tfrac{a}{c} = Cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$ii) \quad Cos\,\theta = \tfrac{b}{c} = Sen\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$iii) \quad Tan\,\theta = \tfrac{a}{b} = Cot\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right)$$

3. Demostrar que $Cos\,(\frac{\pi}{2} - \theta) = Sen\,\theta$

Solución

Utilizando la fórmula de diferencia tenemos:

$$Cos\,(\,\tfrac{\pi}{2} - \theta) = Cos\,\tfrac{\pi}{2}.\,Cos\,\theta + \text{Sen}\,\tfrac{\pi}{2}\,.\,Sen\,\theta$$

$$= (0).\,Cos\,\theta + (1)\,Sen\,\theta$$

$$= Sen\,\theta$$

4. Demostrar $Sen\,(\frac{\pi}{2} - \theta) = Cos\,\theta$

$$= Sen\,\tfrac{\pi}{2}\,\text{Cos}\,\theta - Cos\,\tfrac{\pi}{2} \cdot Sen\,\theta$$

$$= (1)\,Cos\,\theta - (0)\,Sen\,\theta$$

$$= Cos\,\theta$$

5. Demostrar que $Tan\,(\frac{\pi}{2} - \theta) = Cot\,\theta$

Solución

$$Tan\,\,(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \tfrac{Sen\,(\frac{\pi}{2}-\theta)}{Cos\,(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \tfrac{Cos\,\theta}{Sen\,\theta} = Cot\,\theta$$

Fórmulas de suma y diferencia para la tangente

a) $Tan\,(\varphi + \beta) = \frac{Tan\,\varphi + Tan\,\beta}{1 - Tan\,\varphi.\,Tan\,\beta}$

b) $Tan(\varphi - \beta) = \frac{Tan\,\varphi - Tan\,\beta}{1 + Tan\,\varphi.Tan\,\beta}$

Prueba de $i)$

$$Tan\,(\varphi+\beta) = \frac{Sen\,(\varphi+\beta)}{Cos\,\,(\varphi+\beta)} = \frac{Sen\,\varphi\,Cos\,\beta + Cos\,\varphi\,Sen\,\beta}{Cos\,\varphi\,Cos\,\beta - Sen\,\varphi\,Sen\,\beta}$$

Al dividir la expresión anterior entre $Cos\varphi\ Cos\beta$, diferentes de cero, tenemos:

$$= \frac{\left(\frac{Sen\ \varphi}{Cos\,\varphi}\right)\left(\frac{Cos\,\beta}{Cos\,\beta}\right) + \left(\frac{Cos\,\varphi}{Cos\,\varphi}\right)\left(\frac{Sen\,\beta}{Cos\,\beta}\right)}{\left(\frac{Cos\,\varphi}{Cos\,\varphi}\right)\left(\frac{Cos\,\beta}{Cos\beta}\right) - \left(\frac{Sen\ \varphi}{Cos\,\varphi}\right)\left(\frac{Sen\ \beta}{Cos\,\beta\,)}\right)} = \frac{Tan\,\varphi + Tan\,\beta}{1 - Tan\,\varphi.\,Tan\,\beta}$$

Para demostrar $Tan(\varphi - \beta)$ se hace en forma análoga.

Ejemplo

Calcule $Tan(15°)$

Solución

Tomemos $15° = 45° - 30°$, entonces:

$$Tan(15°) = Tan(45° - 30°)$$

$$= \frac{Tan\,45^o - Tan\,30^o}{1 + Tan\,45^o\,Tan\,30^o}$$

$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1\,(\frac{1}{\sqrt{3}})} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$, y racionalizando, $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} =$

$\frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$, factorizando, $\frac{2[2 - \sqrt{3}\,]}{2}$, simplificando da como resultado, $2 - \sqrt{3}$

Otra manera de hacer el ejercicio es tomando a $15° = 60° - 45°$

$$Tan(15°) = Tan(60° - 45°)$$

$$= \frac{Tan\,60^o - Tan\,45^o}{1 + Tan\,60^o\,Tan\,45^o} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

Ejemplo

Encontrar el valor de $Tan(105°)$

Solución

Podemos expresar el ángulo 105° como la suma parcial de los ángulos notables,$105° = 45° + 60°$,utilizando la fórmula de la suma para la tangente, obtenemos:

$Tan\,(105^o) = Tan\,(45^o + 60^o)$ Suma de ángulos notables

$= \frac{Tan\,45^o + Tan\,60^o}{1 - Tan\,45^o\,Tan\,60^o}$ Fórmula de la suma para la *tangente*

$= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ Valores trigonométricos

$= \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$ Multiplicado por la conjugada del denominador: $(1 + \sqrt{3})$

$= \frac{(1+\sqrt{3})^2}{-2}$ Simplificando

$= \frac{1+2\sqrt{3}+3}{(-2)}$ Producto notable

$= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$ Simplificando

$= -2 - \sqrt{3}$

Ejemplo

Demostrar que $Tan\,(x + \pi) = Tan\,x$

Solución

Sea $Tan\,(x + \pi) = \frac{Tan\,x + Tan\,\pi}{1 - Tan\,x\,.\,Tan\,\pi}$

$= \frac{Tan\,x + 0}{1 - (Tan\,x)\,(0)}$

$= Tan\,x$

ya que $Tan\,(\pi) = 0$

Fórmulas del ángulo doble y del ángulo medio

Podemos obtener las fórmulas para expresar $Cos(2x)$, $Sen(2x)$, $Tan(2x)$ a partir de las fórmulas de la suma para: *coseno*, *seno* y *tangente*, vistas en la sección anterior.

Fórmulas de ángulo doble

Estas fórmulas son casos particulares de la suma de *coseno* y *seno*.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} Cos(2x) &= Cos(x+x) && \text{Suma parcial de } 2x \\ &= Cosx \cdot Cosx - Senx \cdot Senx && \text{Fórmula de suma para } \textit{coseno} \\ &= Cos^2x - Sen^2x && \text{Multiplicando} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Cos(2x) = Cos^2x - Sen^2x$

Por otro lado de manera análoga:

$$\begin{aligned} Sen(2x) &= Sen(x+x) && \text{Suma parcial de } 2x \\ &= SenxCosx + SenxCos = 2SenxCosx \\ & && \text{Fórmula de la suma para seno} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Sen(2x) = 2SenxCosx$

Fórmula para la tangente del ángulo doble

De la misma manera como en los casos anteriores utilizamos la fórmula de la suma de la tangente para deducir a qué es igual $Tan(2x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} Tan\,(2x) &= Tan\,(x+x) && \text{Suma parcial de } 2x \\ &= \frac{Tanx + Tanx}{1 - Tanx \,.\, Tanx} && \text{Fórmula de la suma para la tangente} \\ &= \frac{2\,Tanx}{1 - Tan^2x} && \text{Simplificando.} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $Tan\,(2x) = \frac{2\,Tan\,x}{1-Tan^2 x}$

Ejemplos

1. Evaluar $Cos(120°)$

Solución

Empleando la fórmula del ángulo doble para coseno obtenemos:

$Cos(120°) = Cos(2(60°)$

$= Cos^2(60°) - Sen^2(60°)$	Fórmula de ángulo doble
$= [Cos\ 60°]^2 - [Sen\ 60°]^2$	Términos equivalentes
$= (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$	Valores trigonométricos
$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$	Simplificando.
$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$	

Por lo tanto $Cos\,(120^o) = -\frac{1}{2}$

2. Evaluar: $Sen(120°)$

Solución: aplicando la fórmula del ángulo doble para el seno,

$Sen(120°) = Sen(2(60°)$

$= 2Sen(60°)\cdot Cos(60°)$	Fórmula del ángulo doble para seno
$= 2(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2})$	Valores trigonométricos
$= \frac{\sqrt{3}}{2}$	Simplificando.

Por lo tanto: $Sen\,(120^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Evaluar $Sen(90°)$

Solución.

$Sen(90°) = Sen(2(45°))$

$= 2Sen\ 45°Cos45°$ Fórmula del ángulo doble

$= 2\,(\frac{\sqrt{2}}{2})\ (\frac{\sqrt{2}}{2})$ Valores trigonométricos

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{4}}{2}$ Simplificando.

$= 1$

Por lo tanto: $Sen(90°) = 1$

4. Expresar $Sen(3x)$, en términos de $Sen(x)$

Solución

Como: $(3x) = Sen(2x+x)$

En primer lugar utilizamos la fórmula de la suma para el seno y posteriormente las fórmulas para el ángulo doble. Como sigue:

$$
\begin{aligned}
Sen\,(3x) &= Sen\,(2x + x) \\
&= Sen\,(2x)\,cos\,x + Cos\,(2x)\,Sen\,x \\
&= 2\,Sen\,x\,Cos\,x\,Cos\,x + (Cos^2x - Sen^2x)\,Sen\,x \\
&= 2\,Sen\,x\,Cos^2x + Cos^2x\,Sen\,x - Sen^3x \\
&= 3\,Cos^2x\,Sen\,x - Sen^3x \\
&= 3\,(1 - Sen^2x)\,Sen\,x - Sen^3x \\
&= 3\,Sen\,x - 4\,Sen^3x
\end{aligned}
$$

Pueden obtenerse otras dos fórmulas alternas para el coseno del ángulo doble teniendo en cuenta que en $Cos(2x) = Cos^2x - Sen^2x$ se sustituye Cos^2x por $(1 - Sen^2x)$ y Sen^2x por $(1 - Cos^2x)$.

Por ejemplo: $Cos(2x)$

$$\begin{aligned} Cos\,(2x) &= Cos^2x - Sen^2x \\ &= (1 - Sen^2x) - Sen^2x \\ &= 1 - 2\,Sen^2x \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Cos\,(2x) = 1 - 2\,Sen^2x$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} Cos\,(2x) &= Cos^2x - Sen^2x \\ &= Cos^2x - (1 - Cos^2x) \\ &= 2\,Cos^2x - 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $Cos\,(2x) = 2\,Cos^2x - 1$

Ejemplo

Exprese $Cos(4x)$ en términos de $Cosx$.

Solución

$$\begin{aligned} Cos\,(4x) &= Cos[2(2x)] \\ &= 2\,Cos^2(2x) - 1 \\ &= 2\,(2\,Cos^2x - 1)^2 - 1 \\ &= 8\,Cos^4x - 8\,Cos^2x + 1 \end{aligned}$$

Fórmulas del ángulo medio

Cada una de las identidades siguientes reciben el nombre de fórmula de ángulo medio:

$$Sen^2x = \frac{1 - Cos\,2x}{2}$$

$$Cos^2x = \frac{1 + Cos\,2x}{2}$$

$$Tan^2x = \frac{1 - Cos\,2x}{1 + Cos\,2x}$$

La primera identidad se puede verificar de la siguiente manera:

$Cos\,2x = 1 - 2\,Sen^2x$ Fórmula de ángulo doble

$2\,Sen^2x = 1 - Cos\,2x$ Despejando Sen^2x, y dividiendo por 2

$Sen^2x = \frac{1 - Cos\,2x}{2}$

La segunda identidad se verifica de manera similar con $Cos(2x) = 2Cos^2x - 1$

Para la tercera identidad tenemos que:

$Tan^2x = \frac{Sen^2x}{Cos^2x}$ Definición de *tangente*

$= \frac{\frac{1 - Cos2x}{2}}{\frac{1 + Cos2x}{2}}$ Fórmula del ángulo doble para *seno* y *coseno*

$= \frac{1 - Cos2x}{1 + Cos2x}$ Simplificando.

En las identidades del ángulo medio, si se sustituye $x = \frac{u}{2}$, obtenemos las siguientes fórmulas, llamadas **identidades del ángulo medio**.

Identidades del ángulo medio

$$Sen\left(\frac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-Cos\,u}{2}}$$

$$Cos\left(\frac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+Cos\,u}{2}}$$

$$Tan\left(\frac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-Cos\,u}{1+Cos\,u}}$$

Ejemplo

Utilizando la fórmula $i)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} Sen(22.5°) &= Sen\left(\tfrac{1}{2}\,(45^o)\right) \\ &= \pm\sqrt{\frac{1-Cos\,45^o}{2}} \\ &= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \\ &= \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \\ &= \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

Identidades alternas para la tangente del ángulo medio:

$$Tan\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1-Cos\,u}{Sen\,u}$$

$$Tan\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{Sen\,u}{1+Cos\,u}$$

Ejemplo

Encontrar el valor exacto de: $Tan(22.5°)$

Solución: utilizando la identidad $i)$

$$\begin{aligned} Tan(22.5°) &= Tan\left[\tfrac{1}{2}\,(45^o)\right] \\ &= \frac{1-Cos\,45^o}{Sen\,45^o} \end{aligned}$$

$$= \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

Por lo tanto $Tan(\,22.5^{o}) = \sqrt{2} - 1$

Fórmulas de producto y de suma

A continuación presentamos las identidades trigonométricas llamadas fórmulas de producto y de sumas, las cuales se utilizan para expresar ciertos productos de los cosenos y senos como sumas de senos y cosenos y viceversa.

Productos de senos y cosenos

$$i)\ Sen\,x\ Cos\,y = \tfrac{1}{2}\,[Sen\,(x+y) + Sen\,(x-y)]$$

$$ii)\ Cos\ x.Sen\,y = \tfrac{1}{2}[Sen\,(x+y) - Sen\,(x-y)]$$

$$iii)\ Cos\ x.Cos\ y = \tfrac{1}{2}[Cos\,(x+y) + Cos\ (x-y)]$$

$$iv)\ Sen\,x\ \ Sen\,y = -\tfrac{1}{2}\,[Cos\ (x+y) - Cos\,(x-y)]$$

Ahora vamos a demostrar algunas identidades de producto y suma:

Demostración de i)

Puesto que: $Sen\,(x+y) + Sen\,(x-y)$

$$= Sen\,x\ Cos\,y + Sen\,y\ Cos\,x + Sen\,x\ Cos\,y - Sen\,y\ Cos\,x$$

$$= 2\ Sen\,x\ \ Cos\,y$$

por lo tanto, $Sen\,x\ Cos\,y = \tfrac{1}{2}[Sen\,(x+y) + Sen\,(x-y)]$

Demostración de iii)

Puesto que $Cos\,(x+y)+Cos\,(x-y)$

$$= Cos\,x\;Cos\,y\; - Sen\,x\;Sen\,y\; + Cos\,x.Cos\,y + Sen\,x.Sen\,y$$

$$= 2\;Cos\,x\;Cos\,y$$

Por lo tanto, $Cos\,x\;\cdot\;Cos\,y\;=\;\frac{1}{2}\,[\;Cos\,(x+y)\;+\;Cos\;\;(x-y)]$

Las otras dos demostraciones se dejan al lector.

Ejemplos

1. Expresar como suma o diferencia $Sen\;40°\;Cos30°$

Solución

Utilizando la identidad (i), tenemos lo siguiente:

$$Sen\,40^o\;\;Cos\,30^o\;\;=\;\frac{1}{2}[\;Sen\,(40^o+30^o)+\;Sen\,(40^o-30^o)]$$

$$=\;\frac{1}{2}\;[Sen\,(70^o)+Sen\,(10^o)]$$

2. Demostrar que, $Sen\,45^o\;\;Cos\,15^o=\frac{1}{4}\;(\sqrt{3}+1)$

Solución

Utilizando la identidad (i), de producto de senos y cosenos:

$$Sen\,45^o\;Cos\,15^o=\;\frac{1}{2}[\;Sen\,(45^o+15^o)+\;Sen\,(45^o-15^o)]$$

$$=\frac{1}{2}\;[Sen\,60^o+Sen\,30^o]$$

$$=\;\frac{1}{2}[\;\frac{\sqrt{3}}{2}\;+\;\frac{1}{2}]$$

$$=\frac{1}{4}\;[\sqrt{3}+1]$$

Identidades suma y diferencia de senos y cosenos

$$i)\quad Sen\,A + Sen\,B = 2\,Sen\left(\frac{A+B}{2}\right).\,Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$ii)\quad Sen\,A - Sen\,B = 2\,Cos\left(\frac{A+B}{2}\right).Sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$iii)\quad Cos\,A + Cos\,B = 2\,Cos\left(\frac{A+B}{2}\right).Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$iv)\quad Cos\,A - Cos\,B = -2\,Sen\left(\frac{A+B}{2}\right).\,Sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Ejemplos

1. Demostrar que $Sen\,105^o + Sen\,15^o = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Solución: Utilizando la identidad $i)$,

$$\begin{aligned} Sen\ 105^o + Sen\ 15^o &= 2\,Sen\left(\frac{105^o+15^o}{2}\right).\,Cos\left(\frac{105-15^o}{2}\right) \\ &= 2\,Sen\left(\frac{120^o}{2}\right).\,Cos\left(\frac{90^o}{2}\right) \\ &= 2\,Sen\,(60^o).\,Cos\,(45^o) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

2. Demostrar que: $\frac{Sen\,(4A)+Sen\,(2A)}{Cos\,(4A)+Cos\,(2A)} = Tan\,(3A)$

Solución

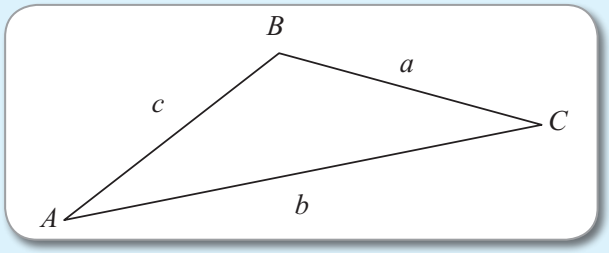
Sea $\frac{Sen\,(4A)+Sen\,(2A)}{Cos\,(4A)+Cos\,(2A)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\,Sen\left(\frac{4A+2A}{2}\right)Cos\left(\frac{4A-2A}{2}\right)}{2\,Cos\left(\frac{4A+2A}{2}\right)Cos\left(\frac{4A-2A}{2}\right)} \\ &= \frac{Sen\,(3A)}{Cos\,(3A)} \\ &= Tan\,(3A) \end{aligned}$$

Ley del seno y del coseno

Anteriormente, definimos funciones trigonométricas para triángulos rectángulos, ahora particularmente nos interesa resolver triángulos no rectángulos.

Triángulo oblicuo
Es aquel en donde ningún ángulo es recto, es decir puede existir la posibilidad que tres de sus ángulos sean agudos, o dos de sus ángulos sean agudos y el tercero sea obtuso.



Para resolver este tipo de triángulos se necesita aplicar dos métodos:

- Ley del seno
- Ley del coseno

Ley de los senos

Si *ABC* es un triángulo oblicuo, con lados de longitudes a, b, c y ángulos opuestos *A*, *B*, *C*, entonces:

$$\frac{Sen\,A}{a} = \frac{Sen\,B}{b} = \frac{Sen\,C}{c}$$

Si observa esta ley, la podemos escribir en tres fórmulas diferentes:

$$i)\ \frac{Sen\,A}{a} = \frac{Sen\,B}{b}$$
$$ii)\ \frac{Sen\,B}{b} = \frac{Sen\,C}{c}$$
$$iii)\ \frac{Sen\,A}{a} = \frac{Sen\,C}{c}$$

Esto significa que para aplicar algunas de estas fórmulas es necesario conocer tres de cuatro variables. Por lo tanto, para resolver problemas se necesita tener en cuenta los siguientes casos:

En primer lugar denominemos a:

L : Lado conocido

A : Ángulo conocido

Casos

Caso 1: (LLA) se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Caso 2: (AAL) se conocen dos ángulos y un lado.

Ejemplos

1. Determine las partes restantes del triángulo si $a = 14.2$, $b = 15.3$ $B = 97°$

Solución

Significa que debemos encontrar el valor del tercer lado y la medida de los otros dos ángulos, como se muestra en la siguiente tabla:

LADO	ÁNGULO
$a = 14.2$	$A =$ ____
$b = 15.3$	$B = 97°$
$c =$ _____	$C =$ _____

Caso (LLA)

Utilizando la ley de los senos y de acuerdo con los elementos conocidos, tenemos lo siguiente:

$$\frac{Sen\,A}{a} = \frac{Sen\,B}{b}$$

$$\frac{Sen\,A}{14.2} = \frac{Sen\,97°}{15.3} \text{ reemplazando}$$

$$Sen\,A = \frac{(14.2)\ (\text{Sen}\,97°)}{15.3}$$

$$\approx 0{,}921186624$$

Por lo tanto, $A \approx Sen^{-1}(0{,}921186624)$

$$A \approx 67.10°$$

Como $A = 67.10°$ y $B\ 97°$ podemos encontrar el ángulo C así:

$$C = 180° - 97° - 67.10°$$

$$C = \approx 15.9°$$

Ahora ya estamos en condiciones de encontrar el otro lado del triángulo

Tomemos la ecuación:

$$\frac{Sen\,C}{\boldsymbol{c}} = \frac{Sen\,A}{a}$$

$$\frac{Sen\,15.9^{o}}{c} = \frac{Sen\,67.10^{o}}{14.2}$$

$$c = \frac{14.2\,(\text{Sen}\,15.9^{o})}{\text{Sen}\,(67.10^{o})}$$

$$c \approx 4{,}223$$

Ahora, completando la tabla con todos los elementos del triángulo tenemos:

LADO	ÁNGULO
$a = 14.2$	$A = 67.11$
$b = 15.3$	$B = 97°$
$c = 4.223$	$C = 15.9°$

2. Determine las partes restantes del triángulo si A = $19.4°$ $B = 85.3°$ $c = 22.1$

Solución

En este ejemplo estamos en el caso (AAL) dos ángulos conocidos y un lado conocido:

LADO	ÁNGULO
$a =$ _____	$A = 19.4°$
$b =$ _____	$B = 85.3°$
$c = 22.1$	$C = 15.9°$

Como la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo mide 180° tenemos que:

$A+B+C=180°$ por lo tanto:

$$C=180°-19.4°-85.3°$$

$$C=75.3°$$

Ahora aplicamos la ley de los senos para hallar los valores de la a y b, en primer lugar determinamos el valor de a.

$$\frac{Sen\,A}{a}=\frac{Sen\,C}{c}$$

$$\frac{Sen\,9.4^o}{a}=\frac{Sen\,75.3^o}{22.1}, \text{ remplazando}$$

$$a=\frac{22.1\,(Sen\,19.4^o)}{Sen\,(75.3^o)}$$

$$a\approx 7.589$$

Ahora utilizamos nuevamente la *ley de los senos*, para hallar el valor de b.

$$\frac{Sen\,B}{b}=\frac{Sen\,A}{a}$$

$$\frac{Sen\,85.3^o}{b}=\frac{Sen\,19.4^o}{7{,}589}, \text{ remplazando}$$

$$b=\frac{(7{,}589)\,(Sen\,85{,}3^o)}{Sen\,19.4^o}$$

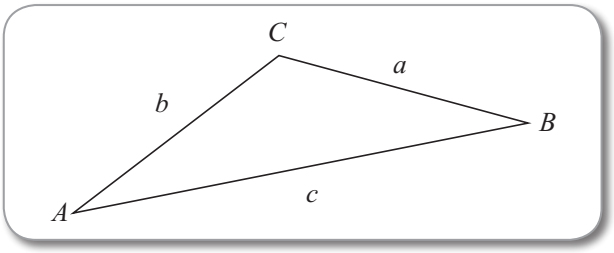
$$b\approx 22.77$$

Completando la tabla nos queda así:

LADO	ÁNGULO
$a=7{,}589$	$A=19.4°$
$b=22.77$	$B=85.3°$
$c=22.1$	$C=15.9°$

Ley de coseno

Si ABC es un triángulo con lados de longitudes a, b, c y ángulos opuestos A, B, C, entonces por la ley de cosenos se cumple que:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,Cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,Cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,Cos C$$

Los casos que conducen a resolver el triángulo con esta ley son:

Caso 3 (LAL) se conocen las medidas de dos lados y un ángulo entre ellos.

Caso 4 (LLL) se conocen las medidas de los tres lados.

Ejemplo

1. Determine las partes restantes del triángulo si:

$a = 9.3$, $b = 16.3$ $C = 42.3°$

Solución

Este tipo de problema es el caso (**LAL**). Debido a que conocemos la medida del ángulo C, la tabla de datos es:

LADO	ÁNGULO
$a = 9.3$	$A =$
$b = 16.3$	$B =$
$c =$	$C = 42.3°$

Debido a que conocemos el ángulo C, aplicamos la ley del coseno para conocer el lado c.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2ab\,Cos\mathrm{C} \\ &= (9.3)^2+(16.3)^2-2(9.3)(16.3)\,Cos(42.3) \\ &= 86.49+265.69-(303.18)(0.7396) \\ &= 352.18-224.24135 \\ &= 127.93 \end{aligned}$$

En consecuencia: $c = 11.3106$.

Ahora para conocer los ángulos A y B existe una forma alternativa del teorema del coseno que inclusive sirve también para resolver problemas (**LLL**) en donde se conocen los tres lados del triángulo oblicuo para conocer sus angulos A, B y C.

Versión alternativa

Si ABC es un triángulo oblicuo con lados de longitudes a, b y c, y ángulos opuestos A, B, C, entonces la ley de los cosenos cumple lo siguiente:

$$Cos\,A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$Cos\,B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,ac}$$

$$Cos\,C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Ejemplo

Si $a = 9.3$

$b = 16.3$

$c = 11.3106$

Encuentra la medida de los tres ángulos.

Solución

Aplicando la ley del coseno para encontrar la medida del ángulo B.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,Cos B$$

$$Cos\,B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \text{ luego,}$$

$$Cos\,B = \frac{(9.3)^2+(11.31)^2-(16.3)^2}{2\,(9.3)\,(11.31)}$$

$$= -\,0.243813$$

Por lo tanto: $B = 104.11°$

Debido a que este ejemplo es la continuación del ejemplo anterior, el ángulo $C = 42.3$ entonces el ángulo A es:

$$A = 180° - 42{,}3° - 104.11°$$

$$= 33.59°$$

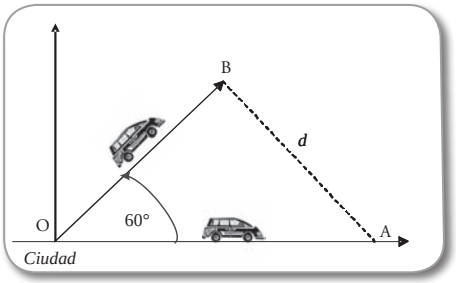
Ahora completando la tabla de datos nos queda así:

LADO	ÁNGULO
$a = 9.3$	$A = 33.59°$
$b = 16.3$	$B = 104.11°$
$c = 11.3106$	$C = 42.3°$

Aplicaciones

Dos automóviles salen de una ciudad al tiempo y circulan en carreteras rectas que difieren a 60° en dirección. Si viajan a 60 y 45 Km. por hora, respectivamente ¿A qué distancia aproximada se hallarán al cabo de las 10 horas?

Solución



En primer lugar calculamos la distancia $\overline{OA}$ y la distancia $\overline{OB}$.

$\overline{OA}$ = Velocidad x tiempo
$= 60km/h \times 10h = 600\ kms.$

$\overline{OB}$ Velocidad x tiempo $45km/h = \times\ 10h = 450\ kms.$

Ahora utilizando el teorema del coseno tenemos:

$$\overline{AB^2} = \overline{OA^2} + \overline{OB^2} - 2\left[\overline{(OA)}\ \overline{(OB)}\right] Cos\, 60^o$$

$$= (600)^2 + (450)^2 - 2\,(600)\,(450)\,Cos\, 60^o$$

$$= 360.000 + 202.500 - 540.000\ (0.5)$$

$$= 292.500$$

Por lo tanto la distancia AB es:

$$AB = \sqrt{292.500}$$

$$AB = 171026\ kms.$$

Es decir que al cabo de las 10 horas los automóviles están distanciados $171.026\ kms.$

Funciones trigonométricas inversas

Tomemos la ecuación $x = Seny$, define un único valor de x para cada ángulo y, puede suceder que para algunos valores de x esta ecuación no tenga solución o tenga muchas soluciones, por ejemplo, si $x = 3$ no existe solución porque el seno de un ángulo no puede ser mayor que 1; si $x = 0.5$ la ecuación tiene muchas soluciones como:

$y = 30°, 150°, 510°, -210°, -330°$

Ahora, el problema trata de expresar la variable y en función de x, en este caso, se dice que "y es el ángulo cuyo seno es x" haciendo uso de la abreviatura "arc".

Para expresar esta situación se escribe:

$$y = arc\ Sen\ (x)$$

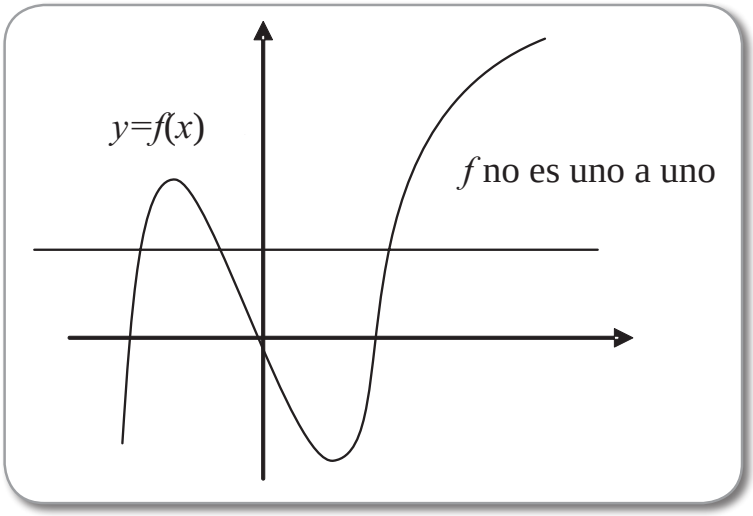
Lo mismo sucede para las otras funciones trigonométricas:

$$y = arc\ cos\ x \quad \text{si} \quad x = Cosy$$
$$y = arc\ sec\ x \quad \text{si} \quad x = Secy$$
$$y = arc\ tan\ x \quad \text{si} \quad x = Tany$$
$$y = arc\ cosc\ x \quad \text{si} \quad x = Coscy$$
$$y = arc\ cot\ x \quad \text{si} \quad x = Cotgy$$

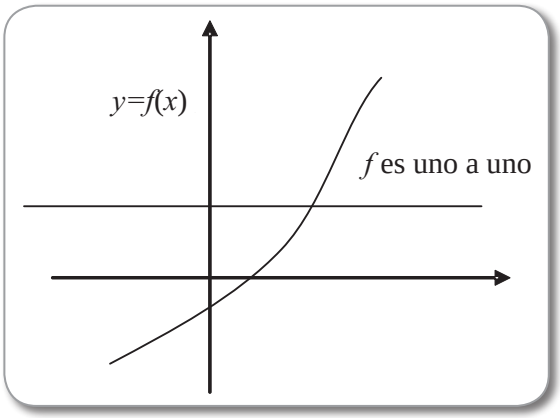
Algunos textos hacen uso de la notación $y= sen^{-1}(x)$, $y = cos^{-1}(x)$ etc... para leer seno inverso de x, coseno inverso de x, etc. ... pero no es muy usual porque $sen^{-1}(x)$, puede confundirse con, $\frac{1}{Senx}$, que son dos expresiones diferentes.

Gráficas de funciones trigonométricas inversas

Recordemos que para definir una función inversa f^{-1} de una función f, es necesario que la función f sea uno a uno, esto es, si $a \neq b$, gráficamente significa que al trazar una recta paralela al eje x, solo debe cortar a la función f una sola vez, por donde quiera que se trace.



La recta horizontal corta la gráfica en tres partes luego no es uno a uno.

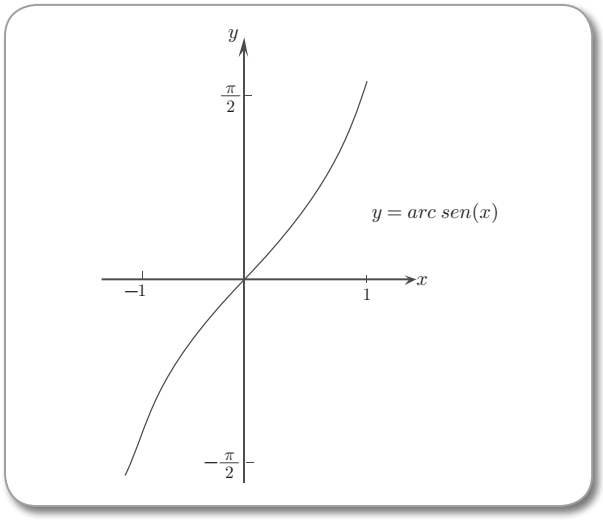


Las rectas paralelas a x cortan a la gráfica una sola vez, luego f es uno a uno.

Arc seno

Para el caso de la función seno tenemos que restringir el dominio al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ para que sea uno a uno y así garantizar la existencia de la función inversa $arcsen(x)$.

Definición: la función $arc\ seno$ o *seno* inverso se define como:
$y = arcsen(x)$ si solo si: $x = Sen\ (y)$ donde $-\frac{\pi}{2}, \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ y $-1 \leq x \leq 1$



Observe que el dominio de la función seno inversa es $[-1, 1]$ y el recorrido es: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Ejemplo

i) $y = Arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$ entonces, $Sen\ y = \frac{1}{2}$ y, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ por lo tanto, $y = \frac{\pi}{6}$

ii) $y = Arcsen\left(1\right)$ entonces, $Sen\ y = 1$ y, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ entonces, $y = \frac{\pi}{2}$

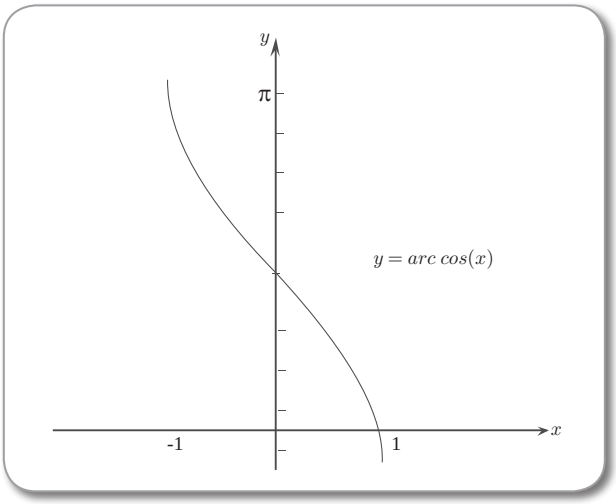
Nota: hay que tener cuidado al elegir el valor de y, es decir que garantice que permanezca en intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de la función *arcseno*.

Por ejemplo, aun cuando $Sen\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ el número $y = \frac{11\pi}{6}$ no es el valor de la función *Arcsen* $\left(-\frac{1}{2}\right)$

Arc coseno

Para que la función coseno resulte ser uno a uno tenemos que restringir el dominio al intervalo $[0,\pi]$.

Definición: la función $arc\ coseno$ o coseno inverso se define como: $y = arc\ cos(x)$ si solo si $x = cos(y)$ donde $0 \leq y \leq \pi$ y $-1 \leq x \leq 1$



Observe que el dominio de la función $arc\ coseno$ es el intervalo $\left[-1,1\right]$ y el recorrido es el intervalo $\left[0,\pi\right]$,

Ejemplo

$i)$ $y = Arc\,cos\left(\frac{1}{2}\right)$ entonces $Cos\ y = \frac{1}{2}$ y $0 \leq y \leq \pi$ por lo tanto, $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)$.

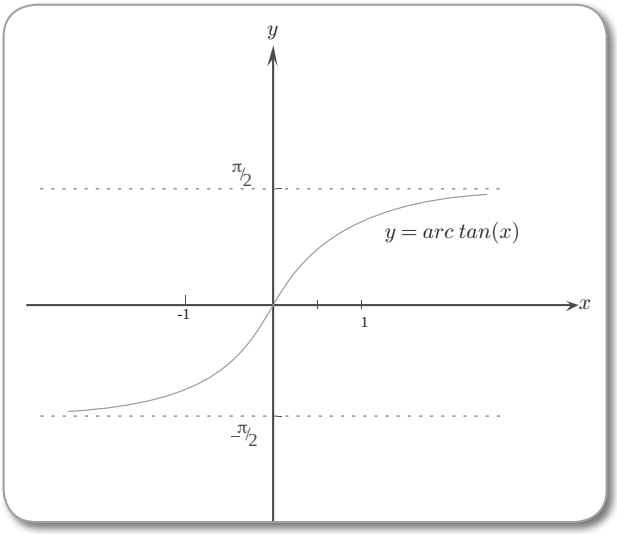
$ii)$ $y = Arc\,cos(1)$, entonces $Cos\ y = 1$ y, $0 \leq y \leq \pi$ por tanto, $y = 0$

Arc tangente

Para que la función $Tan(x)$ sea uno a uno, hay que restringir el dominio al intervalo abierto $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, y así garantizar la existencia de la función *arctangente*.

Definición: la función *arcotangente* o tangente inversa se define por: $y = Arc\,cotan\ x$ si solo si $x = Tany$ donde $-\frac{\pi}{2} < y\ \frac{\pi}{2}\ \ y, -\infty < x < \infty$

Aquí se observa que el dominio de la función arctangente es $(-\infty, \infty)$ y el recorrido $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



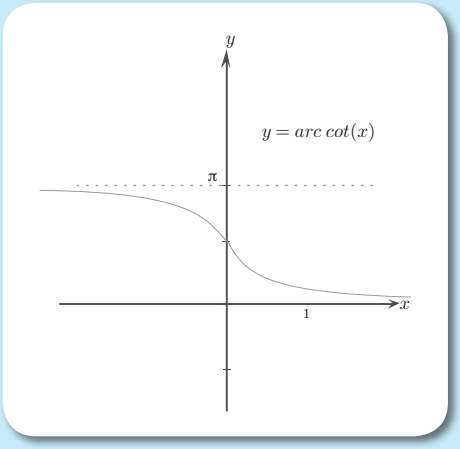
Ejemplo

Si $y = Arc\,cotan\ (1)$, entonces $Tan\ y = 1$ y, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ de esta manera, $y = \frac{\pi}{4}$.

Ahora vamos a presentar un resumen de las funciones: $Arc\ cotx$, $Arc\ secx$, $Arc\ cosecx$,

Arc cotangente

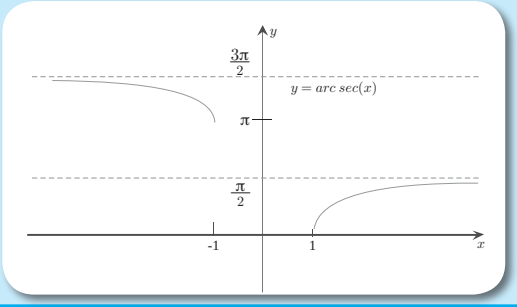
La función $arc\ cotangente$ o $cotangente$ inversa se define por $y = Arccotan$ donde $-\infty<x<\infty$ $0 < y < \pi$.



Dominio $(-\infty,\infty)$, Recorrido $(0,\pi)$

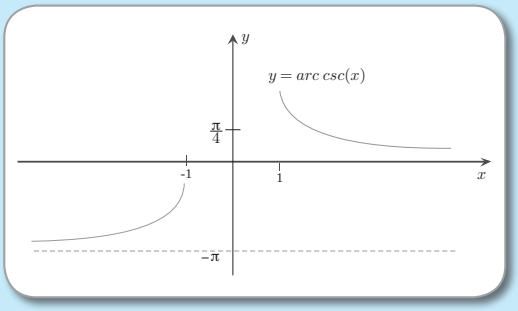
Arc secante

La función $arc\ secante$ o $secante$ inversa se define por $y = Arccotan$ donde $-\infty<x<\infty$ $0 < y < \pi$.



Dominio $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ Recorrido $[0,{}^{\pi}/_{2}) \cup [\pi,{}^{3\pi}/_{2})$

Arc cosecante



Dominio $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ Recorrido $(-\pi, -\pi/2]\cup(0,\pi/2]$

Ecuaciones trigonométricas

Las ecuaciones que contienen funciones trigonométricas de ángulos desconocidos tienen dos formas de presentación:

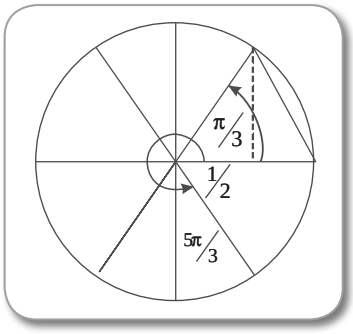
Identidad. Cuando son válidas para todos los valores de los ángulos desconocidos.

Ejemplo

$Cos^2x+Sen^2x = 1$, para cualquier ángulo x es verdadera esta igualdad.

Ecuaciones. Son válidas únicamente para determinados valores de ángulos desconocidos.

Ejemplo



$Cos\,x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

El ángulo de referencia es $\frac{\pi}{3}$, es decir los únicos ángulos donde el coseno es igual a $\frac{1}{2}$.

Son $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

Además, como la función coseno tiene período $2k\pi$, todas las soluciones se puede obtener sumando múltiplos de 2π a $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ por lo tanto la solución nos da:

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi$ para $k\varepsilon Z$, y

$x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ para $k\varepsilon Z$,

Nota: para resolver ecuaciones trigonométricas no existe un método, a pesar de esto se pueden tener en cuenta algunas apreciaciones que nos sirven por ejemplo:

a) Una ecuación puede descomponerse en factores.

Ejemplos

1. Halle la solución de $Tan^2x+Tanx = 0$

Solución

Descomponemos en factores la ecuación:

$$Tan^2x+Tanx = 0$$

$$Tanx(Tanx+1) = 0$$

Entonces, $Tanx = 0$, ó, $Tanx=-1$

$i)$ Para $Tanx = 0$ las soluciones son:

$x = 0, \pm\,\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$...

Es decir $x=k\pi$ para $k\in Z$

$ii)$ Para $Tanx+1= 0$, equivalente a $Tanx=-1$

La solución es $x = \frac{\pm 3\pi}{4}, \frac{\pm 7\pi}{4}, \frac{\pm 11\,\pi}{4}, \frac{\pm 15\,\pi}{4}$ ...

Es decir la solución es:

$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\in Z$

2. Halle la solución de: $Sen^2x+Senx-2=0$

Solución: se descompone en factores la ecuación.

$$(Senx+2)(Senx-1)=0$$

donde, $Senx+2=0$ ó $Senx-1=0$

$i)$ Si $Senx+2=0$ entonces $Senx=2$. No existe solución porque, $-1\leq Senx\leq 1$

$ii)$ De $Senx-1=0$, $Senx=1$. La solución es $x=\frac{\pi}{2}$. Es decir $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ para $k\in Z$

b) Las diferentes funciones que contiene la ecuación se pueden expresar y unificar en una sola función.

Ejemplo

Halle la solución de: $3Cos^2x-Sen^2x=0$

Solución

Para expresar la ecuación en una sola función basta con sustituir a Sen^2x por $1-Cos^2x$, se obtiene lo siguiente:

$$3Cos^2x-Sen^2x=0$$

ó $$3Cos^2x-(1-Cos^2x)=0$$

$$4Cos^2x=1$$

$$Cos^2x=\frac{1}{4}$$

$$Cosx=\pm\frac{1}{2}$$

y las soluciones buscadas son $x=\pm\frac{\pi}{3},\pm\frac{2\pi}{3},\pm\frac{4\pi}{3},\pm\frac{5\pi}{3}$

c) Se eleva el cuadrado a ambos miembros de la ecuación

Ejemplo

Halle las soluciones de $Senx+Cosx-1=0$

Solución: ordenando la ecuación tenemos:

$$Senx= 1 -Cosx$$

Elevando al cuadrado dos lados la ecuación tenemos:

$$Sen^2x = 1 -2Cosx+Cos^2x$$

Ahora sustituya Sen^2x por $1-Cos^2x$ en la ecuación:

$$1-Cos^2x=1-2Cosx+Cos^2x$$

ó $$-2Cos^2x + 2Cos^2x=0$$

Factorizando tenemos:

$$2Cosx\ (Cosx-1)=0$$

Por lo tanto,

$$2Cosx=0 \quad \text{ó} \quad Cosx-1=0$$

$i)$ De $Cosx=0$, la solución es $x = \frac{\pi}{2}$

$ii)$ De $Cosx=1$, la solución es $x=0$

Nota: si tomamos $x= \frac{3\pi}{2}$ no es solución.
Porque: $Sen\,(\frac{3\pi}{2}) + Cos\,(\frac{3\pi}{2}) = -1+0 \neq 1$

Ejercicio 5.1

1) Dibuje el ángulo dado en posición normal.

   a) $-30°$ b) $120°$

   c) $510°$ d) $210°$

   e) $-60°$ f) $45°$

2) Exprese el ángulo dado en términos de grados, minutos y segundos.

   a) 7°. 12' b) 8°.24'

   c) 16°20' d) 75°. 30'

3) Convierta de grados a radianes.

   a) $60°$ b) $45°$

   c) $135°$ d) $120°$

   e) $-120°$ f) $-45°$

   f) $-270°$

4) Convierta de radianes a grados.

   a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{9}$

   c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{5\pi}{3}$

   e) $\frac{-\pi}{3}$ f) 15π

   g) $\frac{8\pi}{5}$ h) 5π

5) Localice los siguientes puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y encuentre el valor de la magnitud d, con respecto al origen, correspondiente a cada uno de ellos.

   a) (4,3) b) $(-6, -8)$

   c) $(8,-15)$ d) $(-2,4)$

   e) (1,1) f) $(-5, -2)$

   g) (1,2)

6) Encuentre el ángulo entre 0 y 2π radianes que es coterminal con el ángulo dado:

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $-\frac{11\pi}{2}$ c) $\frac{15\pi}{3}$

7) Encuentre el ángulo entre 0° y 360°, coterminal con el ángulo dado:

a) 60° b) $-45°$

c) 30°

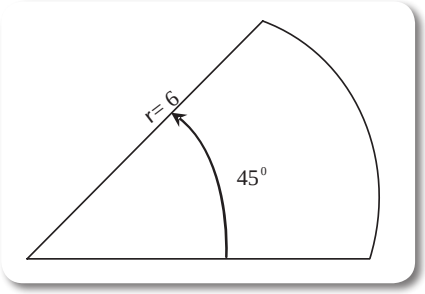
8) Una rueda gira 700 vueltas por hora. En un hora:

a) ¿Cuántos radianes gira la rueda?

b) ¿Cuántos grados gira la rueda?

9) a) Encuentre la longitud de arco del sector circular.

b) Halle el área del sector circular



10) Determine los valores de las funciones trigonométricas del ángulo θ

a) (3,4) b) $(-3,4)$

c) $(-1,-3)$

11) Encuentre los valores del $Cos\theta$, y $Tan\theta$ si $Sen\,\theta = \frac{8}{17}$ y θ pertenece al cuadrante I.

12) Encuentre los valores de $Sen\theta$ y $Cos\theta$ dado que $Tan\theta = \frac{3}{9}$

13) Encuentre los valores de $Sen\theta$ y $Cos\theta$ dado que $Tan\theta = \frac{3}{4}$

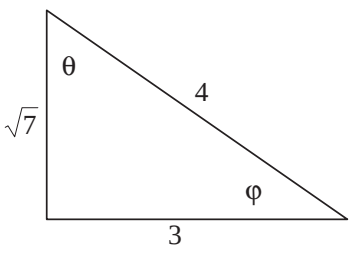
14) Encuentre los valores de las otras funciones trigonométricas. Dada la función:

a) $Sen\theta = \frac{3}{5}$ b) $Sec\theta = \frac{10}{6}$

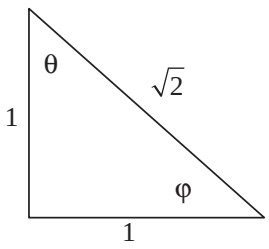
c) $Tan\theta = \frac{21}{20}$

15) Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas tanto para el ángulo, como el ángulo:

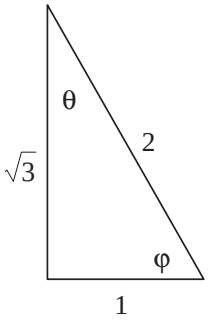
a)



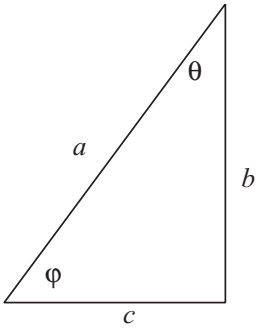
b)



c)



d)



16) Una persona está a 210 metros de la base de un árbol, observa que el ángulo entre el suelo y la parte superior del árbol es de 60°. ¿Cuál es la altura del árbol?

17) Un hombre recorre 500 mts a lo largo de un camino que tiene una inclinación de 20° respecto a la horizontal. ¿Qué altura alcanza respecto al punto de partida?

18) Encontrar el perímetro de un triángulo isósceles cuya base mide 40 cms. Si los ángulos de la base miden 70°.

19) Utilice las definiciones de funciones trigonométricas para verificar la identidad dada:

a) $Sec\theta = \frac{1}{Cos\theta}$ b) $Tan\theta = \frac{1}{Cot\theta}$

c) $Cosc\theta = \frac{1}{Sen\theta}$

20) Determine el valor de:

a) $Cos\frac{\pi}{2}Sen\frac{\pi}{4} - Cos\frac{\pi}{2}Sen\frac{\pi}{3}$

b) $Tan\frac{\pi}{4} - Sen\frac{\pi}{4}$

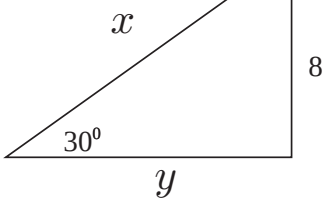
c) $Cos\frac{\pi}{2}Sen\frac{\pi}{2} - Cos\frac{\pi}{4}Sen\frac{\pi}{2}$

d) $Sen\frac{\pi}{3} \cdot Cos\frac{\pi}{4}$

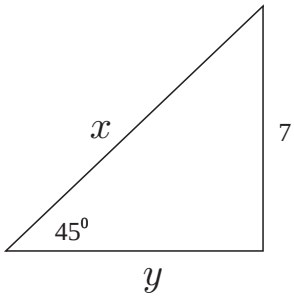
21) Encuentre las incógnitas que se le piden.

Cada ejercicio se refiere al triángulo que se muestra en la figura:

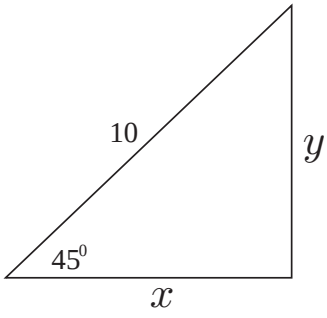
a)



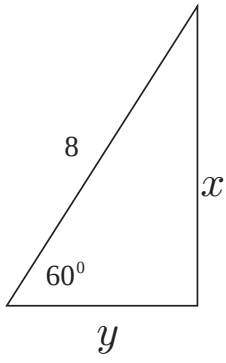
b)



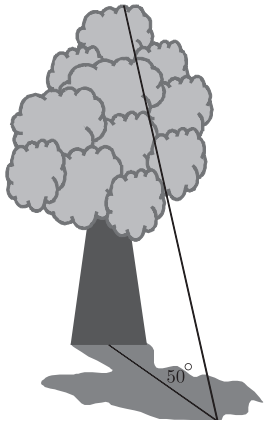
c)



d)

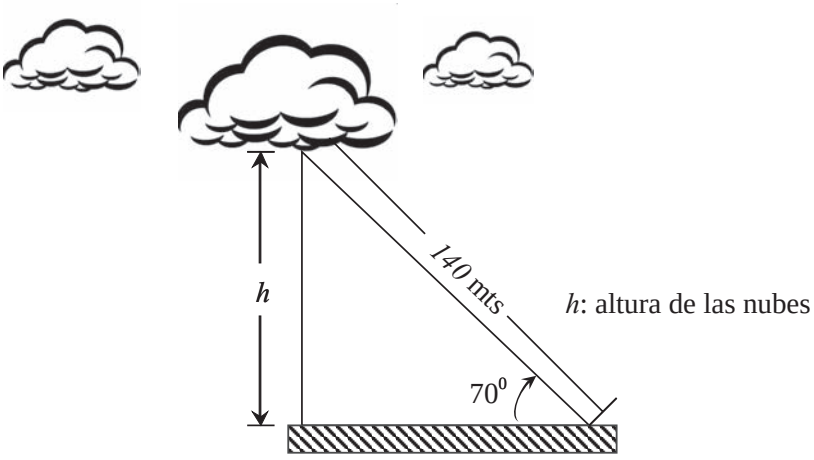


22) Un árbol proyecta una sombra de 19 mts. de largo. Si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto del árbol es de 50°, ¿cuál es la altura del árbol?

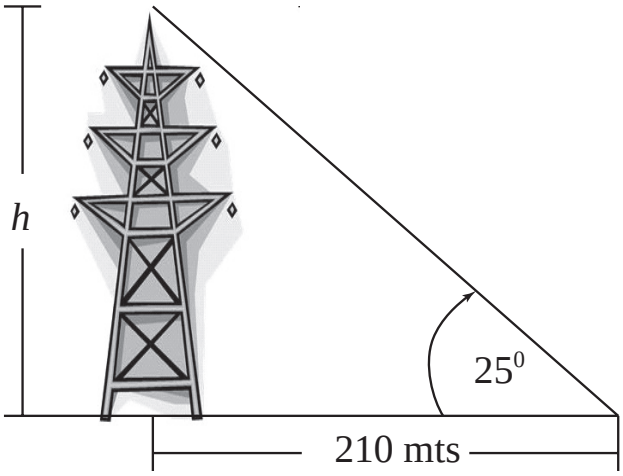


23) Un truco para medir la altura de las nubes durante la noche consiste en proyectar un haz de luz luminoso vertical que produce un lunar sobre ellas.

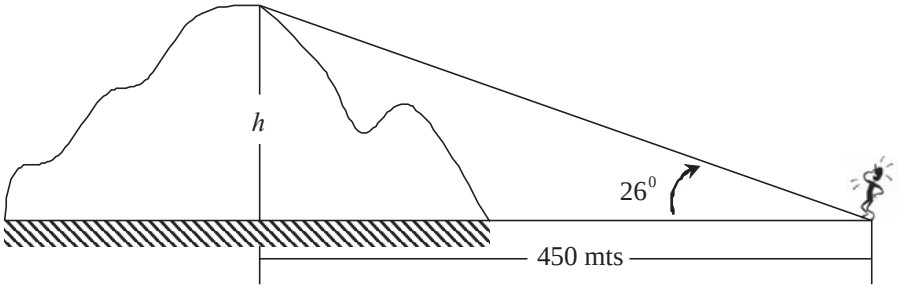
La marca se observa a 140 mts. de distancia. El ángulo de elevación es de 70°. Calcule la altura de las nubes.



24) Un observador se encuentra a 210 mts. de la base de una torre de TV. Observa que el ángulo de elevación a la punta de la torre es de 25°. ¿Cuál es la altura de torre?

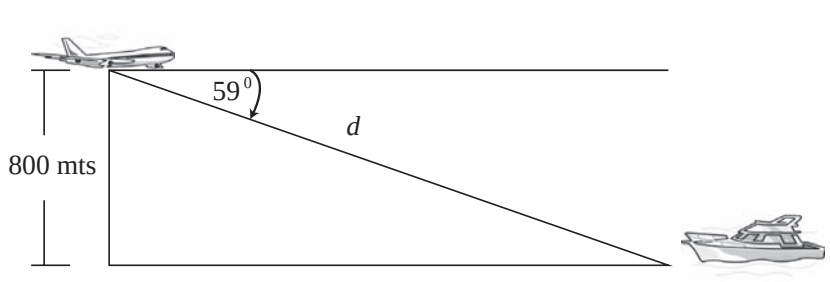


25) Un topógrafo utiliza un geodómetro para medir la distancia en línea recta desde un punto del suelo hasta un punto en la cima de la montaña. Utilice la información de la figura para determinar la altura de la montaña.

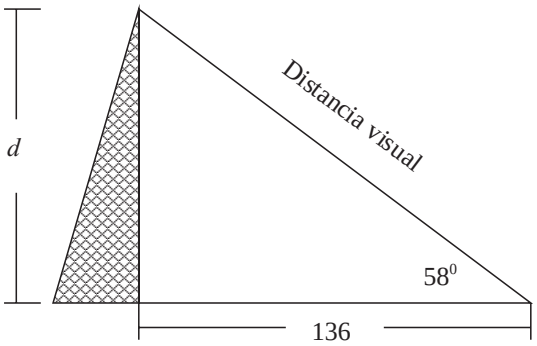


26) Desde la parte superior de un faro, el ángulo de depresión hacia la línea de flotación de un barco es 24°. Si el faro mide 220 pies de altura. ¿A qué distancia está el barco de la fase del faro?

27) Un avión está a una altitud de 800 mts. Cuando el copiloto observa un barco en peligro a un ángulo de depresión de 59°, ¿a qué distancia está el barco del avión?



28) Halle la altura de la antena:



29) En un circuito de CA con inductancia X_L y la resistencia R, el ángulo fase puede determinarse a partir de la ecuación: $Tan\theta = \frac{X_L}{R}$. Si $X_L = \sqrt{2\Omega}$ y $R = 2\Omega$ ¿Cuál es el ángulo fase?

30) Complete la siguiente tabla:

Grados	Radianes	$Sen\theta$	$Cos\theta$	$Tan\theta$
0°				
30°				
45°				
60°				
180°				
225°				
135°				
120°				

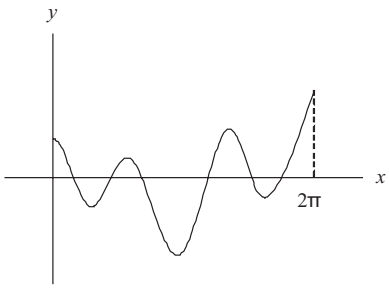
31) Calcular el valor exacto en la expresión:

a) $Sen\ (-90°)$ b) $Tan\ (-45°)$ c) $Tan\ (-\pi)$ d) $Cos(-7\ )$

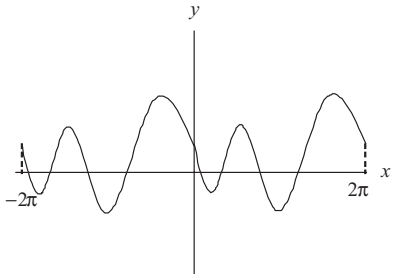
e) $Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ f) $Sen\ (-120°)$ g) $Sec\ (-450)$

32) ¿Cuál de las siguientes funciones son periódicas?

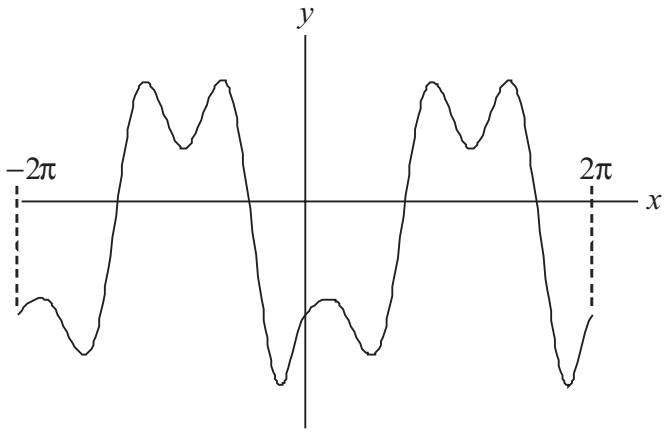
a)



b)



33) ¿Cuál es el período de la siguiente función?



34) Represente gráficamente la función *seno* entre -2π y 2π.

35) Represente gráficamente la función *coseno* entre $-\pi\ a\ \pi$.

36) Represente gráficamente la función *secante* entre -2π y 2π.

37) Represente gráficamente la función cosecante entre -2π y 2π.

38) a) Trace la gráfica $y = Senx$.

b) Haciendo una reflexión de la gráfica en a), trace una gráfica de $y = Sen(-x)$.

c) Trace la gráfica $y = -Senx$.

d) Compara las gráficas b y c. ¿Qué concluye?

39) Describa cuál es la relación entre las gráficas *tangente* y *cotangente*.

40) Represente la gráfica $y = |Cosx|$

41) Represente la gráfica $y = |Senx|$

42) Represente la gráfica $y = |Tanx|$

43) Dibuje las siguientes gráficas:

a) $y = 2 + Cosx$

b) $y = Senx - 2$

c) $y = Secx - 2$

d) $y = Cotx - 1$

44) Dibuje las siguientes gráficas, calculando la amplitud y el período:

a) $y = 4\ Senx$

b) $y = Cos(3x)$

c) $y = 3\ Sen\ \frac{1}{2}\ x$

d) $y = 2\ Sen\ (x + \frac{1}{2})$

45) Halle la amplitud, período y fase para:

a) $y = Sen\ (x + \frac{\pi}{2})$

b) $y = Cos\ (x + \frac{\pi}{4})$

c) $y = 3\ Cos\ (x + \frac{\pi}{6})$

46) Simplifique la expresión mediante las identidades fundamentales.

a) $\frac{Tan^2\ \theta + 1}{Sec\ \theta}$.

b) $Cosc^2\theta - Cot^2\theta$

c) $Cosc\theta \cdot Sen\theta$

47) Verifique la identidad:

a) $Sen\theta \cdot Sec\theta = Tan\theta$

b) $(1 - Sen^2 A)(1 + Tan^2 A)$

c) $\frac{Sen\,\theta}{Csc\,\theta} + \frac{Cos\,\theta}{Sec\,\theta} = 1$

d) $1 - \frac{Cos^2\theta}{1+Sen\,\theta} = Sen\,\theta$

e) $\frac{1 - Sen\,x}{Cos\,x} = \frac{Cos\,x}{1 + Sen\,x}$

f) $\frac{Sec^2 u - 1}{Sec^2 u} = Sen^2 u$

g) $Senx + Cosx \cdot Cotx = Cscx$

h) $Tan^2 x - Sen^2 x = Tan^2 x Sen^2 x$

i) $\frac{Cos\,x}{1 - Sen\,x} = Sec\,x + Tan\,x$

j) $\frac{1}{1 - Sen\,x} + \frac{1}{1 + Sen\,x} = 2\,Sec^2 x$

k) $(Sec\,x + Tan\,x)^2 = \frac{1 + Sen\,x}{1 - Sen\,x}$

l) $(Sen^2\theta + Cos^2\theta)^3 = 1$

m) $\frac{Tan\,x - Sen\,x}{Sen^3 x} = \frac{Sec\,x}{1 + Cos\,x}$

48) Reformule la expresión dada como expresión trigonométrica sin radicales, utilizando sustituciones indicadas.

a) $\sqrt{a^2 - x^2}$, $x = a\,Sen\,t, \quad \frac{-\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

b) $\sqrt{x^2 - a^2}$, $x = a\,rc\,sec\,t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$, $x = a\,Sec\,t. \quad \frac{-\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x}$, $x = \sqrt{3}\,Tan\,t, \quad \frac{-\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

e) $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $x = a\,Tan\theta, \quad \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

49) Demuestre que la ecuación no es identidad

a) $Cos\ (Sec\theta)=1$

b) $Sen\ (x-1)=Senx$

c) $Cot\ (Tan\theta)=1$

d) $Cos\ (-t)=-Cost$

e) $Sen\ (t+\pi) = Sent$

50) Haciendo uso de las fórmulas de suma y diferencia de dos ángulos, calcule:

a) $Cos\ (135°)$

b) $Sen\ (120°)$

c) $Cos\ (150°)$

d) $Tan\ (120°)$

e) $Cos\ (270°)$

f) $Sen\ (270°)$

g) $Sen\ (15°)$

h) $Cos\ (15°)$

i) $Tan\ (15°)$

51) Comprobar las siguientes identidades:

a) $Cos\ (\frac{\pi}{2} - x) = Sen\ x$

b) $Sen\ (\frac{\pi}{2} - x) = Cos\ x$

c) $Tan\ (\frac{\pi}{2} - x) = Cot\ x$

d) $Sec\ (\frac{\pi}{2} - x) = \text{Cosc}\ x$

e) $Cos\ (x - \pi) = -Cos\ x$

f) $Sen\ (x - \pi) = -Sen\ x$

g) $Sen\ (x - \frac{3\pi}{2}) = Cos\ x$

h) $Sen\,(x+\pi) = -\,Sen\,x$

i) $Sen\,(x+\frac{\pi}{2}) = Cos\,x$

j) $Cos\,(x+\pi) = -\,Cos\,x$

k) $\mathrm{Cos}\,(x+\frac{\pi}{2}) = -\,Sen\,x$

52) Halle los valores exactos de $Sen(2\theta)$, $Cos(2\theta)$ y $Tan(2\theta)$ para los valores dados:

a) $\theta = 60°$

b) $\theta = 45°$

c) $\theta = 30°$

53) Utilice las fórmulas de ángulo medio para determinar los valores exactos de:

a) $Sen(15°)$

b) $Cos(15°)$

c) $Tan(15°)$

d) $Cos(15°)$

54) Exprese como suma:

a) $Sen(4x)cos(3x)$

b) $Sen(3x)sen(x)$

c) $Cos(x)sen(2x)$

d) $Sen(ax)cos(bx)$

55) Exprese la suma como producto:

a) $Sen(4x)+Sen(3x)$

b) $Sen(6x)+Sen(2x)$

c) $Cos(x)+Cos(2x)$

d) $Sen(8t)-Sen(2t)$

56) Resolver los siguientes triángulos:

a)

LADO	ÁNGULO
$a = 10.5$	$A = 41°$
$b =$	$B =$
$c =$	$C =$

b)

LADO	ÁNGULO
$a = 32.4$	$A = 27°40'$
$b =$	$B = 52°10'$
$c =$	$C =$

c)

LADO	ÁNGULO
$a =$	$A = 42°10'$
$b = 19.7$	$B =$
$c =$	$C = 61°20'$

d)

LADO	ÁNGULO
$a =$	$A = 42°10'$
$b = 19.7$	$B =$
$c =$	$C = 61°20'$

e)

LADO	ÁNGULO
$a = 140$	$A =$
$b =$	$B =$
$c = 115$	$C = 81$

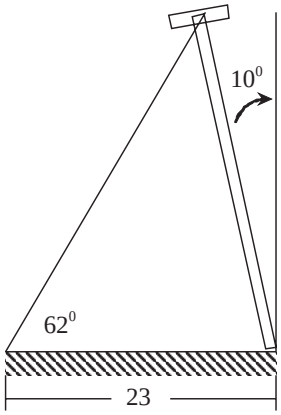
f)

LADO	ÁNGULO
$a = 131.08$	$A =$
$b =$	$B =$
$c = 97.84$	$C =47.7°$

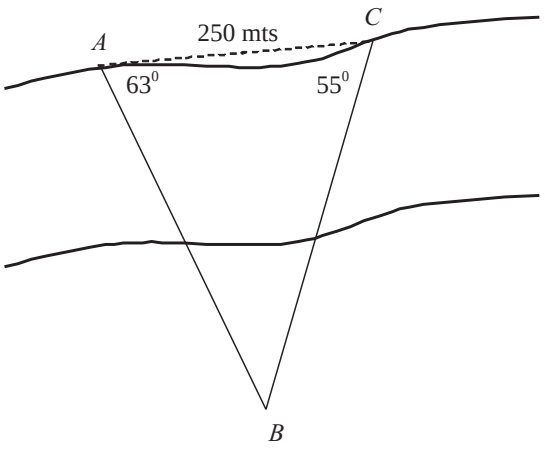
g)

LADO	ÁNGULO
$a = 21.3$	$A = 65°10'$
$b = 18.9$	$B =$
$c = 6$	$C =$

57) Cuando el ángulo de elevación del sol es 62° un poste de la luz inclinado 10° en dirección opuesta al sol, proyecta una sombra de 23 pies de longitud del suelo. Calcule la longitud del poste.



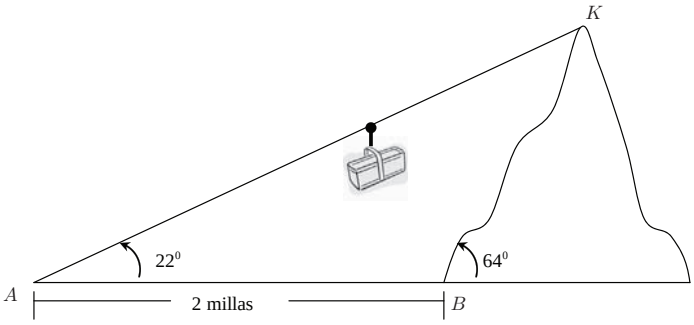
58) Para hallar la distancia entre los puntos A y B opuestos de un río, un topógrafo traza un segmento de la recta AC de 250 metros a lo largo del río. Determine que las medidas del $\angle BAC$ y $\angle ACB$ sean 63° y 55°, respectivamente. Calcule la distancia BC.



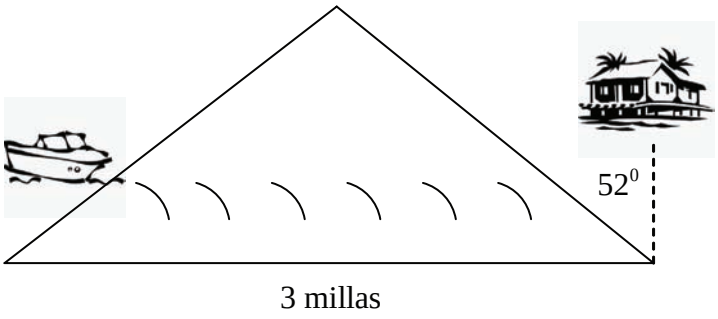
59) El Metrocable transporta pasajeros de un punto A que está a 2 millas del punto B, ubicado en el pie de una montaña hasta el punto K en la cima de la misma. Los ángulos de elevación de K desde A y B son 22 y 64, respectivamente.

a) Calcule la distancia entre A y K.

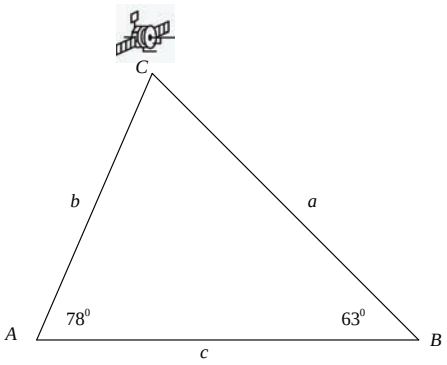
b) Calcule la altura de la montaña.



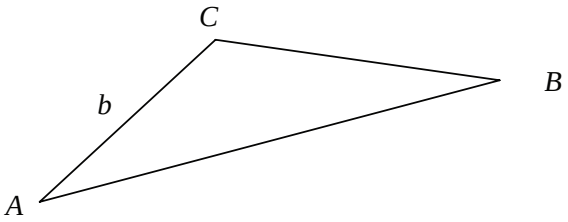
60) Una embarcación pequeña utiliza un equipo de sonar para detectar peces a 3 millas al este de la embarcación, la cual se mueve en una dirección N 52° O a razón de 8.5 millas por hora. Si la embarcación navega a 20 millas por hora calcule al Oeste, 1° más cercano y en qué dirección debe avanzar para interceptar al banco de peces.



61) Una satélite que orbita la tierra pasa directamente por dos observadores A y B distanciados 400 millas entre sí. En un instante, cuando el satélite está entre dichas estaciones, su ángulo de elevación de los observadores es 78° y 63° de A y B respectivamente. ¿Cuál es la distancia del satélite al observador A?

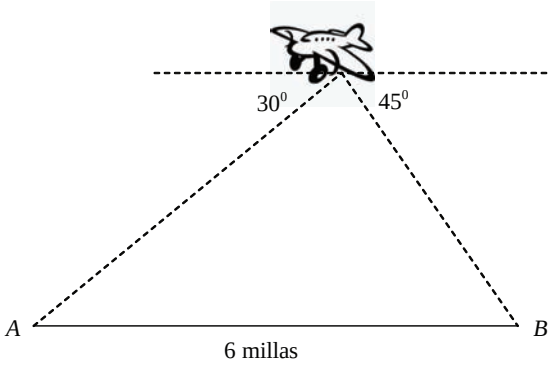


62) Demuestre que dados los tres ángulos A, B y C de un triángulo, y un lado por ejemplo V, el área del triángulo es:



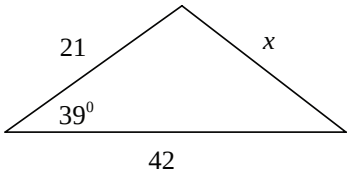
$$\text{Area} = \frac{b^2\, Sen\, B\, Sen\, C}{2\, Sen\, A}$$

63) Una avioneta vuela sobre una carretera recta, se determina que los ángulos de depresión hasta 2 observadores A y B distanciados 6 millas entre sí son 30° y 45°, respectivamente. Encuentre la distancia de la avioneta al punto A.

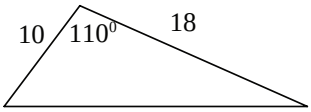


64) Resuelva los siguientes triángulos:

a)



b)



c)

LADO	ÁNGULO
$a = 3$	$A =$
$b = 4$	$B =$
$c =$	$C = 53$

d)

LADO	ÁNGULO
$a = 20$	$A =$
$b = 25$	$B =$
$c = 22$	$C =$

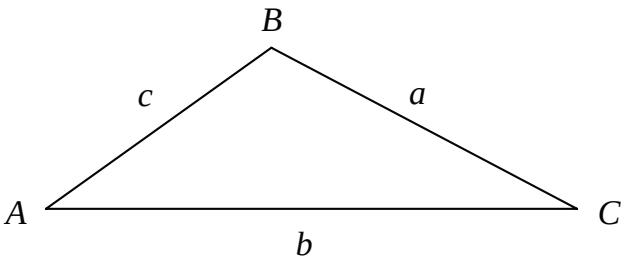
e)

LADO	ÁNGULO
$a =$	$A =$
$b = 125$	$B = 40°$
$c = 22$	$C =$

f)

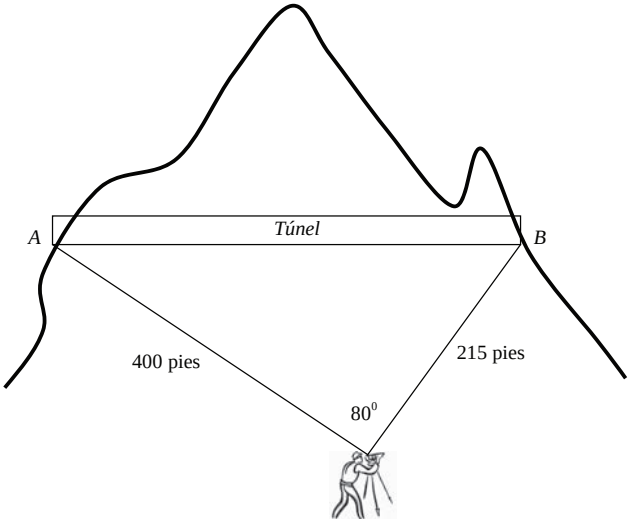
LADO	ÁNGULO
$a = 50$	$A = 55°$
$b = 65$	$B =$
$c =$	$C =$

65) Dado el triángulo $\triangle ABC$ que se ve en la siguiente figura.

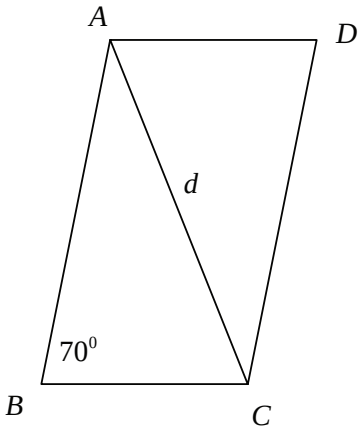


Si $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$, donde S es el semiperímetro del triángulo, demuestre que el área es : $A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ a la fórmula anterior se le llama fórmula de Heron.

66) Se quiere construir un túnel en una montaña. Para calcular su longitud un topógrafo hace mediciones mediante un teodolito. Utilice los datos del topógrafo para aproximar la longitud del túnel.

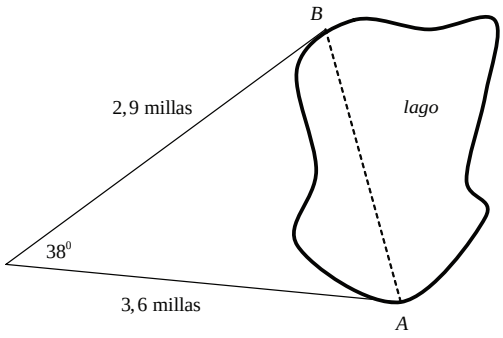


67) Un paralelogramo tiene lados de longitud 60 cm y 140 cm y uno de sus ángulos mide 70°. Calcular la longitud de la diagonal AC.

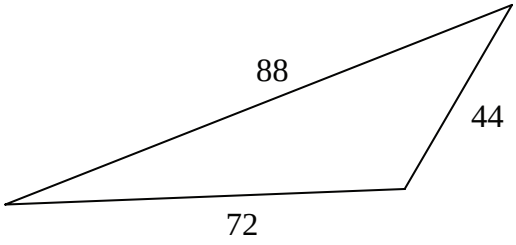


68) El ángulo de una esquina de un terreno triangular mide 75° y los lados que unen esa esquina miden 180 pies y 160 pies de largo. Calcule la longitud del tercer lado.

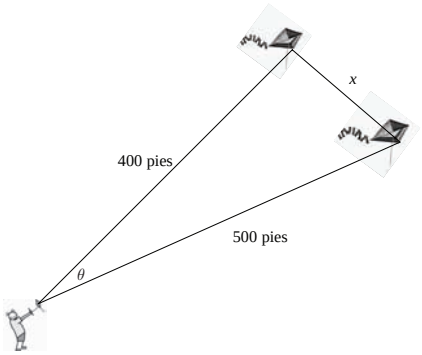
69) Se quiere hallar la distancia AB de un lago. Un topógrafo ha tomado las medidas mostradas en la figura, halle dicha distancia.



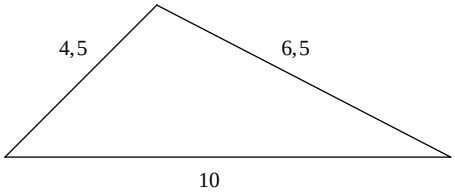
70) Un campo triangular tiene lados de longitud 44, 72 y 88 yardas. Encuentre el ángulo más pequeño.



71) Un niño vuela dos cometas al mismo tiempo, una cometa tiene 400 pies de cuerda, mientras que la otra tiene 500 pies. El ángulo de abertura de las dos cometas es de 35° ¿cuál es la distancia entre las cometas?



72) Observe la siguiente figura



a) Encuentre el ángulo opuesto al lado más pequeño.

b) Encuentre el área del triángulo.

73) Calcule todas las soluciones de las ecuaciones dadas:

a) $2Senx - 1 = 0$

b) $1 + Senx = 2\,Cos^2 x$

c) $Sen\,2x - Cos\,x = 0$

d) $Cos\,x + 1 = Sen\,x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

e) $3\,Sen\theta - 2 = 0$

f) $Sen\,5x + Sen\,x = 0$

g) $Cos\,x - Cos\,3x - Sen\,2x = 0$

h) $Cos\,2x + Cos\,x = 0$

i) $Sen\,\theta \;\; = \; - \; \frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $Tan\,x \; = \; -1$

k) $Cos\,2x \; = \; 0$

l) $Sen\theta \;\; .tan\theta \;\; = Sen\,\theta$

m) $2\,Sen^2t - \; Cos\,t - 1 = 0$

n) $4\,Sen^{\,2}x.tan\,x \; - \; tan\,x \; = \; 0$

o) $Cosc^4(2\,\theta) - 4 \; = 0$

p) $Cos^2x \; + \; Cos\,x \; - \; 2 = \; 0$

q) $2\,tan^2x \; + \; Sec^2x \; = \; 2$

r) $Cosx \; - \sqrt{3}\; Senx \; = \; 1$

s) $Cos\,(30 - x) \; = \; Cos\,x$

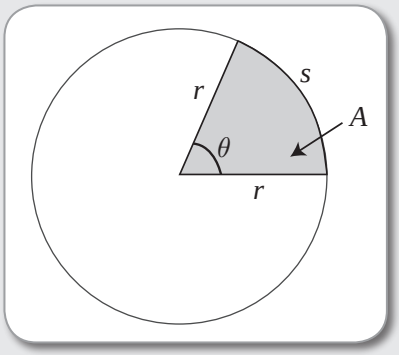
t) $(Tan\,x - 1)\,(Sen\,x \; + \; 1) \; = \; 0$

Resumen del capítulo 5

Medición de ángulos

π Radianes $=180°$
$1°=\frac{\pi}{180°}$ radianes 1 radián$=\frac{180°}{\pi}$

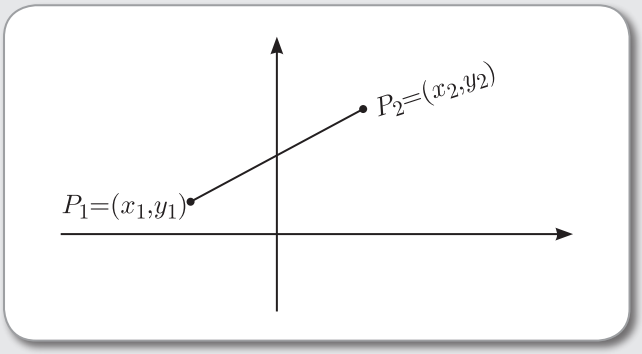
$s = r\theta$
$A = \frac{1}{2}r^2\theta$ (θ radianes)



Para convertir de grados a radianes, multiplique por $\frac{\pi}{180°}$.
Para convertir de radianes a grados, multiplique por $\frac{180°}{\pi}$.

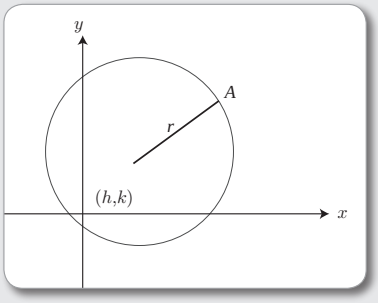
Distancia entre dos puntos

$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



Ecuación de un círculo

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

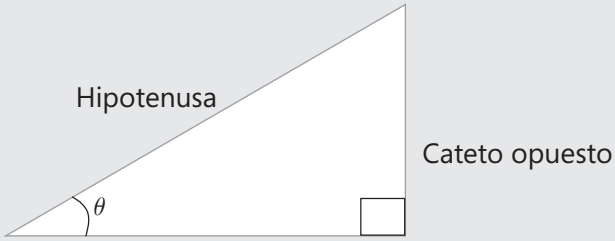


Trigonometría del ángulo recto

$Sen\ \theta = \frac{\text{Cat. op.}}{\text{hipotenusa}}$ $\quad Csc\ \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cat. op.}}$

$Cos\ \theta = \frac{\text{Cat. ad.}}{\text{hipotenusa}}$ $\quad Sec\ \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cat. ad.}}$

$Tan\ \theta = \frac{\text{Cat. op.}}{\text{Cat. ad.}}$ $\quad Cot\ \theta = \frac{\text{Cat. ad.}}{\text{Cat. op.}}$

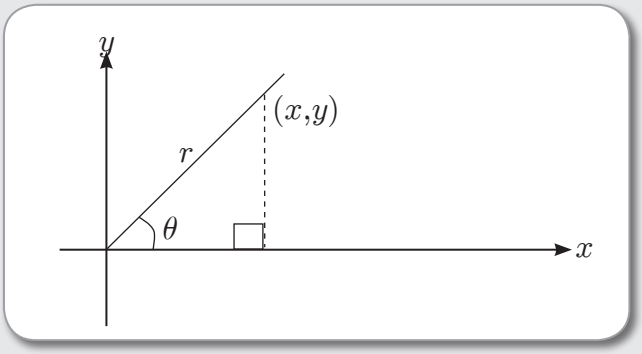


Funciones trigonométricas de ángulos

$Sen\ \theta = \frac{y}{r}$ $\quad Csc\ \theta = \frac{r}{y}$

$Cos\ \theta = \frac{x}{r}$ $\quad Sec\ \theta = \frac{r}{x}$

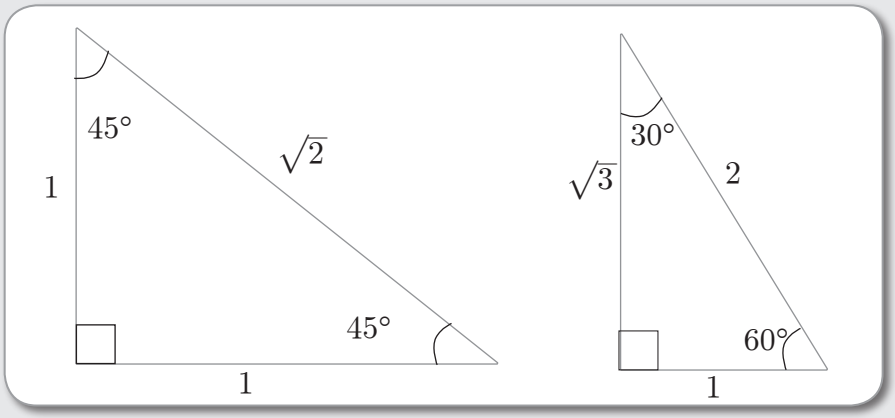
$Tan\ \theta = \frac{y}{x}$ $\quad Cot\ \theta = \frac{x}{y}$



Valores especiales de las funciones trigonométricas

θ	radianes	$Sen\theta$	$Cos\theta$	$Tan\theta$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$45°$	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60°$	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\pi/2$	1	0	—
$180°$	π	0	-1	0
$270°$	$3\pi/2$	-1	0	0

Triángulos especiales



Identidades fundamentales

$$Sec\ x = \frac{1}{cosx} \qquad csc\ x = \frac{1}{senx}$$

$$tan\ x = \frac{senx}{cosx} \qquad cot\ x = \frac{1}{tanx}$$

$$sen^2x + cos^2x = 1 \qquad 1 + tan^2x = sec^2x \qquad 1 + cot^2x = cosc^2x$$

$$sen(-x) = -senx \qquad cos(-x) = cosx \qquad tan(-x) = -tanx$$

Identidades de cofunciones

$$sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cos\ x \qquad cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=sen\ x$$
$$tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cot\ x \qquad cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=tan\ x$$
$$sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=csc\ x \qquad csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=sec\ x$$

Identidades de reducción

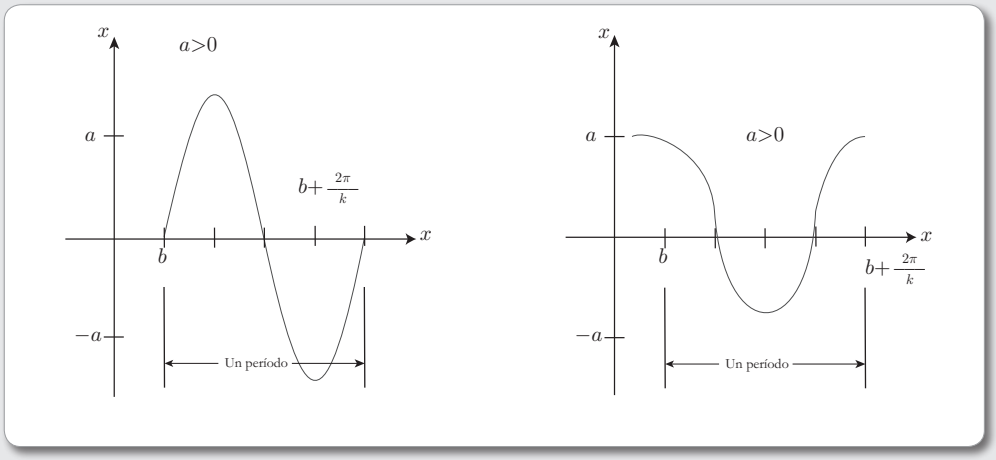
$$sen(x+\pi)=-senx \qquad sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=cos\ x$$
$$cos(x+\pi)=-cosx \qquad cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=sen\ x$$
$$tan(x+\pi)=tanx \qquad tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=cot\ x$$

Fórmulas de reducción

$$sen(-x)=-senx \qquad cos(-x)=cosx$$
$$csc(-x)=-cscx \qquad tan(-x)=-tanx$$
$$sec(-x)=secx \qquad cot(-x)=-cotx$$

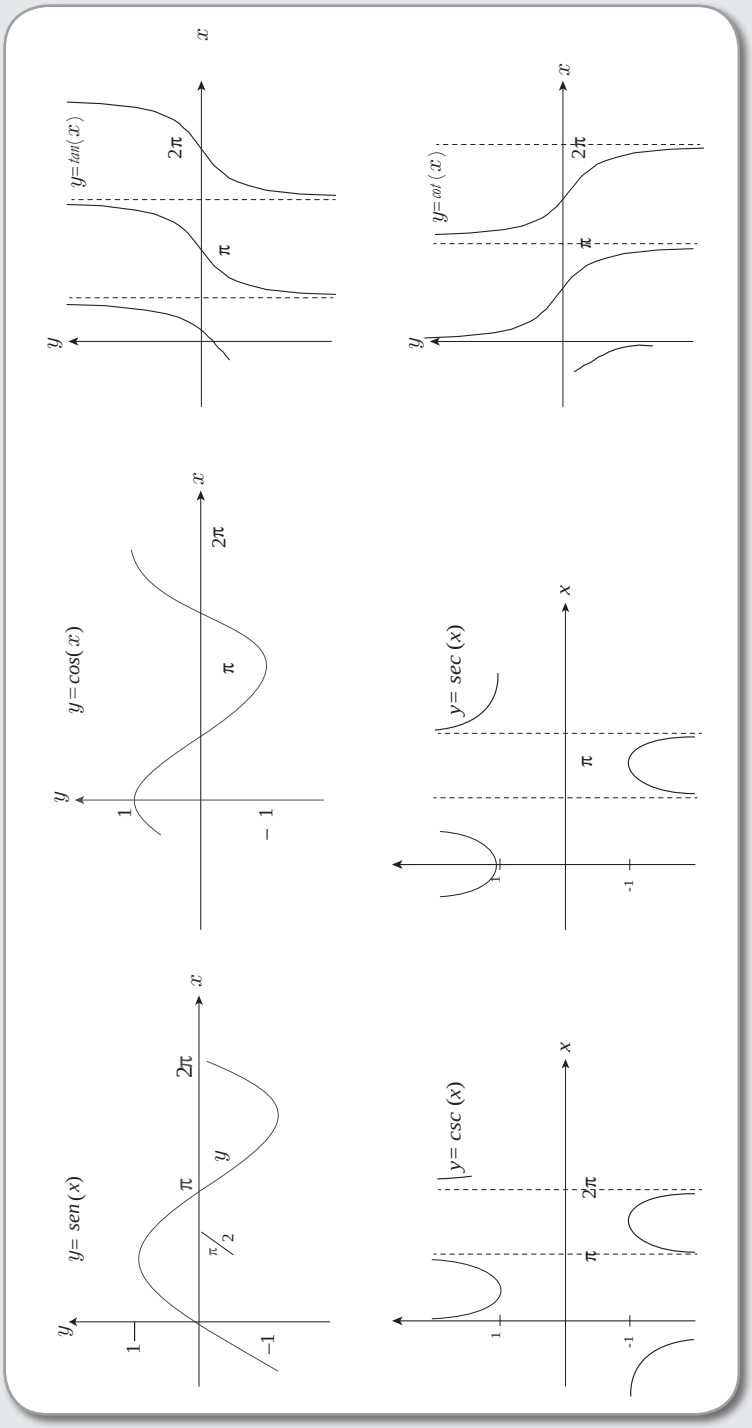
Curvas seno y coseno

$y=asenk(x-b)(k>0)$ $\qquad$ $y=asenk(x-b)(k>0)$



Amplitud $|a|$ período:$2\pi/k$ corrimiento de fase: b

Gráficas de las funciones trigonométricas



Fórmulas de suma y resta de ángulos

$$sen\,(x+y) = senxcosy + cosxseny$$

$$sen\,(x-y) = senxcosy - cosxseny$$

$$cos\,(x+y) = cosxcosy - senxseny$$

$$cos\,(x-y) = cosxcosy + senxseny$$

$$tan\,(x+y) = \frac{tanx+tany}{1-tanxtany}$$

$$tan\,(x-y) = \frac{tanx-tany}{1+tanxtany}$$

Fórmulas de ángulo doble

$$sen2x = 2senx\,cosx$$

$$\begin{aligned} cos2x &= cos^2x - sen^2x \\ &= 2cos^2x - 1 \\ &= 1 - 2sen^2x \end{aligned}$$

$$tan2x = \frac{2tanx}{1-tan^2x}$$

Fórmulas de ángulo mitad

$$sen^2x = \frac{1-cos2x}{2} \qquad cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$$

$$tan^2x = \frac{1-cos2x}{1+cos2x}$$

Identidades producto a suma

$$senu\,cosv = \frac{1}{2}[sen(u+v) + sen(u-v)]$$

$$cosu\,senv = \frac{1}{2}[sen(u+v) - sen(u-v)]$$

$$cosu\,cosv = \frac{1}{2}\,[cos(u+v) + cos(u-v)]$$

$$senu\,senv = -\frac{1}{2}[cos(u+v) - (u-v)]$$

Suma a productos

$$senx + seny = 2sen\,\frac{x+y}{2}cos\,\frac{x-y}{2}$$

$$senx - seny = 2cos\,\frac{x+y}{2}sen\,\frac{x-y}{2}$$

$$cosx + cosy = 2cos\,\frac{x+y}{2}cos\,\frac{x-y}{2}$$

$$cosx - cosy = -2sen\ \frac{x+y}{2}\ sen\ \frac{x-y}{2}$$

Leyes de los senos y de los cosenos

Ley de los senos

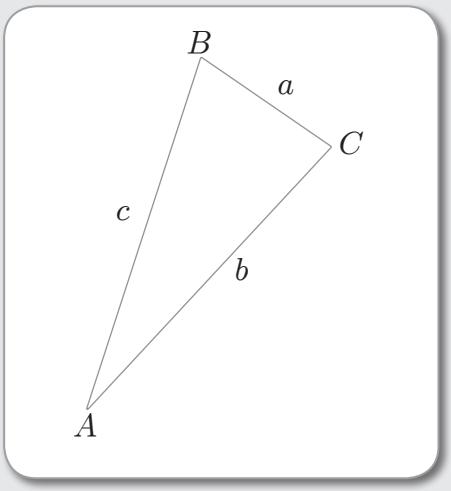
$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$$

Ley de los cosenos

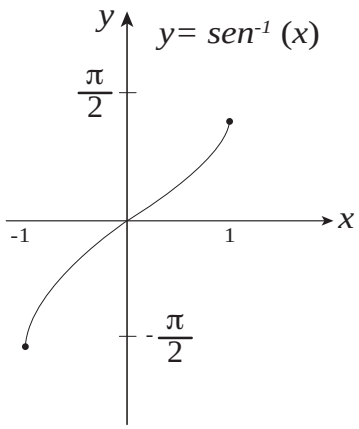
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA$$

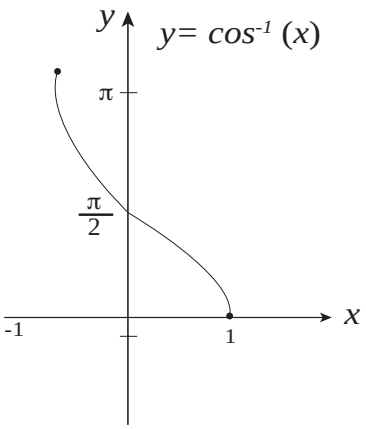
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$$

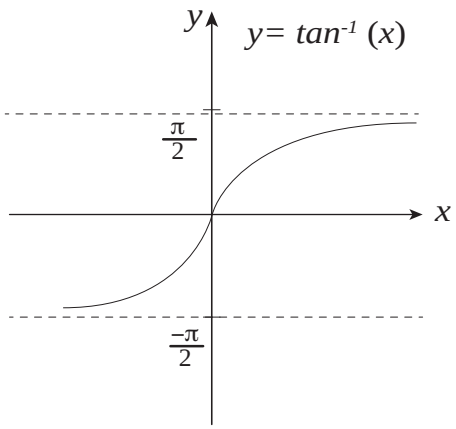
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC$$

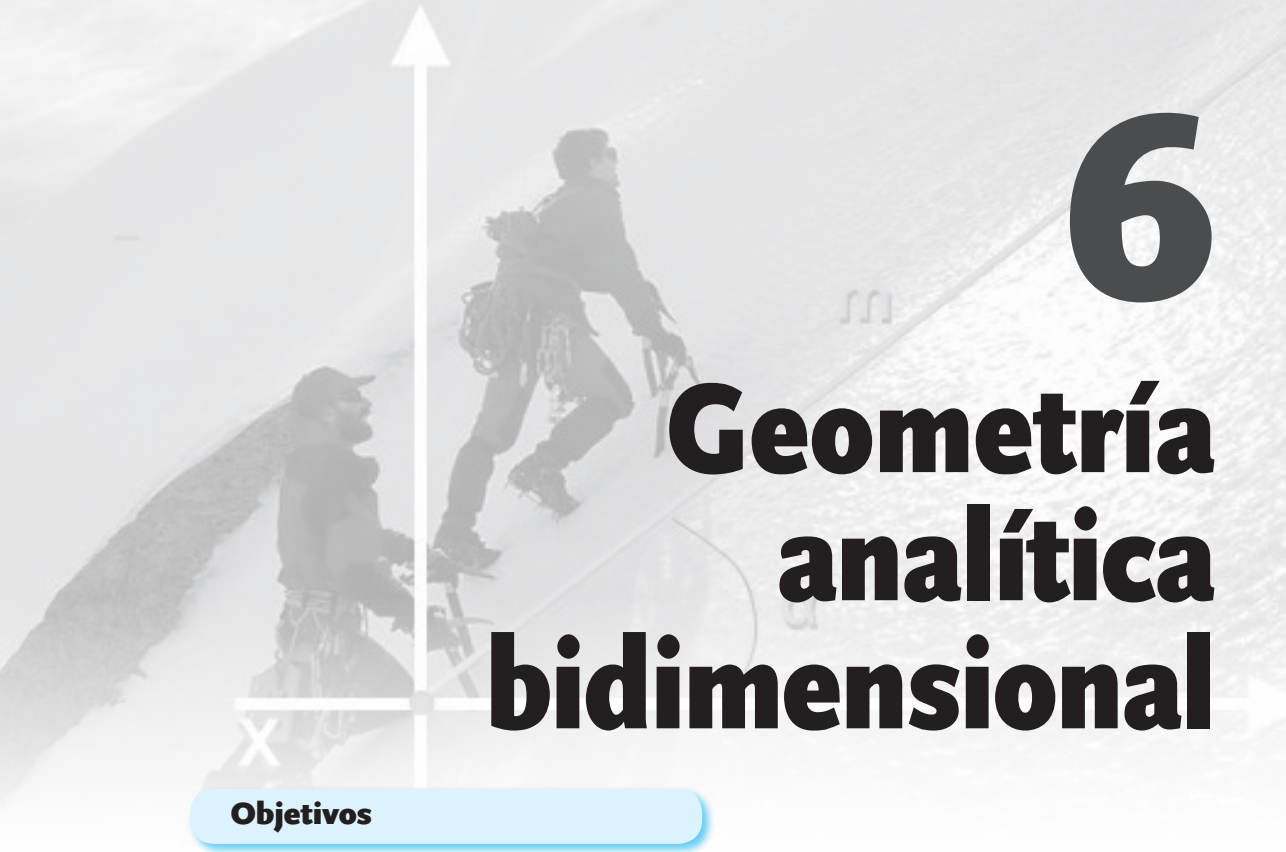


Gráficas de las funciones trigonométricas inversas









6

Geometría analítica bidimensional

Objetivos

- Identificar los elementos del plano cartesiano: ejes, origen, ordenada, abscisa, puntos y las coordenadas rectangulares.
- Identificar las fórmulas de: distancia entre dos puntos, punto medio, intersección con los ejes y simetrías.
- Identificar la definición, gráficas y elementos característicos de las cónicas: parábolas elipses e hipérbolas.
- Obtener los elementos geométricos de las cónicas a partir de sus ecuaciones estándar.
- Deducir las ecuaciones estándar de las cónicas a partir de las características geométricas.
- Determinar las características de las cónicas a partir de sus ecuaciones y aplicar estos conceptos a la resolución de problemas.
- Identificar las ecuaciones de segundo grado de las cónicas, manejando la traslación de ejes y su representación gráfica.

Geometría analítica bidimensional

Definición: la representación de pares ordenados de números reales por medio de puntos del plano, así como el estudio de los conjuntos de esos puntos definidos por medio de expresiones en dos variables, recibe el nombre de **geometría analítica bidimensional**.

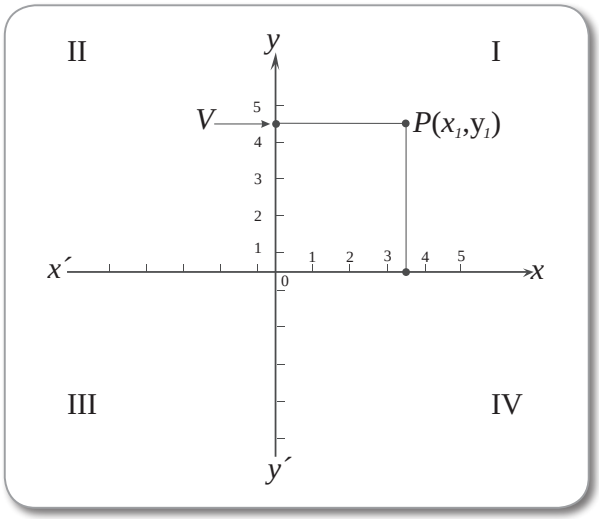
Plano cartesiano

En la vida diaria nos encontramos con problemas de localización, por ejemplo, con las coordenadas de un barco en altamar, buscar una dirección para hallar la calle y la carrera. El problema consiste en localizar dónde nos encontramos situados con respecto a un plano. Los planos de las ciudades generalmente corresponden a un sistema coordenado.

Si escogemos un par de rectas numéricas que se corten, podemos corresponder a cada punto del plano un par ordenado de números reales que nos permitan localizar un punto.

Cuando se toman rectas que cortan y además son perpendiculares, al par ordenado se le denominan coordenadas cartesianas del punto y a las rectas se les llama ejes.

Eje de las x o eje de las absisas, eje de las y, o eje de las ordenadas. El punto de corte de los ejes se llama origen.



Los ejes coordenados dividen al plano xy en cuatro regiones llamadas cuadrantes y se definen I, II, III, IV. Primer cuadrante, segundo cuadrante, y así sucesivamente.

Las coordenadas de un punto tienen signo positivo o negativo, dependiendo de la ubicación de cuadrante en que se encuentre.

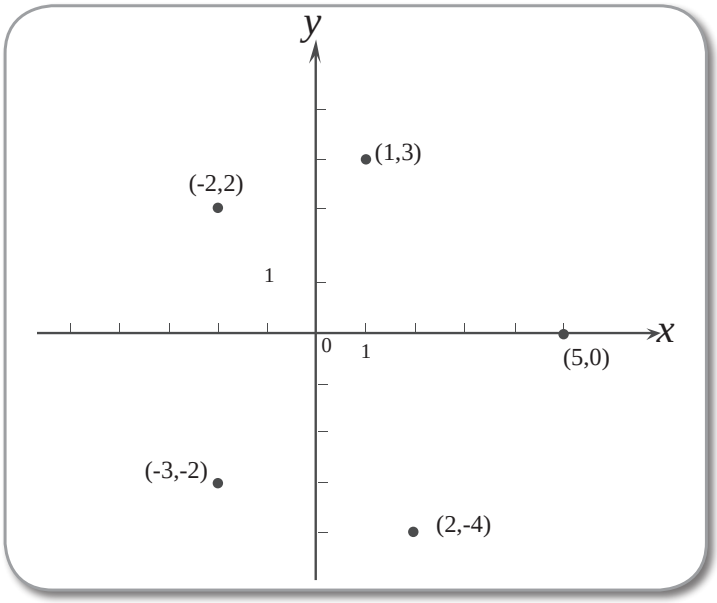
Por ejemplo, cualquier punto que se encuentre ubicado en el primer cuadrante la abscisa y la ordenada son positivas, en el segundo cuadrante la abscisa es negativa y la ordenada positiva, así sucesivamente para el tercer cuadrante y el cuarto cuadrante, respectivamente.

Ejemplo

Ubicar los puntos $(1,3)$, $(5,0)$, $(-2,2)$, $(-3,-2)$ y $(2,-4)$ en el plano cartesiano:

Solución

Recurrimos a la gráfica del plano cartesiano para ubicar los puntos en sus respectivos cuadrantes.



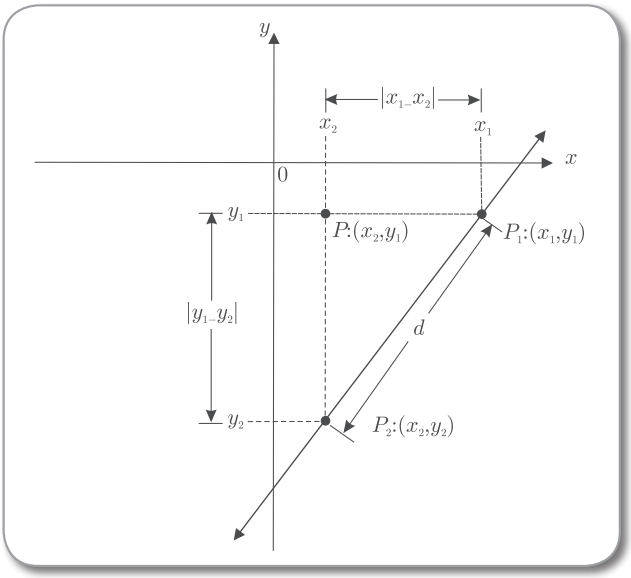
Distancia entre dos puntos

Teorema
La distancia entre dos puntos cualquiera (x_1,y_1) y (x_2,y_2) está dada por:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Demostración

Vamos a demostrar el teorema en el caso de que los puntos no está ubicados sobre una misma recta vertical u horizontal.



Considere dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2), no se encuentran sobre una misma recta vertical u horizontal y son los vértices de un triángulo rectángulo, donde el otro vértice es la coordenada (x_2,y_1) tal como se muestra en la figura. Los catetos del triángulo tienen distancias $|x_1-x_2|$ y $|y_1-y_2|$ utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo ya mencionado tenemos:

$$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

Como el cuadrado de un número nunca es negativo, la ecuación la podemos expresar de la siguiente manera:

$$d^2=|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2$$

Y despejando la variable d tenemos:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ejemplo

1. Encuentre la distancia entre los puntos $(2,3)$ y $(4,6)$.

Solución

Sustituyendo las coordenadas en la fórmula de distancia obtenemos:

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (6-3)^2}$$
$$d = \sqrt{2^2 + 3^2}$$
$$d = \sqrt{4+9}$$
$$d = \sqrt{13}$$

2. Halle la distancia entre los siguientes puntos:

a. $(-2,3)$ y $(5,1)$ b. $(6,-1)$ y $(-4,-3)$

Solución

a. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5+2)^2 + (1-3)^2}$
$= \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$

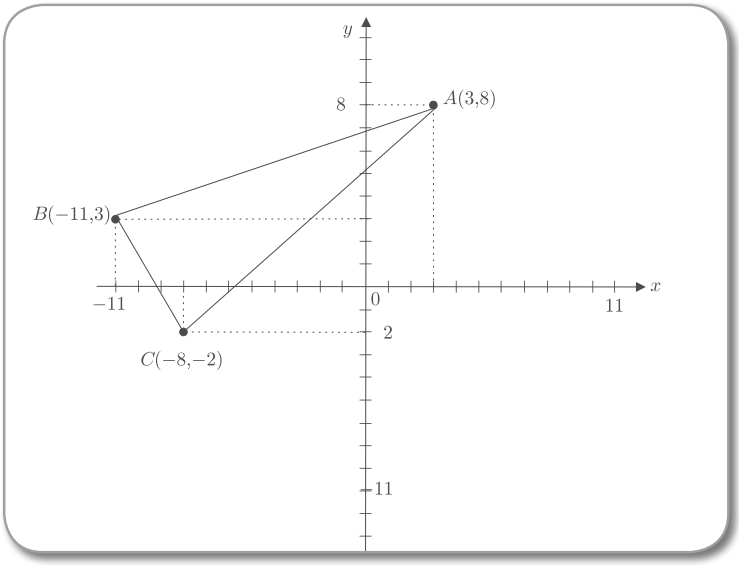
b. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-6)^2 + (-3+1)^2}$
$= \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

3. Demuestre que los puntos $A(3,8)$, $B(-11,3)$ y $C(-8,-2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

Solución

$$|AB| = \sqrt{(3+11)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{196+25} = \sqrt{221}$$
$$|BC| = \sqrt{(-11+8)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$
$$|AC| = \sqrt{(3+8)^2 + (8+2)^2} = \sqrt{121+100} = \sqrt{221}$$

Como $|AB| = |AC|$, el triángulo es isósceles.



4. Determine si los puntos $A(3,7)$, $B(5,-5)$ y $C(-2,0)$ son los vértices de un triángulo rectángulo isósceles.

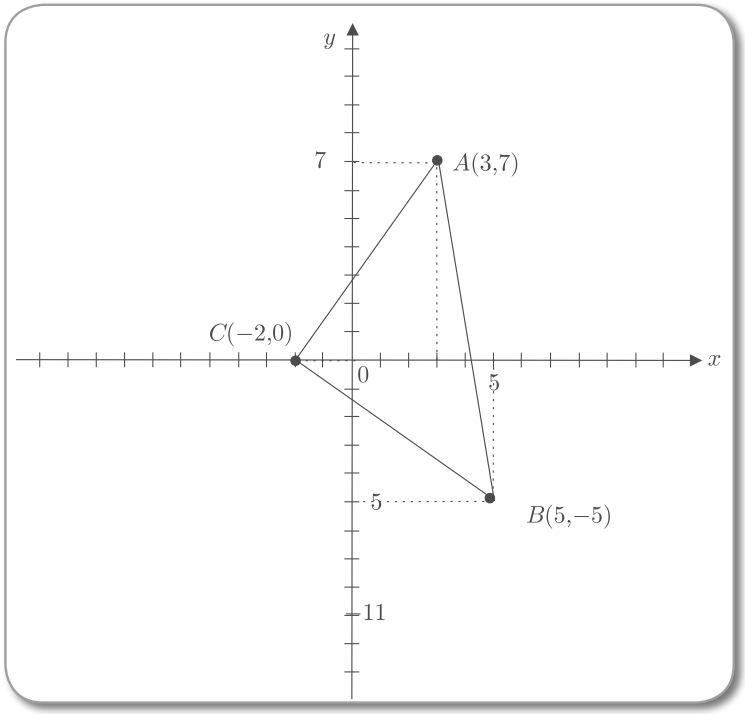
Solución

$$|\mathrm{AB}| = \sqrt{(5-3)^2 + (-5-7)^2} = \sqrt{4+144} = \sqrt{148}$$

$$|\mathrm{BC}| = \sqrt{(-2-3)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

$$|\mathrm{AC}| = \sqrt{(-2-5)^2 + (0+5)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$$

Y se comprueba que $|AC|^2+|BC|^2=74+74=148=|AB|^2$



5. Demuestre que los tres puntos siguientes son colineales, es decir, están sobre la misma recta:

$A(-3,-2)$, $B(5,2)$ y $C(9,4)$.

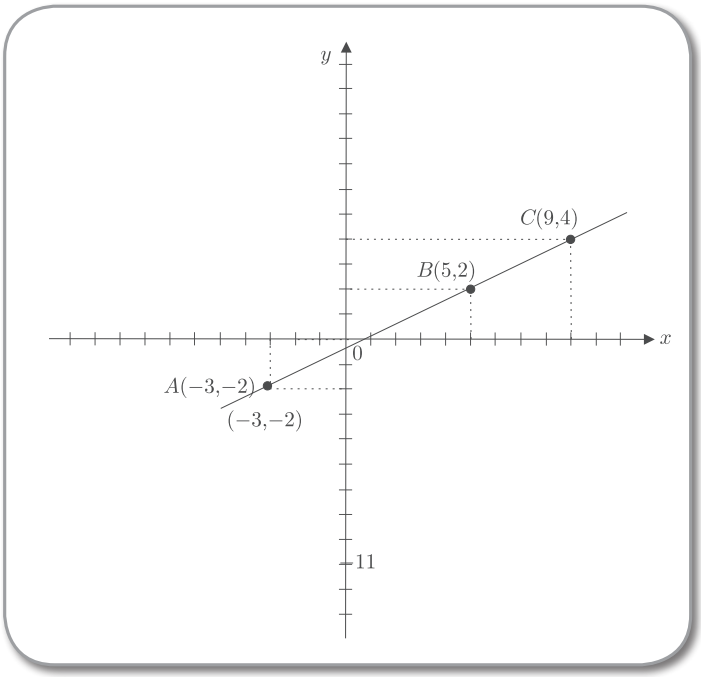
Solución

$$|\mathrm{AB}| = \sqrt{(5+3)^2+(2+2)^2} = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5}$$

$$|\mathrm{BC}| = \sqrt{(9-5)^2+(4-2)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

$$|\mathrm{AC}| = \sqrt{(9+3)^2+(4+2)^2} = \sqrt{144+36} = 6\sqrt{5}$$

Como: $|AB|+|BC|=|AC|$ o sea $4\sqrt{5}+2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$



6. Determine un punto que equidiste de los puntos:

$A(1,7)$, $B(8,6)$ y $C(7,-1)$.

Sea $P(x,y)$ el punto buscado. Luego se debe dar que $PA=PB=PC$.

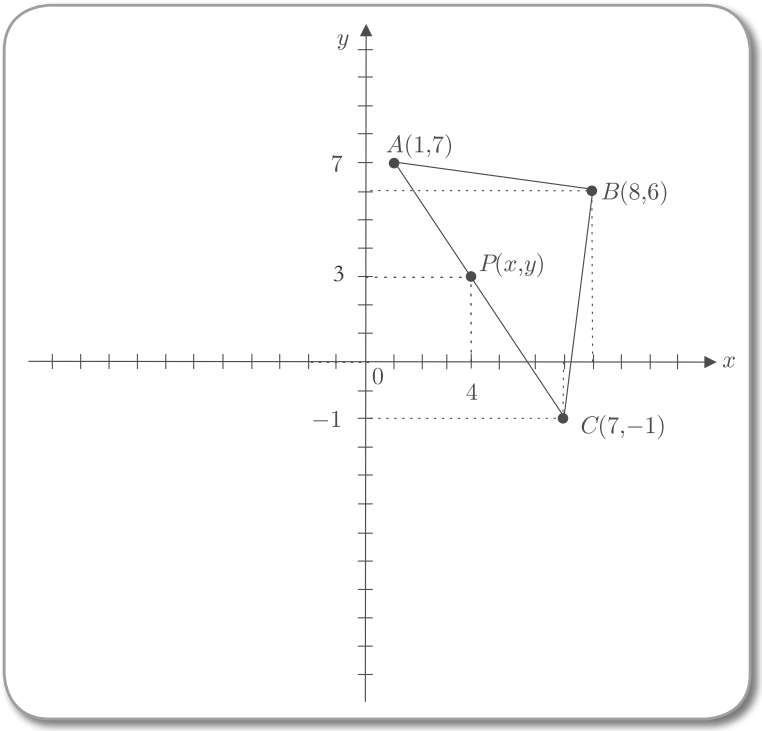
Como $PA = PB$, $\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2} = \sqrt{(x-8)^2+(y-6)^2}$,

elevando al cuadrado y simplificando, $7x-y=25$ **1)**

Como $PA = PC$, $\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}$,
elevando al cuadrado y simplificando,
$3x-4y=0$ **2)**

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones 1) y 2),
resulta: $x=4$ e $y=3$.

Por tanto, el punto buscado tiene de coordenadas (4,3).



Punto medio

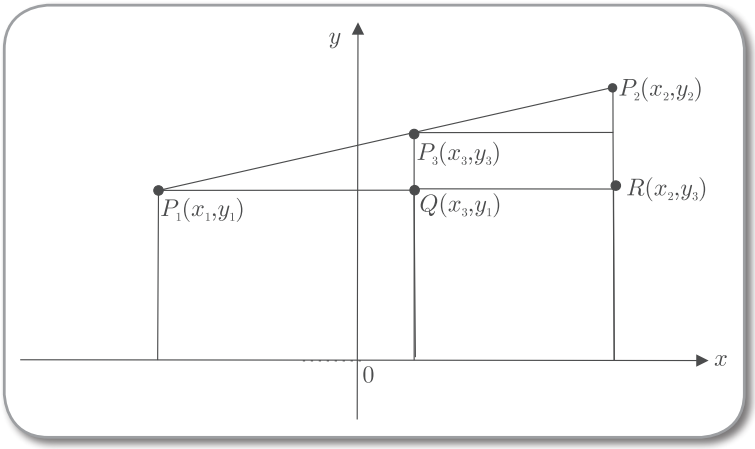
Las coordenadas del punto medio de un segmento se pueden encontrar calculando el promedio de las coordenadas de sus extremos.

Teorema

Sean (x_1,y_1) y (x_2,y_2) las coordenadas de los extremos de un segmento entonces, las coordenadas del punto medio son:

$$x_3 = (\tfrac{x_1+x_2}{2}) \quad \text{y} \quad y_3 = (\tfrac{y_1+y_2}{2})$$

Es decir: $(x_3,y_3) = (\tfrac{x_1+x_2}{2}, \tfrac{y_1+y_2}{2}) = \textit{Punto medio}$



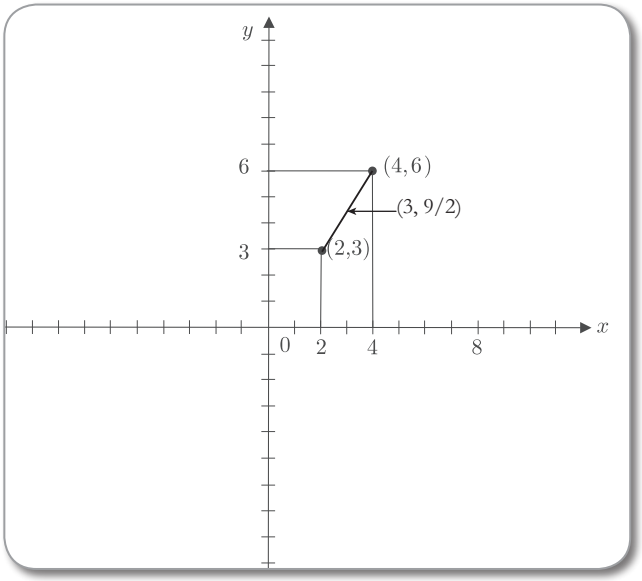
Ejemplos

1. Encuentre el punto medio del segmento cuyos extremos son: (2,3) y (4,6)

Solución

Utilizando la fórmula para el punto medio tenemos:

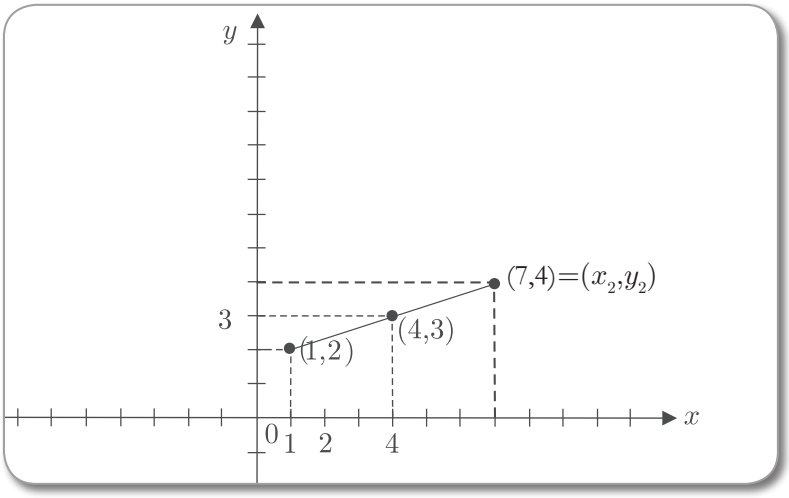
$(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}) = (\frac{4+2}{2}, \frac{6+3}{2})$ o sea $(3, \frac{9}{2})$



2. Un segmento de recta tiene por extremo el punto $P_1(1,2)$ y como punto medio a $P3(4,3)$. Encuentre las coordenadas del otro extremo.

Solución

Sea $P_2(x_2, y_2)$ las coordenadas del otro extremo; sustituyendo $x_1{=}1$ y $x_3{=}4$, en $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, se obtiene: $4 = \frac{1+x_2}{2}$, o sea $8{=}1{+}x_2$ por lo tanto $x_2{=}7$; análogamente, sustituyendo $y_1{=}\,2$, $y_3{=}3$ en $y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, resulta que: $3 = \frac{2+y_2}{2}$ o sea $6 = \quad 2 + y_2$, luego $y_2 = 4$.
Por lo tanto, el punto del otro extremo es: $(7,4)$.



Pendiente e inclinación de una recta

Definición: la pendiente m de una recta es el incremento en y dividido por el incremento en x, o.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{cambio\,de\,y}{cambio\,de\,x}, \qquad 1)$$

donde $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2)$ son dos puntos cualquiera de la recta y, $x_1{\neq}x_2$

Para hallar la pendiente de una recta es indispensable tener dos coordenadas, de esta forma podemos determinar el cambio de y dividido sobre el cambio de x.

Sea ahora α el menor ángulo positivo (sentido *levógiro* o sea al contrario de las manecillas del reloj), comprendido entre la parte positiva del eje x, y una recta L, como se aprecia en la figura siguiente, notando que si L no es paralela al eje y:

$$m = tan\alpha \qquad 2)$$

$$\text{y que, } \ 0 \leq \alpha \leq \pi \qquad 3)$$

Si L es paralela al eje x, o coincide con él, entonces $m = 0$ y $\alpha = 0$; si es paralela al eje y o coincide con él, entonces $\alpha = 90°$, y no están definidos ni $tan90°$, ni la pendiente correspondiente de L. El ángulo α así definido recibe el nombre de *inclinación* de la recta.

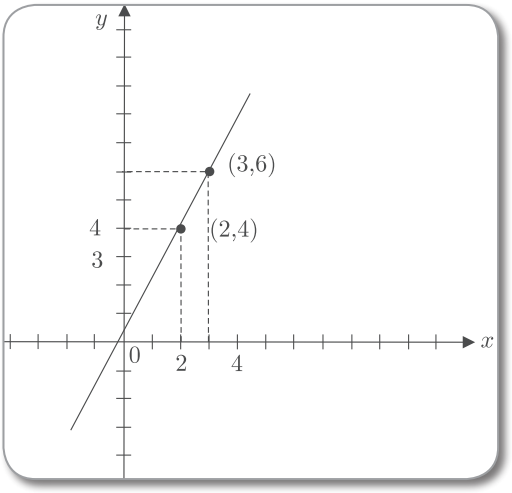
Ejemplos

1. Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos (2,4) y (3,6).

Solución: tomando la fórmula de la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$$

$$= \frac{6-4}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$

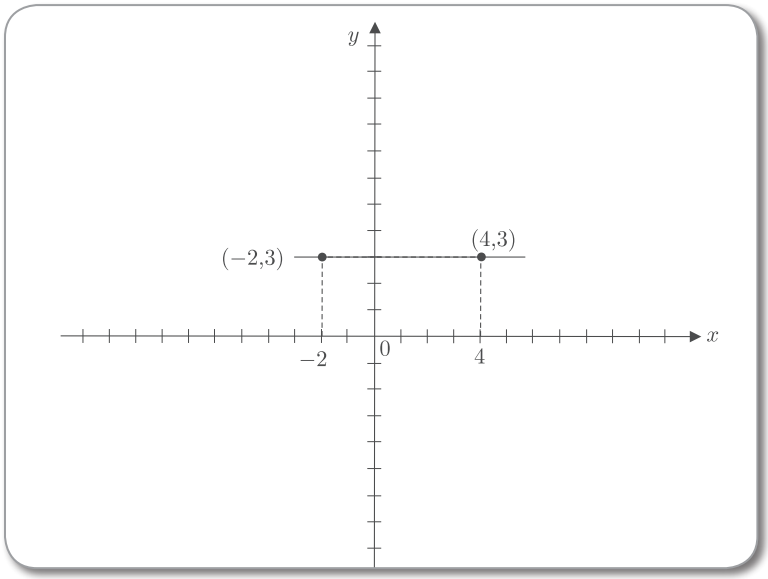


2. Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2,3)$ y $(4,3)$.

Solución

Tomando la fórmula de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-3}{4-(-2)} = \frac{0}{6} = 0$$



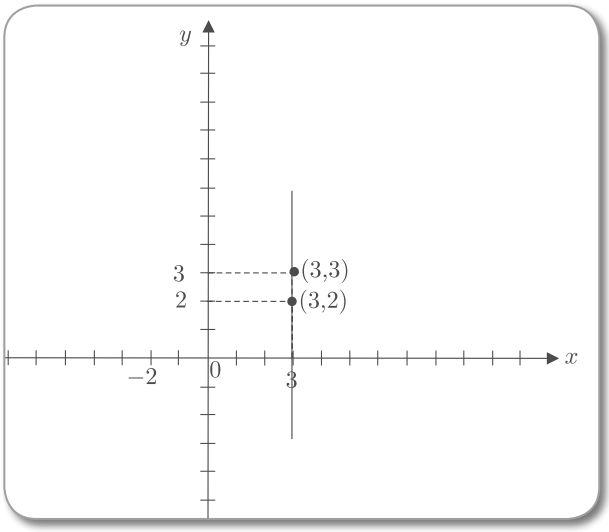
Esto quiere decir que cualquiera de los dos puntos sobre una recta horizontal tiene la misma ordenada por lo tanto, el cambio en y es 0, luego el valor de la pendiente es cero.

3. Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(3,3)$ y $(3,2)$.

Solución:

Sea $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{3-(3)} = \frac{-1}{0}$

Como la división por cero no está definida concluimos que la recta no tiene pendiente.



4. En cada uno de los siguiente incisos, determine la pendiente m y la inclinación de la recta que pasa por los dos puntos que se dan:

   a) $\mathrm{P}_1\ (2,1),\ P_2(4,3)$

   b) $P_1\ (0,0),\ P_2(1,\sqrt{3})$

   c) $P_1\ (1,1)\ , P_2(-2,4)$

   d) $P_1\ (3,4),\ P_2(4,1).$

Solución

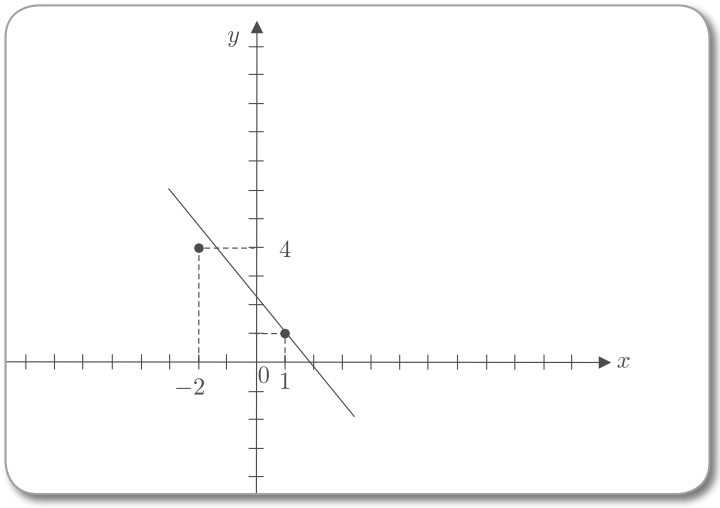
a) Usando la ecuación $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, se encuentra que el valor de m está dado por:

$$m = \quad \frac{3-1}{4-2} = \frac{2}{2} = 1,$$

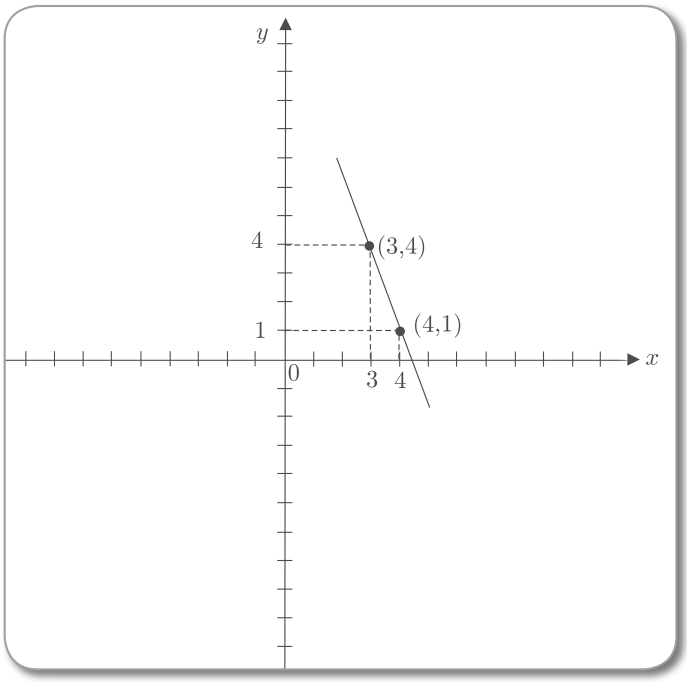
o sea, que $tan\alpha$=1, y como $0°\leq\alpha<180°$, se concluye que α=45°

b) $m = \sqrt{3}$ y $\alpha = 60^o$

c) Ahora $m = -1$ y $Tan\ \alpha = -1$; como $Tan\ \alpha$ es negativa y $0°\leq\alpha<180°$, α es un ángulo del segundo cuadrante.
En este cuadrante, el ángulo cuya tangente es -1 es $135°$
porque $Tan(135°)= Tan(180°-45°)=-Tan45°=-1$; así que α=135°



d) En este caso, $m = \frac{1-4}{4-3} = \frac{-3}{1} = -3$ o sea que $tan\alpha = -3$ y α es un ángulo obtuso. Para hallar α se escribe: $Tan(180° - \alpha) = -Tan\alpha = 3$. Es decir $Tan(180° - \alpha) = 3$, o también $180° - \alpha = Tan^{-1}(3) = 72°$, por lo tanto: $\alpha = 180° - 72°$, luego, $\alpha = 108°$



Ecuación de la recta

Estamos en condiciones de encontrar la ecuación de una recta L, para encontrar dicha ecuación solo basta con tener la pendiente y el punto por donde pasa la recta.

i) $p(x_1,y_1)$: punto por donde pasa la recta.

ii) m: pendiente de la recta.

Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta en *forma estándar* o *forma común* es:

$$y = mx + b$$

Ejemplos

1. Halle la ecuación de la recta que tiene pendiente $m=2$ y pasa por $(2,4)$.

Solución

Lo que queremos es encontrar la ecuación de la recta de la forma estándar o forma común de la recta.

$$y = mx + b$$

Siendo $m=2$, como la recta pasa por el punto $(2,4)$, esto significa que $x=2$, y $y=4$, reemplazando en la ecuación estándar tenemos:

$$\begin{array}{c} 4 = 2(2) + b \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ y = m(x) + b \end{array}$$

Despejando b entonces: $b = 0$, por lo tanto, la ecuación de la recta es: $y=2x$

2. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,4)$ y $(7,6)$

Solución

En primer lugar, calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos

$$m = \frac{6-4}{7-2} = \frac{2}{5}$$

Ahora podemos hallar la ecuación de la recta con cualquiera de los dos puntos, tomemos en particular el punto $(7,6)$, y reemplazamos nuevamente en la forma estándar:

$$\begin{array}{ll} y = & y = m(x) + b \\ & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & 6 = \frac{2}{5}(7) + b \end{array}$$

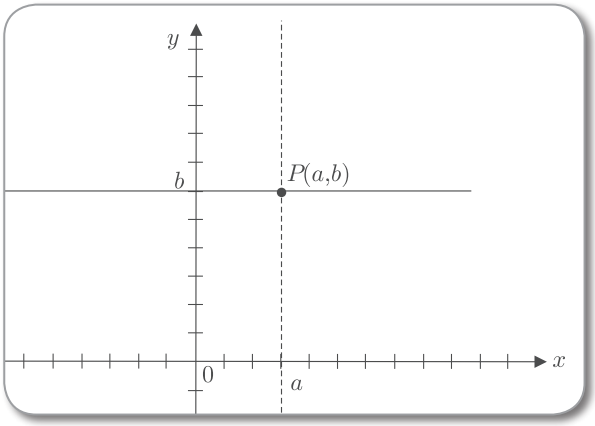
Despejando b tenemos:

$$\begin{aligned} b &= 6 - \frac{14}{5} \\ &= \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es:

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$$

Ecuación de una recta horizontal
En una recta que tiene pendiente $m = 0$, es decir $y = 0x + b$ ó $y = b$ y pasa por el punto (a,b).



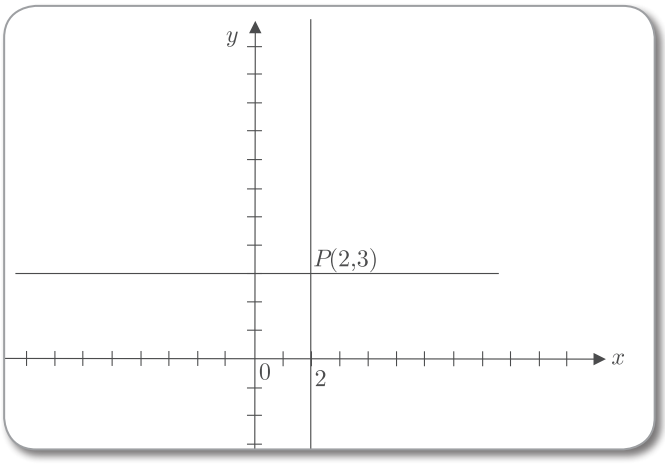
Ecuación de una recta vertical
Recta que tiene pendiente indefinida, todos los puntos de la recta tienen la misma coordenada x, además de la forma $x = a$, y pasa por el punto (a,b).

Ejemplos

1. Halle las ecuaciones de la recta que pasan por el punto $(2,3)$. Grafique las rectas.

Solución

Cualquier punto de la recta horizontal que pasa por $(2,3)$ tiene a 3 como coordenada y de manera similar. Cualquier punto de la recta vertical que pasa por (2,3) tiene a 2 como coordenada por lo tanto, las ecuaciones correspondientes son: $x = 2$ y $y = 3$.



Ecuación de la recta en forma general

La forma general de la ecuación de la recta es:

$$ax + by + c = 0$$

Donde a y b son constantes diferentes de cero.

A esta forma de ecuación lineal se le llama también, ecuación implícita, ya que la variable dependiente y no está expresada en términos de x, por lo tanto, tendremos que despejar la variable y en términos de x para llevarla a la forma estándar, $y = mx + b$ y así conocer, cuál es la pendiente de la recta y el punto de corte con el eje y, es decir, si tenemos la ecuación: $ax + bx + c = 0$.

Despejando y tenemos:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

donde la pendiente es: $m = -\frac{a}{b}$ y el intersecto con el eje y es $b = -\frac{c}{b}$

Ejemplos

1. Halle la pendiente y el intersecto en la recta: $2x+3y-1=0$.

Solución

Despejando la variable y en la ecuación tenemos:

$$2x + 3y - 1 = 0$$

Despejando y, $\quad 3y = -2x + 1$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Notamos que la $m = -\frac{2}{3}$, y el intersecto en y es: $b = \frac{1}{3}$

2. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(-3,5)$ con pendiente $-3/4$.

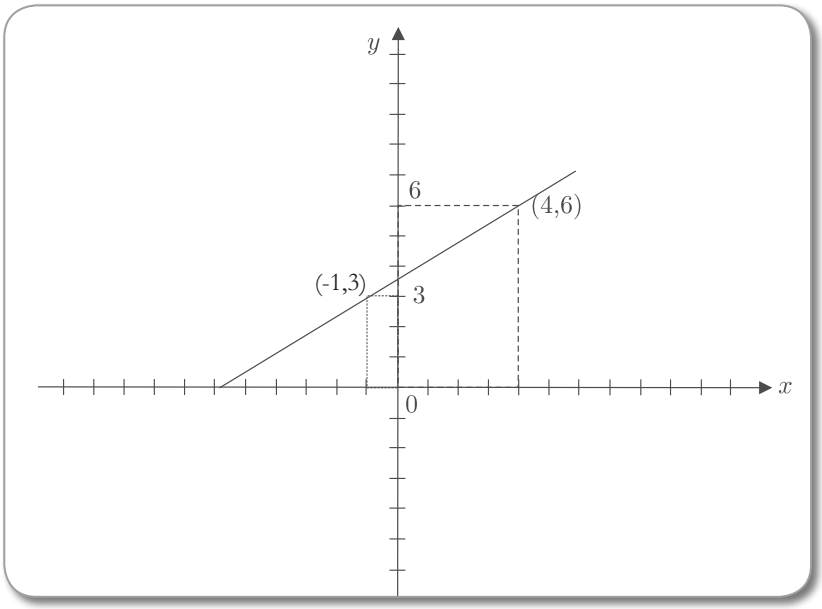
Solución

Usando la ecuación:

$y-y_1 = m(x-x_1)$ se obtiene:

$y-5 = -\frac{3}{4}[x-(-3)] \therefore 4y-20 = -3x-9.$ y finalmente, $3x+4y-11=0$

3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $P_1(4,6)$ y $P_2(-1,3)$



Solución

Usando la fórmula $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, se encuentra que la pendiente de la recta dada es $\frac{3}{5}$ ahora utilizando la ecuación de la recta en su forma punto pendiente, con $m=3/5$; $x_1=4$ y $y_1=6$ se tiene:

$$y-6 = \frac{3}{5}(x-4) \therefore 5y-30 = 3x-12$$

y, finalmente, $3x-5y+18=0$ se puede comprobar esta respuesta mostrando que las coordenadas de $P_1(4,6)$ y $P_2(-1,3)$ satisfacen la ecuación obtenida:

$$3(4)-5(6)+18=12-30+18=0$$
$$3(-1)-5(3)+18=-3-15+18=0$$

4. Escriba la ecuación de la recta en la forma estándar y a partir de esta determine su pendiente.

$$R = \{(x,y)|-2x+3y-6 = 0\}$$

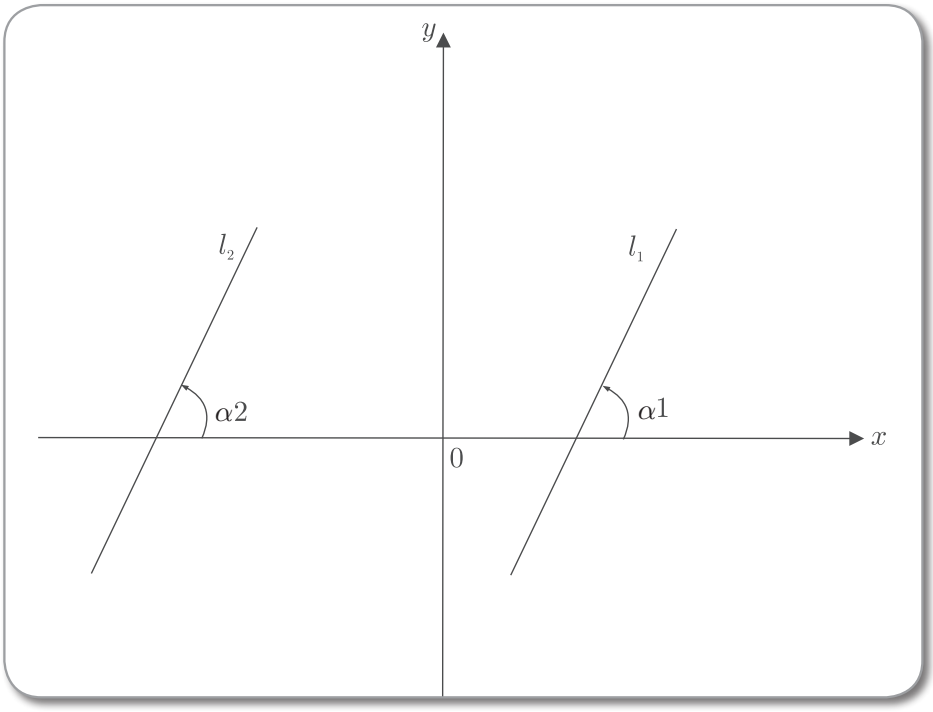
Solución

Despejando en la ecuación dada, se encuentra la forma estándar de la recta:

$$y = \tfrac{2}{3}x + 2, \text{ con } m = \tfrac{2}{3}.$$

Rectas paralelas

Teorema: dos rectas l_1 y l_2 no verticales, son paralelas si, solo si, $m_1 = m_2$.



Lo que expresa este teorema es que dos rectas son paralelas cuando sus pendientes son iguales.

Ejemplo

1. Las ecuaciones:

$$y = 2x$$
$$y = 2x + 1$$

Son paralelas porque tienen en común la misma pendiente, difieren en que la primera pasa por el origen, y la segunda pasa por el eje y en $(0,1)$.

2 Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,3)$ y es paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.

Solución

En primer lugar expresamos la ecuación $2x + 3y - 1 = 0$ en la forma estándar, es decir:

$$2x + 3y - 1 = 0$$
$$3y = -2x + 1$$
$$y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}$$

Por lo tanto la pendiente de la recta es $m = -\frac{2}{3}$ y por el teorema la pendiente de la recta paralela que pasa por el punto $(2,3)$ es también: $m = -\frac{2}{3}$

Luego la recta paralela que estamos buscando es:

$$\begin{array}{l} y = mx + b \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 3 = -\frac{2}{3}(2) + b \\ 3 + \frac{4}{3} = b, \end{array}$$

Simplificando y despejando b, $b = \frac{13}{3}$, donde, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

3. Muestre que la recta l_1, de pendiente m_1, que pasa por los puntos $P_1(-3,-4)$ y $P_2(2,7)$, es paralela a la recta l_2, de pendiente m_2 que pasa por $P_3(1,-9)$ y $P_4(6, 2)$.

Solución

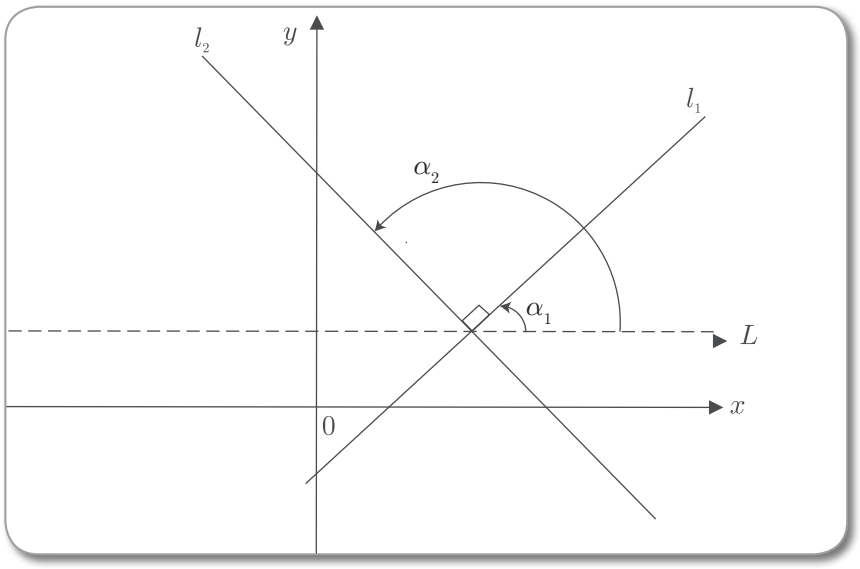
Usando la ecuación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se encuentra que:

$m_1 = \frac{7+4}{2+3} = \frac{11}{5}$ y $m_2 = \frac{-9-2}{1-6} = \frac{11}{5}$

y como $m_1 = m_2$, entonces, $l_1 \| l_2$ por teorema anterior.

Rectas perpendiculares

Teorema: dos rectas l_1 y l_2 con pendientes m_1 y m_2, son perpendiculares, si y solo si, $m_1 \cdot m_2 = -1$



Lo que expresa el teorema es que si el producto de dos pendientes m_1 y m_2 de dos rectas l_1 y l_2 respectivamente, es igual a menos uno, las rectas son perpendiculares.

Ejemplos

1. Tomemos las rectas:

$$l_1: \ y = \tfrac{1}{2}x + 1$$

$$l_2: \ y = -2x$$

La pendiente de la recta l_1 es $m_1 = \frac{1}{2}$ y la pendiente de la recta l_2 es $m_2 = -2$. Al realizar dicho producto $m_1 \cdot m_2 = (\frac{1}{2})(-2) = -1$ lo que significa que las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares.

2. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y es perpendicular a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.

Solución

Primero expresamos la ecuación $2x + 3y - 1 = 0$ en la forma estándar, luego $3y = -2x + 1$, es decir, despejando la variable y, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. La pendiente de esta recta es $m_1 = -\frac{2}{3}$, ahora nos interesa saber la pendiente de la recta perpendicular, utilizando la fórmula, $m_1 \cdot m_2 = -1$ y reemplazando, $-\frac{2}{3} \cdot m_2 = -1$ y despejando m_2, entonces: $m_2 = \frac{3}{2}$, que es la pendiente de la perpendicular.

Como la recta perpendicular pasa por el punto $(2, 3)$, entonces la recta es $y = mx + b$ y reemplazando tenemos que, $3 = \frac{3}{2}(2) + b$ y despejando b, tenemos que $b = 0$, por lo tanto $y = \frac{3}{2}x$.

3. Muestre que la recta l_1 de pendiente m_1 que pasa por los puntos $P_1(-2,-4)$ y $P_2(1,3)$ es perpendicular a la recta l_2 de pendiente m_2 que pasa por $P_3(3, 2)$ y $P_4(-4, 5)$.

Solución

En este caso $m_1 = 7/3$ y $m_2 = -3/7$; como estas pendientes son recíprocas y de signo contrario, $(7/3)(-3/7)=-1$, luego, $l_1 \perp l_2$, por el teorema anterior.

4. Encuentre la pendiente m_2 de una recta l_2; que sea perpendicular a la recta l_2 definida por los puntos $P_1(-2,1)$ y $P_2(3,5)$.

Solución

Sea m_1 la pendiente de l_1; usando la fórmula de pendiente, se encuentra que: $m_1=\frac{4}{5}$. Por el teorema anterior, m_2 debe ser recíproca de m_1 y de signo contrario, y por consiguiente $m_2=-\frac{5}{4}$.

Ejercicio 6.o

1. Ubique los puntos $(3,4)$, $(-2,-5)$, $(-4,6)$, $(5,-7)$, $(0,7)$, $(-6,0)$,$(6,0)$ y $(0,-4)$ en el plano cartesiano.
2. Explique el significado de los términos abscisa, ordenada y cuadrante.

   Observe que: $p(x_1, y_1)$ está en el cuadrante I$\Leftrightarrow x_1>0, y_1>0$
3. Un cuadrado de lado a tiene uno de los vértices en el origen, otro sobre la parte positiva del eje x, y el terreno sobre la parte positiva del eje y. Diga cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado.
4. Encuentre la distancia entre los puntos:

   a) $(-4, -3)$ y $(2, 7)$

   b) $(2, -3)$, $(5, 1)$

   c) $(6, 4)$, $(4, 8)$

5. Demuestre que los puntos $A\ (1, 1)$; $B\ (1, 3)$; $c(3, 1)$ son vértices de un triángulo isósceles.
6. Del numeral 5 demuestre que los vértices A, B, C forman un triángulo rectángulo.
7. Demuestre que los puntos $A(0,1)$, $B\ (1,2)$, $C(3,4)$ son colineales.
8. Encuentre el punto medio:
   a. $(2, 3)$ y $(4, 2)$
   b. $(-3, -5)$ y $(-1, -1)$
   c. $(4, 5)$ y $(7, 9)$
9. Un segmento de recta tiene por extremo el punto $A(6, 3)$ y como punto medio las coordenadas $B\ (8, 7)$, encuentre las coordenadas del otro extremo.
10. Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos:
    a) $(3, 2)$ y $(5, 6)$
    b) $(-2,5)$ y $(-1,3)$
    c) $(2,-5)$ y $(-3, -1)$
11. Halle una ecuación de la recta con pendiente 4 que pasa por el punto $\left(-\frac{1}{2},2\right)$.
12. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos:
    a) $(3,4)$ y $(-8,2)$
    b) $(\frac{1}{3},-1)$ y $(\frac{3}{4},3)$
13. Halle la pendiente y el intersecto en y, de la recta:
    a) $3x+2y-1=0$
    b) $5y-20+3x=0$
    a Intersecto $b=\frac{1}{2}$
    b Intersecto $b = 4$
14. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $(\frac{1}{11}, \frac{1}{2})$,$(\frac{-10}{11}, -2)$

15. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(3,-4)$ y tiene pendiente $m = -2$. si la recta contiene los puntos $(a,8)$ y $(5,b)$, encuentre a y b.
16. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,5)$ y es paralela a la recta $x+y=2$.
17. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,5)$ y es perpendicular a la recta: $x+y=8$.
18. Muestre que las rectas $5y-3x-1=0$ y $10y-6x+5=0$ son paralelas.
19. Muestre que las rectas $2y-3x=0$; $3y+2x-4=0$. son perpendiculares.

Problemas de aplicación

1. Los costos fijos mensuales para producir un artículo son de \$2'000.000 y los costos variables por unidad de \$5.000; si el precio de venta por unidad es de \$9.000. Hallar:
   a. Ecuaciones de costos e ingresos en función del número de unidades y representarlas en un mismo plano.
   b. Punto de equilibrio.
   c. Función de utilidad.
   d. Cuántas unidades se deben producir y vender para obtener una utilidad mensual de \$1'500.000.

Solución

a. Los costos fijos mensuales igual a \$2'000.000 significa, que cuando se producen cero unidades el costo es \$2'000.000, es decir, tenemos el punto (0, 2'000.000) y los costos variables por unidad de \$5.000, significa que por cada unidad los costos se incrementan en \$5.000, es decir, $m = 5.000$, por lo tanto la ecuación de costos es:

$$C - 2'000.000 = 5.000(q-0)$$

$$C = 5.000q + 2'000.000$$

Si el número de unidades vendidas es cero el ingreso es cero, tenemos el punto (0, 0), como el precio de venta es \$9.000 tenemos $m = 9.000$, por lo tanto, la ecuación de ingresos es: $I = 9.000q$.

b. El punto de equilibrio consiste en el número de unidades que hay que producir y vender para que los ingresos sean iguales a los costos, es decir, hallar la intersección de las rectas.

Si $I = C$ tenemos que:

$$9.000q = 5.000q + 2'000.000$$
$$4.000q = 2'000.000$$
$$q = 500$$

$I = C$, donde el ingreso es $4'500.000$, por lo tanto,

el punto de equilibrio es $(500, 4'500.000)$.

c. La utilidad U es igual a los ingresos menos los costos:

$$U(q) = I(q) - C(q)$$
$$U(q) = 9.000q - (5.000q + 2'000.000)$$
$$U(q) = 4.000q - 2'000.000$$

d. Hallamos el valor de q cuando $U(q) = 1'500.000$, reemplazando,

$$1'500.000 = 4.000q - 2'000.000$$
$$3'500.000 = 4.000q$$
$$q = 3'500.000/4.000$$
$$q = 875$$

2. Si p representa el precio unitario de un producto y q el número de unidades de ese producto, de acuerdo a las reglas del mercado tenemos que:

Si el precio p aumenta, la oferta tiende a crecer, mientras que la demanda tiende a disminuir, y si el precio p disminuye, la demanda tiende a crecer, mientras que la oferta tiende a disminuir, si estas relaciones son lineales, la ecuación de oferta la expresamos:

$p = m_1 q + b_1$, donde $m_1 > 0$; y la ecuación de demanda la expresamos:

$p = m_2 q + b_2$, donde $m_2 < 0$.

El precio p en que la demanda y la oferta son iguales, gráficamente el punto de intersección de las rectas se denomina punto de equilibrio del mercado.

Ejemplo

Dadas las ecuaciones: $p+q=100$ y $p-q=20$

a. Identifique cuál corresponde a oferta y cuál a demanda, explique qué significan sus coeficientes.

b. Explique para $p=40$ y $p=80$ que sucede.

c. Halle el punto de equilibrio y represente en un mismo plano las dos ecuaciones.

Solución

a. La ecuación de demanda es: $p+q=100$ por ser $m=-1(0\leq q<100)$, $m=-1$ significa que si la demanda aumenta en 1 unidad el precio diminuye en 1, el corte con el eje $y(0,\ 100)$, significa que el precio máximo que se está dispuesto a pagar.

   La ecuación de oferta es: $p-q=20$ por ser $m=1$, $q\geq 0$, significa que al aumentar la oferta en 1 el precio aumenta en 1.

   El corte con el eje y, $(0,\ 20)$ significa que el precio mínimo con el cual se está dispuesto a ofrecer es 20.

b. Si $p=40$, la oferta es $q=20$ y la demanda es $q=60$, hay exceso de demanda, por lo tanto, el precio tiende al alza.

   Si $p=80$, la oferta es $q=60$ y la demanda es $q=20$, hay exceso de oferta, por lo tanto, el precio tiende a bajar.

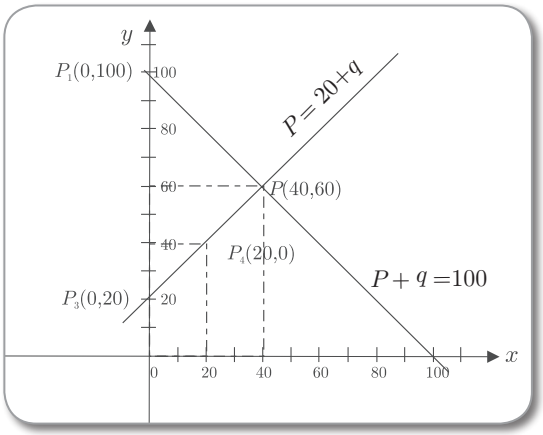
c. Si $p+q=100,\ p=100-q$ **1)**

   Si $p-q=20,\ p=20+q$ **2)**

   Igualando 1) y 2) tenemos:

$$\begin{aligned} 100-q &= 20+q \\ -2q &= -80 \\ q &= 40 \quad \text{y} \quad p=60 \end{aligned}$$

   Significa que para un precio $p=60$ la demanda y la oferta son iguales, $q=40$.



3. Si $P(t)$ representa el valor de un activo en función del tiempo t, que se deprecia linealmente.

   Ejemplo: una máquina se adquiere por $\$12'000.000$ y se deprecia en 15 años, hallar:

   a. $P(t)$.

   b. El valor de la máquina y la depreciación acumulada dentro de 7 años

   Solución

   a. Si la máquina se adquiere en $\$12'000.000$ significa que si:
   $t = 0$, $P = 12'000.000$.
   Que se deprecie en 15 años significa que $t = 15$, $P = 0$.

   Tenemos dos puntos $(0,12'000.000)$ es decir, $b = 12'000.000$ y (15,0)

   Hallamos m, $m = \frac{-12'000.000}{15} = -800.000$, por lo tanto,

   $$P = -800.000t + 12'000.000;\ t \text{ en años y, } \quad 0 \leq t \leq 15$$

   El valor de $m = -800.000$ significa que cada año la máquina se deprecia en $800.000 por lo tanto, la depreciación acumulada es $D(t) = 800.000t$.

   b. Si $t = 7$ $P = 800.000(7) + 12'000.000 = 6'400.000$ y

   $$D = 800.000(7) = 5'600.000$$

Ejercicio 6.1

1. Verifique si los puntos: $(1, 2)$, $(-25, 21)$, $(-2, 4)$, $(10, -5)$ están en la recta $2x + 3y - 8 = 0$.
2. Exprese como función lineal y represente gráficamente cada una de las siguientes ecuaciones:

   a. $4y - 3x = 12$ b. $3x + 7y - 8 = 0$

   c. $2y + 3x + 2 = 0$ d. $5x - y = 7$

   e. $7x - 3y = 0$ f. $(x/4) + (y/4) = 1$

3. Halle la ecuación de la recta de las diferentes formas que pasa por los puntos:

   a. $(0, 0)$ y $(8, 2)$ b. $(3, 9)$ y $(3, 5)$

   c. $(-2/3, 0)$ y $(0, 5/2)$ d. $(-1, -2)$ y $(4, 1)$

   e. $(-7, 4)$ y $(-7, 4)$ f. $(-2, 3)$ y $(-5, -6/7)$

4. Halle la ecuación de la recta que:

   a. Pasa por el punto $(7, 9)$ y $m = -5$.

   b. Pasa por el punto $(3, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos: $(-1, -3)$ y $(8, 7)$.

   c. Pasa por el punto $(-4, 3)$ y es paralela a la que pasa por los puntos: $(0, -3)$ y $(-6, 1)$.

   d. Pasa por el punto $(5, 7)$ y es paralela a: $3x + 5y + 25 = 0$.

   e. Pasa por $(-1, 3)$ y es paralela a: $4x + 2y = 7$.

   f. Pasa por $(-2, 5)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos: $(1, k)$ y $(k, 1)$.

   g. Pasa por $(-1, 6)$ y es perpendicular a la recta $5x + 2y - 5 = 0$

5. Los costos fijos de un producto son $5'000.000 mensuales y los costos variables por unidad $6.000; si el precio unitario de venta es $10.000:

   a. Exprese el costo total y el ingreso en función del número de unidades.

b. Halle el punto de equilibrio.

c. ¿Cuántas unidades se deben producir y vender para obtener una utilidad de $2'000.000?

d. Exprese la utilidad en función del número de unidades vendidas e interprete los coeficientes.

6. Cuando se producen y venden 500 unidades de un producto se tiene una pérdida de $400.000, y cuando se producen y venden 1.000 unidades, se tiene una ganancia de $600.000, si los costos variables por unidad son $1.000:

   a. Exprese el costo total y el ingreso en función del número de unidades.

   b. Halle el punto de equilibrio.

   c. ¿Qué utilidad tengo cuando vendo 2.500 unidades?

   d. ¿Cuántas unidades se deben producir y vender para obtener una utilidad de $500.000?

7. La demanda mensual de un artículo es de 4.000 unidades, si los costos fijos mensuales para producirlo son de $5'000.000, el precio de venta del artículo es de $6.250 y el costo variable es el 60% del precio de venta.

   a. Calcule la utilidad.

   b. Si el productor aspira a obtener una utilidad mínima del 20% sobre los costos totales, ¿se justifica producir?

8. La demanda de un producto tiene un comportamiento lineal, si se sabe que a un precio de $5.000 la unidad se demandan 4.000 unidades y por cada $1.000 que se rebaje en el precio, la demanda crece en 500 unidades.

   a. Halle la ecuación de demanda.

   b. ¿Qué precio máximo se estaría dispuesto a pagar?

   c. Para un precio de $4.500, ¿cuál es la demanda?

   d. Para una demanda de 5.250 unidades, ¿cuál debe ser el precio unitario?

9. Dadas las ecuaciones $2p + q = 240$ y $p - q = 30$:
   a. Identifique cuál corresponde a oferta y cuál a demanda, explique qué significa sus coeficientes.
   b. Explique para $p = 40$ y $p = 100$ que sucede.
   c. Halle el punto de equilibrio y represente en un mismo plano las dos ecuaciones.
10. Las ecuaciones $q + 2p = 200$ y $-q + 4p = 40$ corresponden a ecuaciones de oferta y demanda. Identifique cada una, encuentre el punto de equilibrio y represéntelas gráficamente.
11. Una máquina se compra por un valor de $18'000.000, si se deprecia linealmente en 15 años:
    a. Exprese el valor de la máquina en función del tiempo.
    b. Calcule el valor de la máquina al final del cuarto año.
    c. ¿En cuántos años la maquinaria tendrá un costo de $12'000.000?
12. Una máquina se deprecia linealmente en 10 años, si en cinco años la depreciación acumulada es de 20 millones y la máquina tiene un valor de salvamento del 20% de su valor inicial:
    a. Exprese el valor de la máquina en función del tiempo.
    b. Calcule el valor de salvamento.
    c. ¿En cuántos años la máquina tendrá un costo de $28'000.000?
13. El agua de un depósito lleno se gasta a un ritmo constante de 4 m^3 por día, si el día 12 el depósito tenía 20 m^3 de agua y el 21 tenía 16,4 m^3:
    a. Exprese la cantidad de agua del depósito en función del tiempo.
    b. ¿Cuánta agua había en el depósito el día 7?
    c. ¿En cuántos días se desocupa el depósito?
14. La temperatura medida en grados Fahrenheit es una función lineal de la temperatura medida en grados Celsius. Si 0°C es igual a 32°F y 30°C es igual a 86° F.

a. Exprese °F en función de °C.

b. Convierta 100°C a Fahrenheit.

c. Convierta 131° Fahrenheit a °C.

15. El valor de un libro se duplica cada 5 años, si el libro fue avaluado hace 20 años en $1.200:

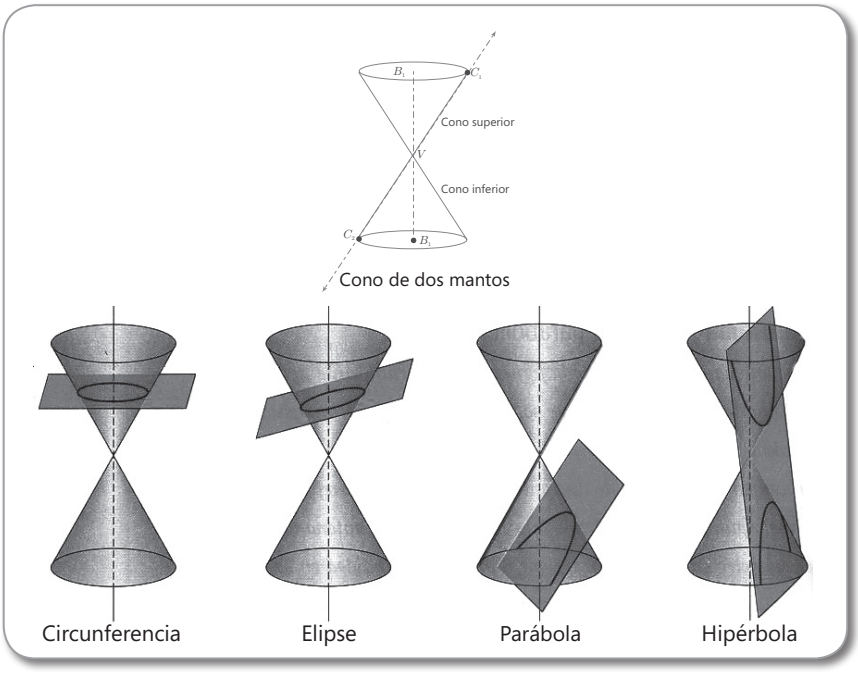
a. ¿Cuál es el valor del libro a los 20 años?, a los 40?

b. ¿Es lineal la relación entre el valor del libro y su edad? Explíquese.

c. Exprese el valor del libro en función del tiempo.

Secciones cónicas

Las secciones cónicas o simplemente cónicas, se obtienen al cortar con un plano un cono circular recto prolongado (cono de revolución de dos mantos, cono superior e inferior). Si se varía la posición del plano se obtiene una *circunferencia*, *una elipse*, *una parábola* o *una hipérbola*, como se observa en la figura siguiente:



Circunferencia
Es la intersección del cono con un plano perpendicular a su eje. En otras palabras es el conjunto k de puntos de un plano, que equidistan de un punto fijo, llamado *centro*, la distancia de este a cualquier punto de la circunferencia se llama *radio*.

Sea $C(h, k)$ el centro de la circunferencia de radio r, en que r representa un número real positivo. Un punto $P(x, y)$ pertenece a la circunferencia si y solo si, su distancia a $C(h, k)$ es igual a r, o sea:

$$k = \{(x,y) \mid \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r\}$$

$$k = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}, \text{ si } h = 0 \quad \text{y} \quad k = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

La anterior se denomina **forma reducida** o **forma canónica** de la ecuación de la *circunferencia*.

Ejemplos

1. Encuentre la ecuación de la circunferencia de radio 4 y centro en:

a) $C(-3,-6)$ y b) $C(0\,,\,0)$.

Solución

a) $(h, k) = (-3,-6)$ y $r = 4$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$[x-(-3)]^2 + [\,y-(-6)]^2 = 4$$

$$(x+3)^2 + (y+6)^2 = 4^2$$

$$(x+3)^2 + (y+6)^2 = 16$$

b) $(h, k)= (0, 0)$ y $r = 4$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

2. Encontrar la ecuación de una circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y = 23$$

Solución

Se debe expresar la ecuación a la forma estándar $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, completando el cuadrado con respecto a x y a y. A partir de esta forma canónica se puede determinar el *centro* y el *radio*.

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y = 23$$

Se completan cuadrados,

$$(x^2 + 6x \quad) + (y^2 - 4y \quad) = 23$$

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 23 + 9 + 4$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$$

$$[x - (-3)]^2 + (y - 2)^2 = 6^2$$

Centro: $C(h,k) = C(-3, 2)$

Radio: $r = \sqrt{36} = 6$

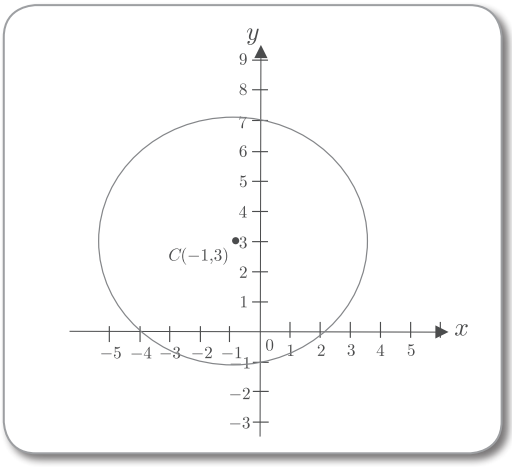
3. Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene los puntos $A(-4, 6)$ y $B(2,0)$ como extremos de un diámetro.
Hacer la gráfica correspondiente.

Solución

Sea $C(h,\ k)$ el centro de la circunferencia cuya ecuación se busca, y por r su radio; como el centro es el punto medio del segmento que une $(-4,\ 6)$ con $(2,\ 0)$, aplicamos la fórmula para el punto medio de un segmento que es: $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$ y $y_3 = \frac{y_1+y_2}{2}$ es decir: $h = \frac{-4+2}{2} = -1$ y $k = \frac{6+0}{2} = 3$ y como r es la distancia entre $C(-1,\ 3)$ y cualquiera de los extremos de diámetro dado, se usa la fórmula de distancia entre los puntos, $(-1,3)$ y $(2,0)$es decir:

$$r = \sqrt{(2+1)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}..$$

Sustituyendo los valores $h= -1$, $k= 3$ y $r = 3\sqrt{2}$ en la ecuación reducida, tenemos: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ se obtiene: $(x-1)^2+(y-3)^2=18$ que es la ecuación buscada.



4. Determine si la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío; si la gráfica es una circunferencia, dé el centro y el radio.

a) $5x^2+5y^2-14x+7y-24=0$

b) $x^2+y^2+6x-2y+10=0$

c) $x^2+y^2+8x-10y+50=0$

Solución

a) La ecuación $5x^2 + 5y^2 - 14x + 7y - 24 = 0$ no es de la forma general, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, pero puede reducirse a ella dividiéndola entre 5; resulta: $x^2 + y^2 - \frac{14x}{5} + \frac{7y}{5} - \frac{24}{5} = 0$, que es equivalente a la ecuación dada. Sumando $\frac{24}{5}$ en ambos miembros de esta ecuación y completando los cuadrados se obtiene:

$$x^2 + y^2 - 14x/5 + 7y/5 - 24/5 = 0,$$

$$(x^2 - \tfrac{14}{5}x + \tfrac{49}{25}) + (y^2 + \tfrac{7}{5}y + \tfrac{49}{100}) = \frac{24}{5} + \frac{49}{25} + \frac{49}{100}, \text{ o sea}$$

$$(x - \tfrac{7}{5})^2 + (y + \tfrac{7}{10})^2 = \tfrac{29}{4}$$

y como esta ecuación es de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, con $r = \frac{29}{4} > 0$, la gráfica de la ecuación dada es una circunferencia de centro $(7/5, -7/10)$ y radio $\frac{1}{2}\sqrt{29}$.

b) Escribiendo la segunda de las ecuaciones propuestas en la forma equivalente: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$, se ve que su gráfica es el punto $(-3,1)$ porque el radio $r = 0$.

c) Escribiendo la tercera de las ecuaciones propuestas en la forma equivalente: $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = -9$, se ve que su gráfica es el conjunto vacío.

Ejercicio 6.2

1. Encuentre la ecuación de la circunferencia de radio $r = 5$ y centro en $C(3, -2)$.
2. Encuentre la ecuación de la circunferencia de radio $r = 5$ y centro en $(3, -2)$.
3. Encuentre el centro y radio de cada círculo:
   a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$
   b) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$
   c) $(x + 2) + y^2 = 25$

4. Encuentre el centro y radio de cada círculo:
   a) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 15 = 0$
   b) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$
   c) $x^2 + y^2 - 4x = 0$
5. Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene los puntos $A(1, 2)$ $B(3, 6)$, como extremos de un diámetro.
6. Trace la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$
   a) ¿Es esta una relación?
   b) La gráfica $y = \sqrt{25 - x^2}$. Encuentre el dominio y la imagen.
   c) La gráfica $y = -\sqrt{25 - x^2}$. Encuentre el dominio e imagen. ¿Es una función?
7. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(7, 6)$ y que pasa por el punto $A(2, 2)$.
8. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(2, -4)$ y que es tangente al eje y.
9. Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. Hallar la ecuación.
10. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro en el punto $(-4, -1)$ y que es tangente a la recta $3x + 2y - 12 = 0$
11. Halle la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - 2y - 24 = 0$, $2x - 7y + 9 = 0$.
12. Halle el área del círculo cuya ecuación es:
    $9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0$

Parábola

Una parábola es un conjunto K de puntos en el plano que tiene la propiedad de que P pertenece a K, si y solo si, P equidista de un punto fijo F y una recta fija $D'D$ del plano. El punto fijo se llama *foco* de la parábola y la recta fija $D'D$, su *directriz*; la recta FA que pasa por F y es perpendicular a $D'D$, recibe el nombre de *eje* de la parábola, es decir:

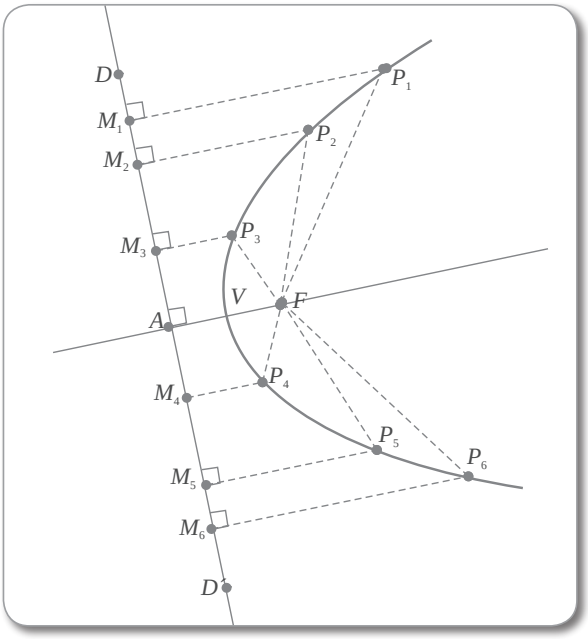
Sea P un punto fuera de la directriz $D'D$ y sea M el punto de intersección de esta con una perpendicular a ella que pasa por P; entonces, si K es la parábola determinada por el *foco* F y la directriz $D'D$, el punto P pertenece al conjunto. Cualquier punto P de la parábola pertenece al conjunto K, si y solo si:

$$|PF_1| = |PF_2| \qquad 1)$$

El punto medio V del segmento AF es un punto de la curva porque $|VF| = |VA|$; dicho punto recibe el nombre de *vértice de la parábola*.

Si designamos por $2p$ la distancia dirigida de A a F, o sea:

$2p = \overline{AF}$ ó $p = \overline{VF}$, así las coordenadas de F son $(p,0)$ y las de A son $(-p,0)$, en tanto que la directriz es la gráfica de la relación $\{(x,y)|\ x = -p\}$ si p es positivo, el foco está sobre la parte positiva del eje x, y la parábola se abre hacia la derecha y si p es negativo, el foco queda en la parte negativa del eje x y la curva se abre hacia la izquierda.



Todo segmento de recta que pasa por el foco y cuyos extremos son puntos de la curva, se llama *cuerda focal* y si es perpendicular al eje, recibe el nombre de *lado recto* (Como $|RL|$ en las figuras 1 y 2 de todos los casos).

El lado recto, $|RL| = |4p|$ y $|LF| = |FR| = |LS| = 2p$

La parábola K, de foco $(p, 0)$, con vértice en el origen y cuya directriz es la gráfica de: $\{(x,y)| y = -p\}$, es la gráfica de: $y^2 = 4px$, $p>0$.

Sea K la parábola y $P(x,y)$ un punto de plano, entonces por (1): $P(x,y)\in K \Leftrightarrow |PM|=|PF|$, y como $|PM|=|x-(-p)|=|x+p|$ y $PF| = \sqrt{(x-p)^2+y^2}$, resulta que: $P(x,y) \in K \Leftrightarrow |x+p| = \sqrt{(x-p)^2+y^2}$, y haciendo operaciones tenemos que: $P(x,y)\in K \Leftrightarrow y^2 = 4px$, $p>0$. Abre hacia la derecha figura 1.

De manera similar, $P(x,y)\in K \Leftrightarrow y^2 = 4px$, $p<0$. Abre hacia la izquierda figura 2.

Para obtener la ecuación de la parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo debemos tener en cuenta que:

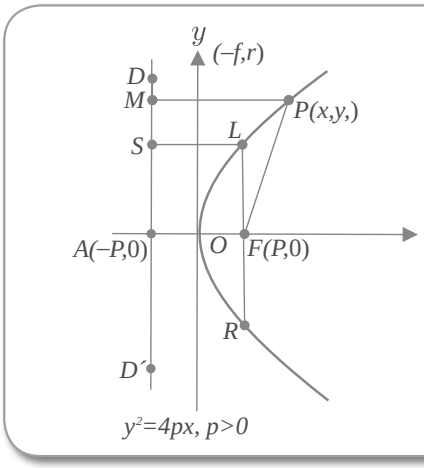


Figura 1

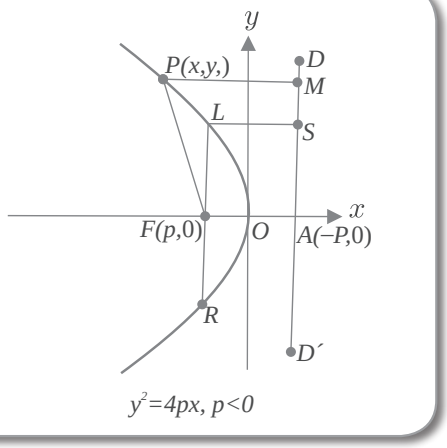


Figura 2

- La parábola K, de foco (0,p), con vértice en el origen y cuya directriz es la gráfica de: $\{(x, y)|y=-p\}$, es la gráfica de: $x^2 = 4py$, $p>0$. Según esta definición de parábola las distancias d_1 y d_2 son iguales, $(d_1=d_2)$, de donde, $d_1 = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}$ y $d_2 = \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$ igualando las ecuaciones tenemos: $\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$ y elevando al cuadrado: $(x-0)^2+(y-p)^2=(x-x)^2+(y+p)^2$ $x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$ y simplificando,

$P(x,y)\in K \Leftrightarrow x^2 = 4py$, $p>0$. Se abre hacia arriba figura 1.

De forma similar, $P(x,y)\in K \Leftrightarrow x^2 = 4py$, $p<0$. Se abre hacia abajo figura 2.

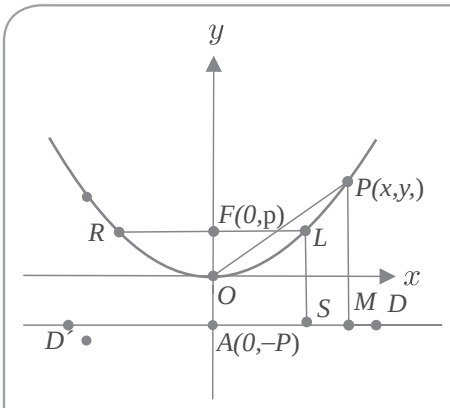


Figura 1

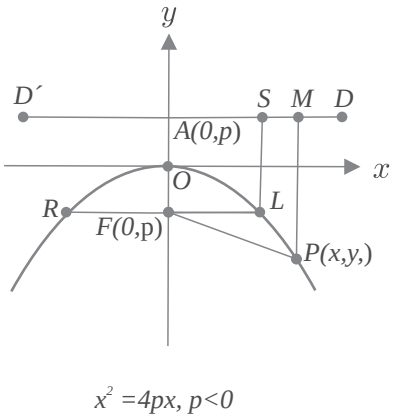


Figura 2

- Una parábola de eje paralelo al eje x, con vértice en $V(h,\ k)$ y con p como distancia dirigida del *vértice al foco*, es la gráfica de: $(x-y)^2 = 4p(y-k)$.

- Si el eje de la parábola es paralelo al eje y, entonces las gráficas de: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ si $p>0$ (figura 1) y $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ si $p<0$ (figura 2) son:

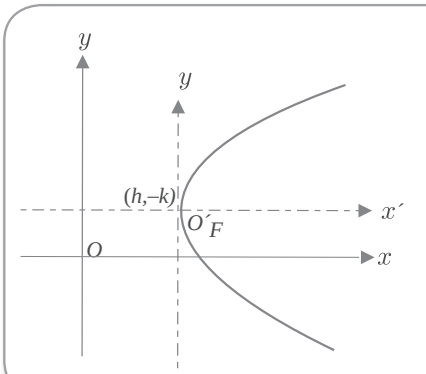


Figura 1

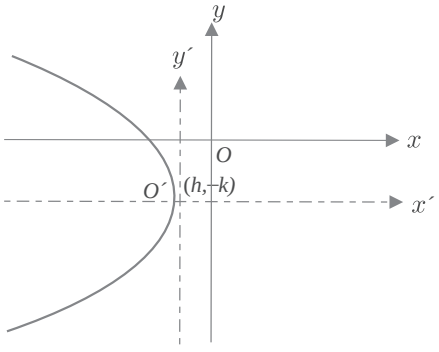


Figura 2

Ahora si las parábolas están en centro $(0,0)$ las ecuacioones son:

- Las ecuaciones son $y^2 = 4px$, si $p>0$ la parábola está abierta a la derecha figura 1.
- si $p<0$ la parábola está abierta a la izquierda figura 2, con vértice $V(0,0)$, foco $F(p,0)$ y ecuación de la directriz $x = -p$.

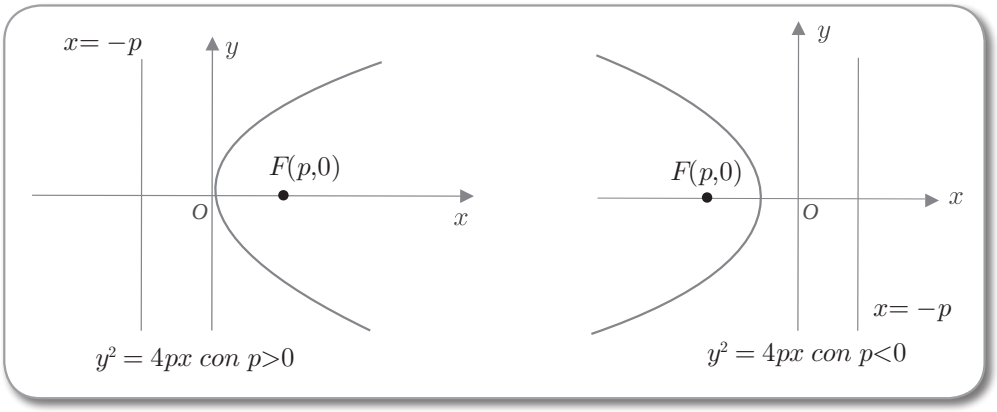
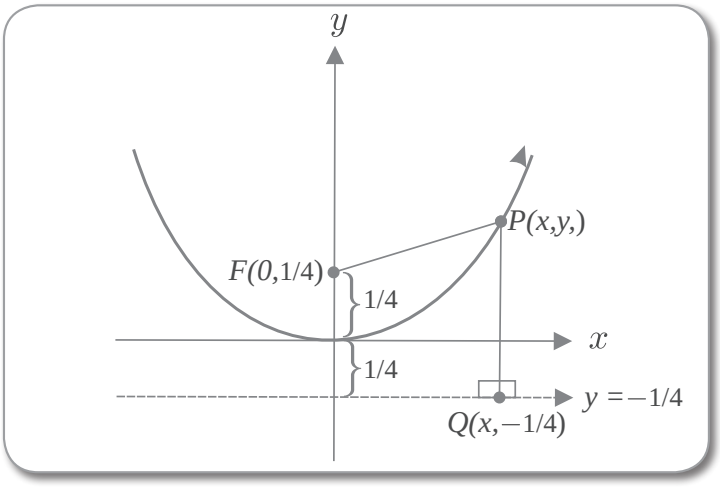


Figura 1 Figura 2

Ejemplo

1. Encuentre el vértice, los focos y la ecuación de la directriz de la parábola $y = x^2$.

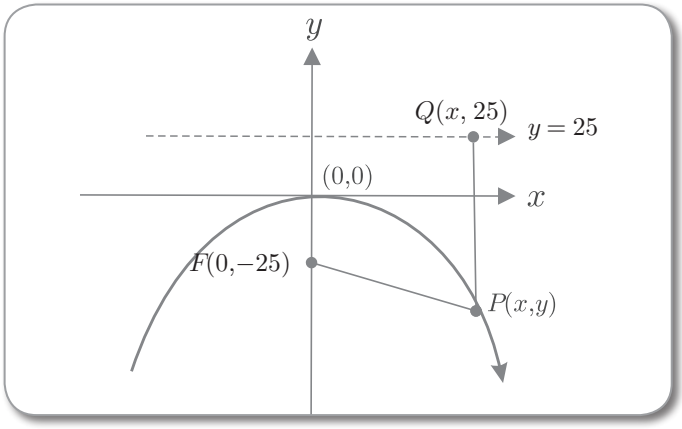


Solución

En primer lugar la ecuación de la parábola tiene la forma, $x^2 = 4py$ con $p>0$, por tanto, el foco está sobre el eje y y se abre hacia arriba. Dado que el coeficiente de y es 1, deducimos que $4p = 1$,

y $p = \frac{1}{4}$, por tanto, las coordenadas del foco son $F(0\,,\,\frac{1}{4})$ y la directriz es $y = -\frac{1}{4}$. El vértice es $V(0,\,0)$.

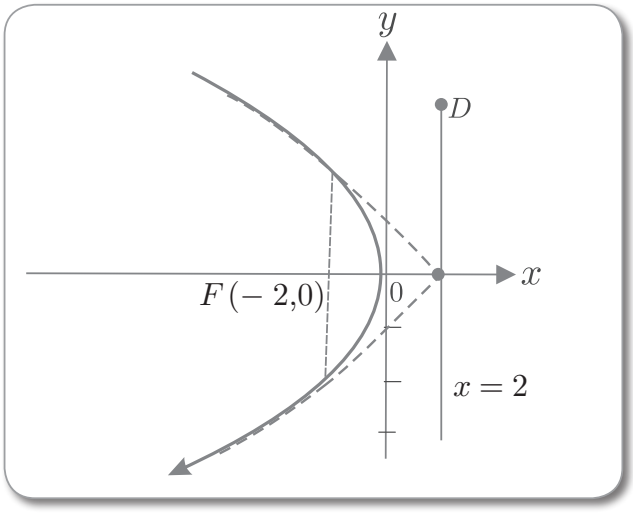
2. Encuentre el vértice, los focos y la directriz de la parábola $x^2 = -100y$.



Solución

El coeficiente de y es 100, por lo tanto $4p = 100$, de donde $p = \frac{100}{4} = 25$. Por tanto, concluimos que las coordenadas del foco son: $F(0,-25)$, y la ecuación de la directriz es $y = 25$, con vértice en $(0,\,0)$.

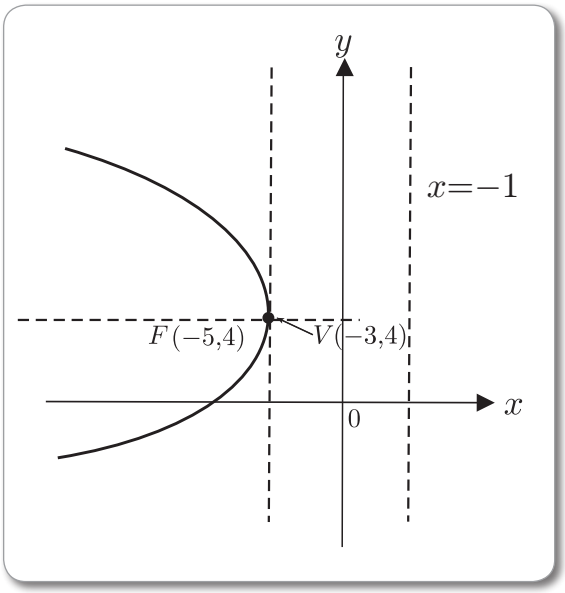
3. Encuentre los vértices, el foco y la ecuación de la directriz de la parábola, $y^2 = -8x$; construya la curva.



Solución

La ecuación $y^2 = -8x$ es de la forma $y^2 = 4px$ con $p = -2$, de modo que el vértice está en el origen. el foco es $F(-2,0)$ y la ecuación de la directriz es $x = 2$.

4. Dé la ecuación de la parábola, cuyo vértice está en $(-3, 4)$ y cuyo foco es $(-5, 4)$, y la ecuación de la directriz.



Solución

Como el vértice y el foco de una parábola están sobre su eje y, como en la parábola dada, estos puntos tienen la misma ordenada 4, se infiere que el eje es horizontal, como se ve en la figura siguiente, entonces como $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, entonces la ecuación buscada es de la forma: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

Como p siempre es igual a VF, en este caso se tiene:

$$p = -5-(-3) = -2$$

y haciendo,

$$h = -3,\ k = 4 \text{ y } p = -2$$

En la ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, se obtiene: $(y-4)^2 = -8(x+3)$ como ecuación de la parábola dada, la directriz es vertical y está a dos unidades a la derecha del vértice $V(-3, 4)$, por lo que la ecuación de la directriz es $x = -1$.

Ejercicio 6.3

1. Determine el vértice, focos y la ecuación de la directriz de la siguientes parábolas:
   a. $y^2 = 16$
   b. $x^2 = 10y$
   c. $3x^2 + 5y = 0$
   d. $y^2 + 6x = 0$
2. Determine vértice, foco y ecuación de la directriz: $y^2 = 16x$.
3. Halle la ecuación de la parábola de vértice en el origen que satisface la ecuación dada:
   a. Con foco $(7,0)$.
   b. Con foco en la parte positiva del eje y y lado recto de longitud 8.
   c. Qué pasa por el punto $(-2, -4)$ y tiene foco en el eje x
   d. Qué tiene directriz la recta $y + 4 = 0$

4. Encuentre ecuación, foco, vértice y ecuación de la directriz de las siguientes parábolas:

   a) $y^2 - 2y - 4x + y = 0$

   b) $x^2 + 20y - 40 = 0$

   c) $3x^2 - 4x - 6y + 8 = 0$

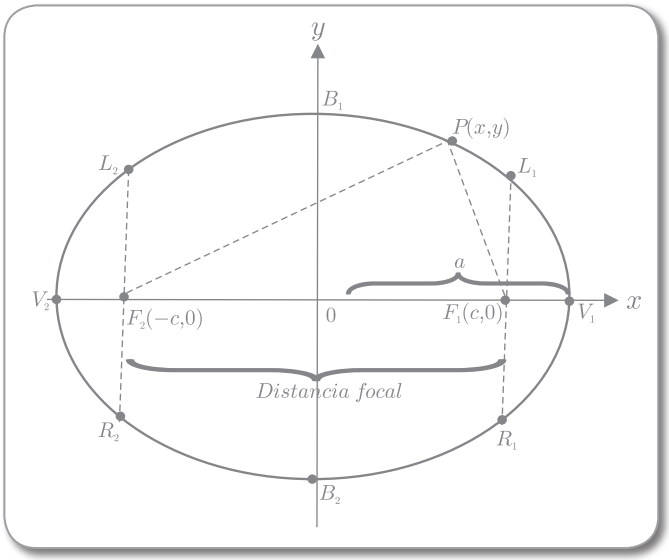
5. Halle la ecuación de la parábola cuyo vértice está en $(-3, 4)$ y foco $(-5, 4)$.

6. Halle la ecuación de la parábola cuyo vértice es $(-3, 4)$ eje paralelo al eje x y pasa por el punto $(3, 1)$.

Elipse

Es la intersección del cono con un plano inclinado ligeramente. En otras palabras, sean F_1 y F_2 dos puntos fijos y $2a$ un número positivo dado. La elipse es el conjunto K de puntos del plano que tienen la propiedad, de que un punto P pertenece a K si, y solo si, la suma de las distancias $|PF_1|$ y $|PF_2|$ entre P y los puntos fijos F_1 y F_2, es igual a 2 a es decir, cualquier punto P de la elipse pertenece al conjunto K, si y solo si:

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a \qquad 1)$$



Los puntos fijos se llaman *focos* de la elipse y la distancia que los separa se representa usualmente por $2c$; es fácil ver en 1), que $2a>2c$, o sea $a>c$.

La recta que pasa por los *focos* recibe el nombre de *eje focal*; los puntos V_1 y V_2 en que la curva encuentra al *eje focal*, se llaman vértices; el segmento $V_1\ V_2$ es el *eje mayor* de la elipse y el punto medio del segmento citado, es su *centro*.

Para establecer la ecuación de la elipse se introduce un sistema coordenado en el plano de la curva, de modo que el origen esté en el centro y el eje x coincida con el *eje focal*; los focos son ahora los puntos $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$, como se ve en la figura siguiente:

Si K representa a la elipse y $P(x,y)$ es un punto del plano se sabe por (1) que: la suma de las distancias $|PF_1| + |PF_2|$ es igual a $2a$ es decir:

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a \quad \text{y como,}$$

$|PF_1| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ y $|PF_2| = |\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ se tiene que:

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$, y resolviendo adecuadamente estas ecuaciones, se obtiene que: $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ elevando al cuadrado ambos lados y simplificando:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - (x+c)^2 - y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 - x^2 - 2cx - c^2$$

Eliminando términos, $a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$

Elevando nuevamente al cuadrado obtenemos:

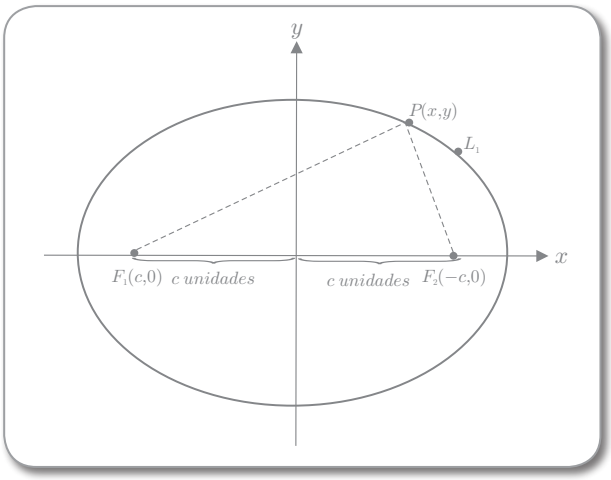
$$a^2\,[(x-c)^2+y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2\,x^2$$

$$(a^2-c^2)\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación por $a^2(a^2-c^2)$, tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

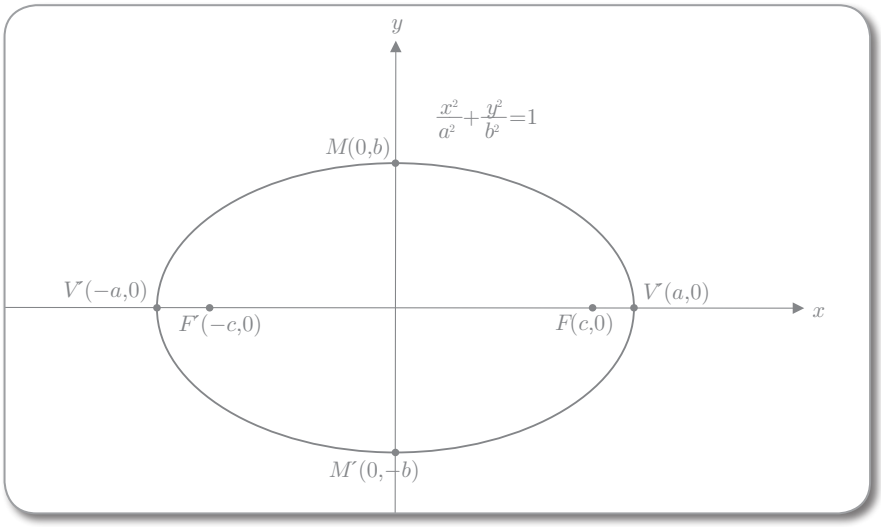
Puesto que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado, observamos que en el triángulo $\triangle F_1PF_2$:



$|PF_1| + |PF_2| = 2a > 2c$ ó $a > c$, como a y c son positivos entonces, $a^2 - c^2 > 0$, por lo tanto podemos tomar a $b^2 = a^2 - c^2$ para obtener la ecuación de la elipse así:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por tanto, la elipse K de focos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, en la cual $2a$ es la suma de las distancias de un punto cualquiera de ella a ambos focos es la gráfica de: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en donde b es un número positivo definido por, $b^2 = a^2 - c^2$.



Las abscisas en el origen de la ecuación (2), se hallan haciendo $y = 0$, y resolviendo luego respecto a x; sus valores son a y $-a$, y consecuentemente, las coordenadas de V_1 y V_2 son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ respectivamente, lo que da $2a$ como longitud del *eje mayor*.

El segmento B_1B_2, delimitado por la elipse sobre la perpendicular al *eje mayor*, trazada por su centro, recibe el nombre de *eje menor*; las ordenadas en el origen de la elipse (2), son b y $-b$, de modo que las coordenadas de B_1 y B_2 son $(0, b)$ y $(0, -b)$ respectivamente, lo que da $2b$ como *longitud del eje menor*.

Recordando que en la ecuación (2) el número a es mayor que b.

El centro está en el origen $C(0, 0)$ y el *eje mayor* está ahora a lo largo del eje y, y el *eje menor* a lo largo del eje x.

Ahora presentamos los siguientes ejemplos:

Ejemplos

1. Encuentre la ecuación de la elipse que tiene sus focos en $F_1(-2, 0)$ y $F_2(2,0)$, cuyo semieje menor tiene una longitud de dos unidades.

Solución

Como el semieje menor tiene dos unidades de longitud significa que $b = 2$, además, como las coordenadas de los focos son $(-2,0)$ y $(2,0)$, entonces $c = 2$, solo nos falta hallar el valor de a.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, entonces $a^2 = 4 + 4 = 8$; $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ por lo tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

2. Encontrar los focos y los vértices de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solución

En primer lugar dividimos la ecuación por 36 para llevarlo a la forma estandar:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1$$

Simplificando nos queda: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

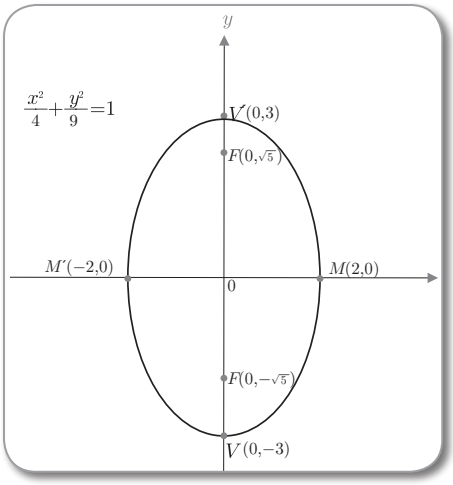
Ahora comparando con la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, podemos concluir que $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, por lo tanto, podemos calcular los focos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2 \\ c^2 &= 9 - 4 \\ c &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Además, como $a>b$ es decir $3>2$, podemos decir que los focos están ubicados sobre el eje x, por lo tanto, las coordenadas de los focos son $(\sqrt{5}\,, 0)\ (-\sqrt{5}\,, 0)$.

Como $a = 3$ y $b = 2$ los vértices de la elipse son $(3,0)\ (-3,0)$.

3. Encontrar los focos y vértices de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.



Solución

Dividiendo los dos miembros por 36 como en el ejemplo anterior, nos queda la ecuación:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

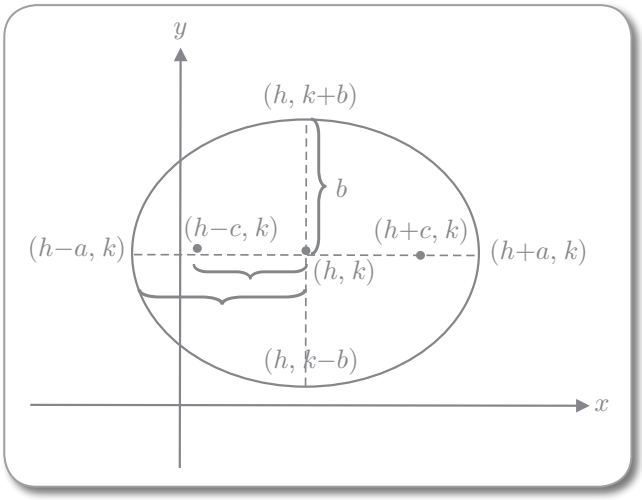
Como la ecuación tiene la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde a es el semieje mayor y b el semieje menor, los focos están situados sobre el eje y, de esta forma $b = 2$ y $a = 3$, donde:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5, \text{ por tanto } c = \pm\sqrt{5}$$

Los focos son los puntos $(0, -\sqrt{5})$ y $(0, \sqrt{5})$, además los vértices son: $(0,3)$ y $(0,-3)$

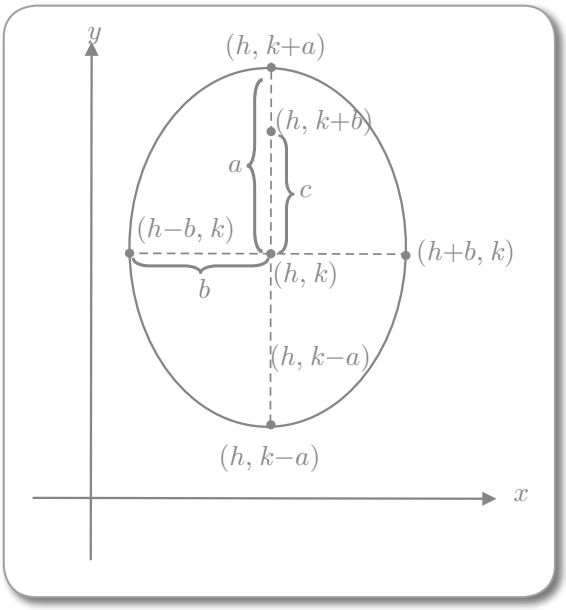
Ahora, si la elipse tiene centro en (h, k), cuya distancia focal es $2c$ y cuyo *eje mayor es* horizontal y de longitud $2a$, es la gráfica de:

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ en donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ 4)



Así mismo, si la elipse tiene centro en (h, k), cuya distancia focal es $2c$ y cuyos *ejes mayores* vertical y de longitud $2a$, es la gráfica de:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \text{ en donde, } b = \sqrt{a^2 - c^2} \qquad 5)$$



Ejemplos

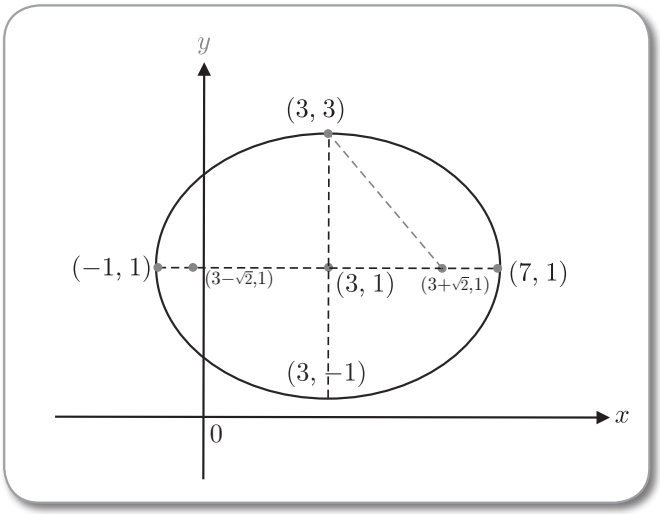
1. Encuentre los vértices, los focos y la gráfica de la elipse:

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Solución

En este caso se trata de una elipse centrada en $(3, 1)$, donde $h = 3$ y $k = 1$, esto significa que la elipse se traslado 3 unidades horizontalmente hacia la derecha y 1 unidad verticalmente hacia arriba.

Según la ecuación $a^2 = 16$ ó $a = 4$ y $b^2 = 1$ ó 1, eje mayor horizontal, y semieje $a = 4$, por lo que los vértices son los puntos $(7,1)$, $(-1,1)$ y los extremos del eje menor son: $(3,3)$,$(3,-1)$. Los focos se encuentran a una distancia $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ a la derecha y a la izquierda del centro, y son por tanto los puntos: $(3 \pm 2\sqrt{3},1)$.

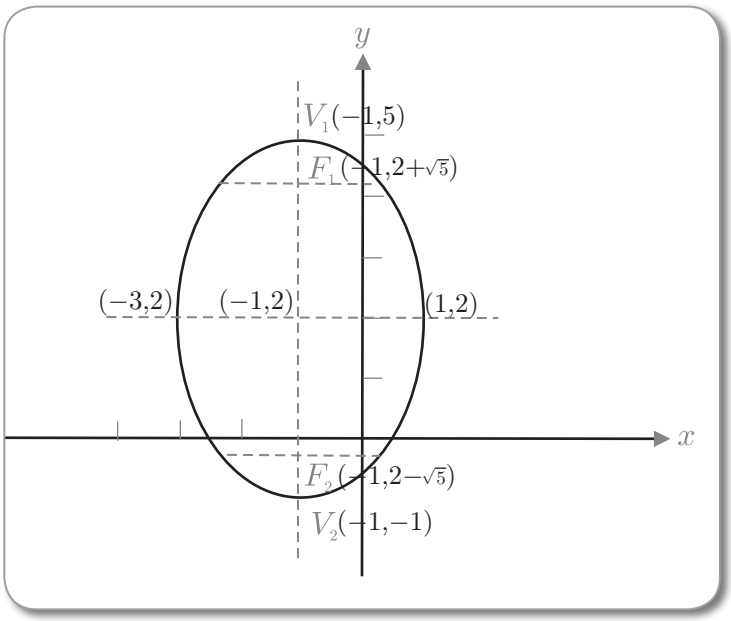


2. Encuentre los vértices, los focos y los ejes mayor y menor de la elipse:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Solución

En este caso se trata de una elipse centrada en $(-1, 2)$, donde $h = -1$ y $k = 2$, esto significa que la elipse se traslado 1 unidad horizontalmente hacia la izquierda y 2 unidades verticalmente hacia arriba.



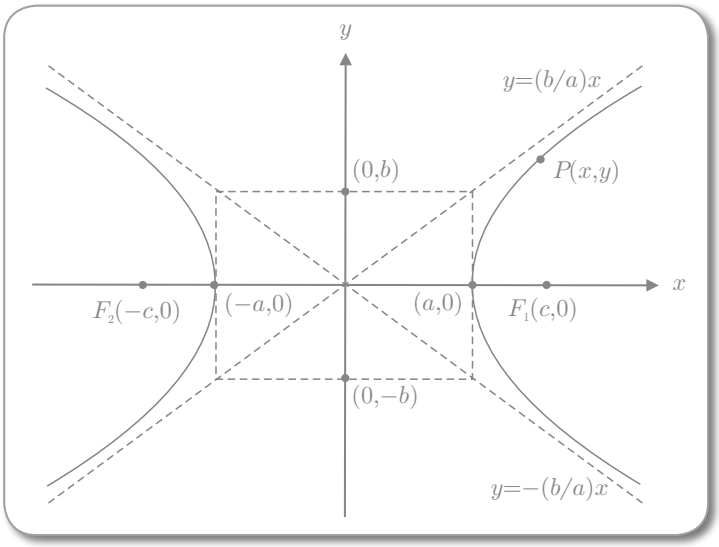
Según la ecuación $a^2 = 9$ ó $a = 3$ y $b^2 = 4$ ó $b = 2$, el eje mayor es vertical, y semieje $a = 4$, $b = 2$, por lo que los vértices son los puntos $(-1,5)$, $(-1,-1)$ y los extremos del eje menor son: $(-3, 2)$, $(1, 2)$. Los focos se encuentran a una distancia $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$ arriba y abajo del centro, y son por tanto los puntos: $(-1, 2 \pm \sqrt{5})$. La longitud del eje mayor es 6 y la longitud del eje menor es 4.

Ejercicio 6.4

1. Encontrar el vértice y los focos de la siguiente elipse cuya ecuación es: $16x^2 + 25y^2 = 400$
2. Encontrar vértices y focos de la ecuación: $16x^2+25y^2= 400$.
3. Halle centro, vértice y focos de las siguientes elipses:
   a) $25x^2 + 16y^2 = 400$
   b $25x^2 + 4y^2 = 100$
   c) $3x^2 + 4y^2 = 400$
4. Halle la ecuación de la elipse con centro en el origen, que satisfaga las condiciones dadas:
   a) La longitud de eje mayor 10 y la de eje menor 8, los focos están sobre el eje y.
   b) El lado recto mide 32/7 y uno de los extremos del eje menor está en (4,0).
   c) El eje mayor mide 16, los focos están sobe el eje x y la curva pasa por el punto (4,3).
5. Encuentre los vértices, focos y centro de la elipse: $4x^2+ 16y^2 - 8x - 96y = -84$
6. Encuentre los vértices, focos y centro de la elipse: $16x^2+ 4y^2 + 96x - 8y = -84$

Hipérbola

Una hipérbola es el conjunto de puntos en un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados **focos** que están también en el plano, es un número real positivo.



Los focos son $F_2(-c,0)$ y $F_1(c,0)$ y la coordenada $(0,0)$ es el origen de la hipérbola (centro de la hipérbola).

Llamemos $d(P,F_1)$ su distancia del punto $P(x,y)$ al punto $F_1(c,0)$ y $d(P,F_2)$ distancia del punto $P(x,y)$ el punto $F_2(-c,0)$

De acuerdo con la definición de hipérbola mencionada anteriormente, significa que las diferencias de las distancias:

$$d(\mathrm{P}_1,\mathrm{F}_1) - d(\mathrm{P}_1,\mathrm{F}_2) \text{ o bien,}$$

$$d(\mathrm{P}_1,\mathrm{F}_2) - d(\mathrm{P}_1,\mathrm{F}_2)$$

Debe ser igual a un número real positivo que denominaremos $2a$, en otras palabras:

$$d(\mathrm{P}_1,\mathrm{F}_1) - d(\mathrm{P}_1,\mathrm{F}_2) = 2a$$

$$d(\mathrm{P}_1,\mathrm{F}_2) - d(\mathrm{P}_1,\mathrm{F}_1) = 2a$$

Estas ecuaciones se pueden remplazar por una ecuación única de la siguiente manera:

$$d(\mathrm{P},\mathrm{F}_1) - d(\mathrm{P},\mathrm{F}_2)| = 2a$$

$$\text{donde, } d(\mathrm{P},\mathrm{F}_1) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\text{y } d(\mathrm{P},\mathrm{F}_2) = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$

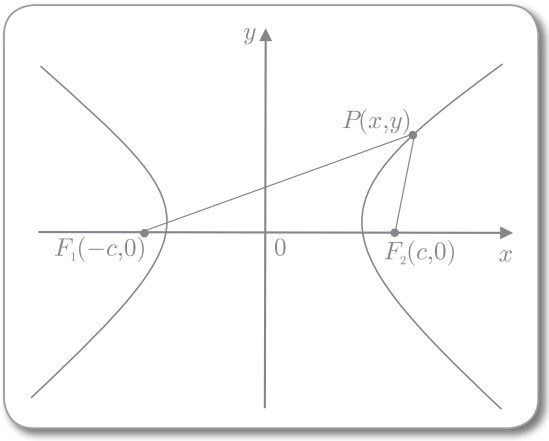
De esta manera la ecuación de la hipérbola se puede escribir así:

$$| \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} | = 2a$$

Resolviendo adecuadamente esta ecuación, como se hizo con la elipse y simplificando obtenemos lo siguiente:

$$(\mathrm{c}^2 - a^2)x^2 - a^2\,y^2 = a^2(c^2 - a^2) \qquad 1)$$

Además, en la figura el triángulo $\triangle \mathrm{PF}_1\mathrm{F}_2$:



Vemos que la diferencia de las distancias $d(P,F_1)$ y $d(P,F_2)$ es menor que la distancia entre los focos es decir:

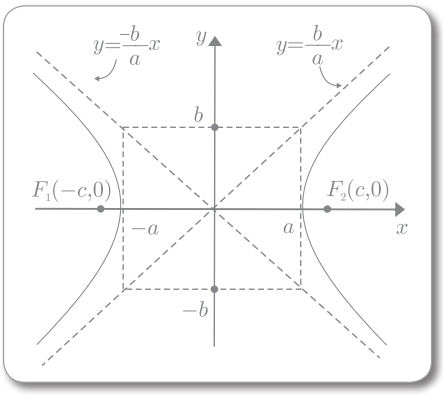
$$2a = |d\,(\mathrm{P},\,\mathrm{F}_1) - d(\mathrm{P},\,\mathrm{F}_2)\,| < 2c$$

Por lo tanto $2a < 2c$ ó $a < c$ en consecuencia $c^2 - a^2 > 0$, y sustituyendo la ecuación (1) se simplifica así:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2\,b^2 \qquad 2)$$

Dividida 2) entre a^2b^2, se obtiene: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ que es la ecuación de la hipérbola.

Elementos de la hipérbola



Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Tenemos los siguientes elementos:

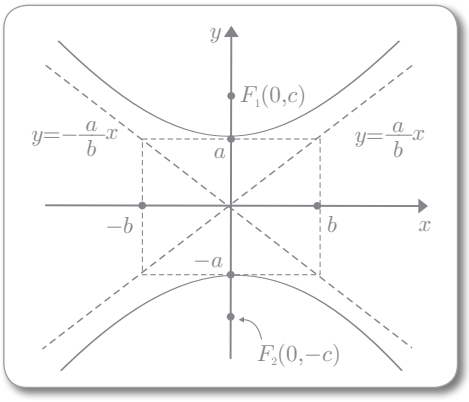
Vértices: $(-a,0)$, $(a,0)$,

Eje terminal: $2a$

Asíntotas: $y = \pm \frac{b}{a} x$

Focos: $[(-c,o)\ (c,0)]$ donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Ahora podemos hacernos la siguiente pregunta. ¿Qué sucede con los elementos de la hipérbola si la misma está sobre el eje y?



Como observamos en la figura, los elementos de la hipérbola son:

Ecuación de la hipérbola: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Vértices: $[(0,a)\ (0,-a)]$

Longitud Vertical: $2a$

Asíntotas: $y = \pm \frac{a}{b} x$

Focos: $[(o,c)\ (0,-c)]$ donde: $c^2 = a^2 + b^2$

Ejemplo

1. Determine los vértices, los focos y las asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica:

   $4x^2 - 9y^2 = 36$

Solución

En primer lugar, dividamos la ecuación a los dos lados por 36 para llevarla a la forma estándar: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, es decir: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

Como el término x^2 es mayor que cero significa que la hipérbola tiene eje transversal horizontal, los vértices son $[(3,0), (-3,0)]$ ya que $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$.

Ahora, calcular el valor de para hallar los focos:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Así los focos son: $[(\sqrt{13},0),(-\sqrt{13},0)]$

Como $a = 3$ y $b = 2$ las asíntotas son:

$$y = \pm \frac{2}{3} x$$

2. Determine los vértices focos y asíntotas de la siguiente hipérbola y trace su gráfica.

$$x^2 - 36y^2 = -36.$$

En primer lugar escribimos la ecuación en forma estándar, dividiéndola por -36, quedando así:

$y^2 - \frac{x^2}{36} = 1$. Como y^2 es mayor que cero, esto significa que la hipérbola tiene eje *transversal* vertical, es decir que sus focos y vértices están sobre el eje y.

Sus vértices son: $[(0,1), (0,-1)]$, ya que: $a^2 = 1$ y $b^2 = 36$

Ahora calculando el valor de c tenemos lo siguiente:

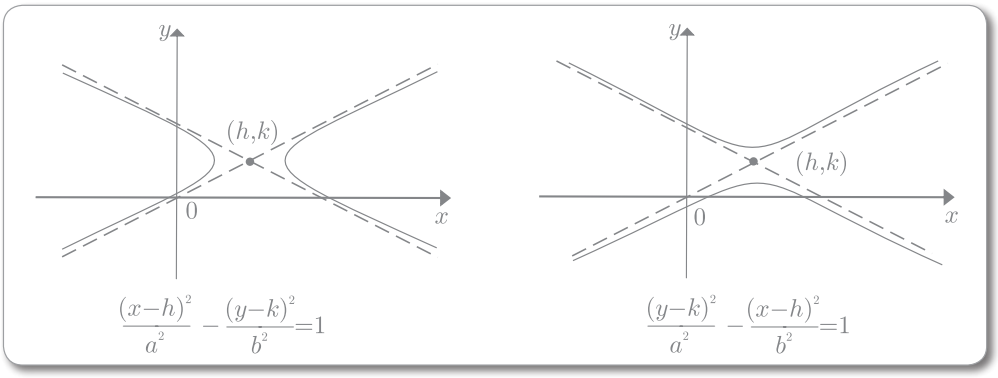
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$$

Por tanto, los focos son $[(0, -\sqrt{37}), (0, \sqrt{37})]$ como $a=1$ y $b=6$ las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \pm \frac{1}{6} x$$

Hipérbola trasladada del origen al centro (h,k)

Las hipérbolas trasladadas a centro (h,k), significa que la hipérbola que está en centro $(0,0)$, corre h unidades en forma horizontal (derecha o izquierda) y k unidades en forma vertical (arriba o abajo) como se muestra en la siguiente figura:



3. Determine centro, vértices, focos, ecuaciones de las asíntotas y la ecuación canónica de la hipérbola:

$$9\,x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$$

Solución

En primer lugar, se ordena la ecuación y se completan cuadrados en x y y.

$$9\,x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$$

$$9\,(x^2 - 4x + \quad) - 4\,(y^2 + 6y + \quad) = 36$$

$$9\,(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 + 6y + 9) = 36 + 36 - 36$$

$9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 36$, dividiendopor 36

$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$, hipérbola trasladada.

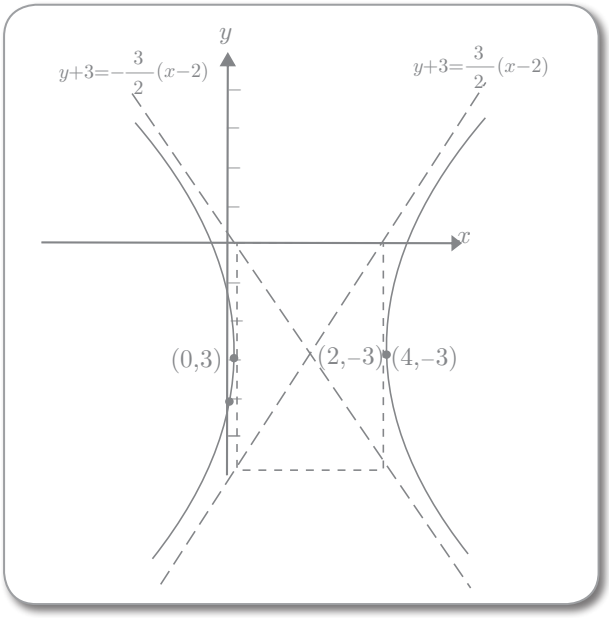
Es una hipérbola con centro $(2,-3)$ con eje transversal horizontal.

Los vértices están en $(4,-3)$y en $(0,-3)$.

Las pendientes de las asítotas son: $\pm\frac{b}{a} = \pm\frac{3}{2}$.

Las ecuaciones de las asíntotas son: $y + 3 = \pm\frac{3}{2}(x - 2)$.

como $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ entonces las coordenadas de los focos son: $(2-\sqrt{13}, -3)$ y $(2+\sqrt{13}, -3)$



Ejercicio 6.5

1. En cada uno de los ejercicios se da la ecuación de la hipérbola. Determine el centro, los vértices y los focos:

   a) $3x^2 - 4y^2 = 48$ b) $4y^2 - 5x^2 = 20$ c) $4x^2 - 9y^2 = 36$

2. En cada uno de los ejercicios, halle la ecuación de las hipérbolas con centro en el origen, que satisfaga las condiciones dadas:

   a) El eje transverso es horizontal y mide 6, la curva pasa por el punto $(5,3)$

   b) El lado recto mide 20 y uno de los vértices está en $(4,0)$.

   c) El eje transverso es horizontal y la curva pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(7,6)$.

   d) Un vértice es (4,0) y uno de los focos está en $(-5, 0)$.

3. En cada uno de los ejercicios encuentre el vértice, los focos y las asíntotas de la hipérbola:

a) $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$

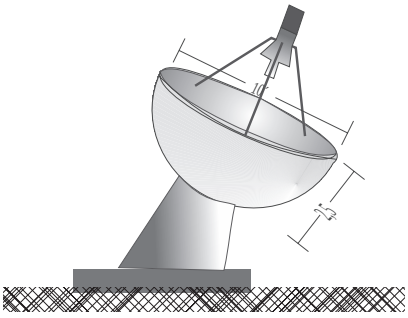
b) $9x^2 - 4y^2 - 54x - 10y + 29 = 0$

c) $4x^2 - y^2 + 24x + 4y + 28 = 0$

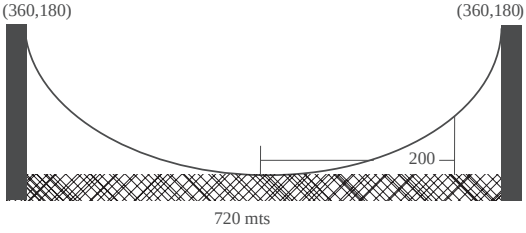
4. Si el Sol está situado en el centro de un sistema de coordenadas y la Tierra está situada en el eje x positivo. ¿Cuál es la ecuación de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra?

5. Al diseñar una máquina, un ingeniero necesita perforar un orificio cuyo centro esté en 0.8 cm, directamente, por arriba de un orificio específico. Si el diámetro del orificio es de 1.5 cm, encuentre la ecuación de este.

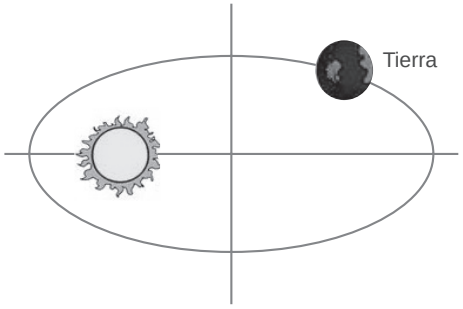
6. El interior de una antena de televisión es un disco en forma de paraboloide (finito) de 10 pies de diámetro y de profundidad 2.5 pies, como lo muestra la siguiente figura. Encontrar la distancia del centro del disco hasta el foco.



7. Un ingeniero civil construye un puente colgante, los cables describen una forma parabólica, las columnas que sostienen el puente se elevan 180 metros por arriba de la superficie de la carretera a 720 metros entre sí. ¿Cuál es la altura del cable por arriba de la superficie de la carretera en un punto a 200 metros del centro del puente?

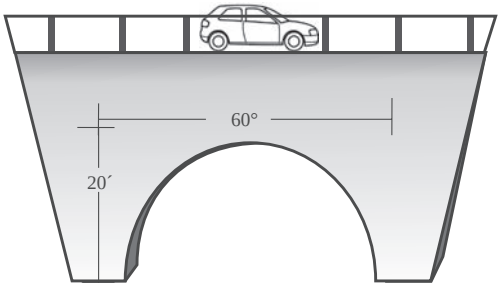


8. La órbita de la Tierra es una elipse, con el Sol, en uno de sus focos. La longitud del eje mayor mide 2.987×10^8 Km., y su razón es $\frac{c}{a} = \frac{1}{59}$, ¿Cuál es la longitud del eje mayor?

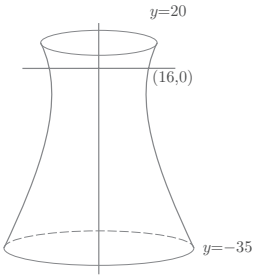


9. El diámetro interior de un tubo circular mide 12 pulgadas, un extremo del tubo está cortado en un ángulo de 60°, como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuáles son las longitudes del eje mayor y menor?

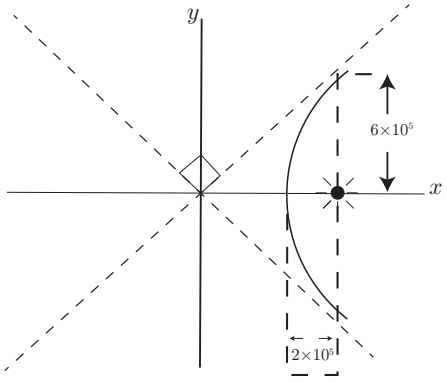
10. El arco de un puente es semielíptico con el eje mayor horizontal, la base del arco mide 60 pies y la longitud de la parte más alta mide 20 pies por arriba de la carretera horizontal, como se muestra en la siguiente figura. Encuentre la altura del arco a 12 pies por arriba del centro de la base.



11. La forma de un recipiente semeja una hipérbola, como se muestra en la figura siguiente, si las asíntotas son las rectas definidas por $y = 2.5x$ y $y = -2.5x$
Encuentre la ecuación de la hipérbola



12. Un cometa que sigue una trayectoria hiperbólica con respecto al Sol, su punto más próximo al Sol (perihelio) está a una distancia de 200.000 km. Cuando la línea del cometa al Sol es perpendicular al eje focal de la orbita, el cometa está a 600.000 km del Sol. Calcule a,b,c,d, y e.



13. Un avión supersónico se desplaza a velocidad constante, produce una onda de choque en forma de cono, si la trayectoria del avión es paralela al suelo, la intersección del cono con el suelo tiene una forma hiperbólica. Encuentre la ecuación de la hipérbola si el centro está en el origen de un sistema de coordenadas, con el vértice en $(-84,0)$ y la hipérbola pasa por el punto $(-252, 60\sqrt{3})$.?.

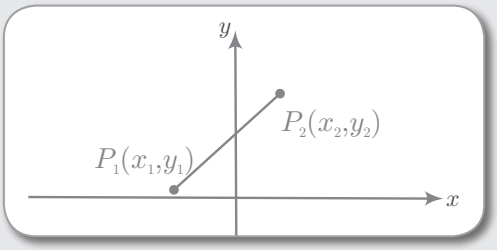
Resumen del capítulo 6

Punto medio: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Condición para rectas paralelas: $m_1 = m_2$

Condición para rectas perpendiculares: $m_2 = \frac{-1}{m_1}$

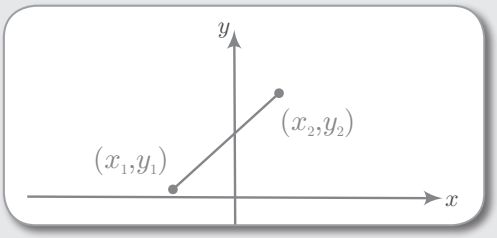
Distancia entre dos puntos



$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

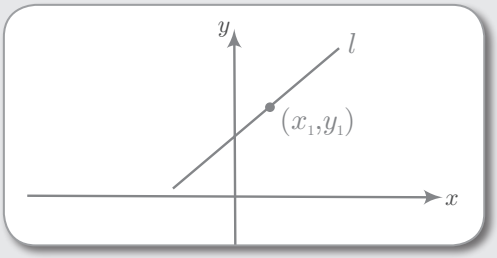
Pendiente m de una recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad x_1 \neq x_2$$



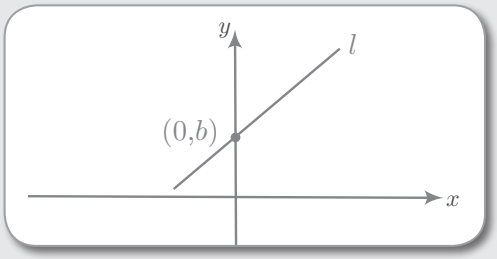
Forma punto- pendiente de una recta

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



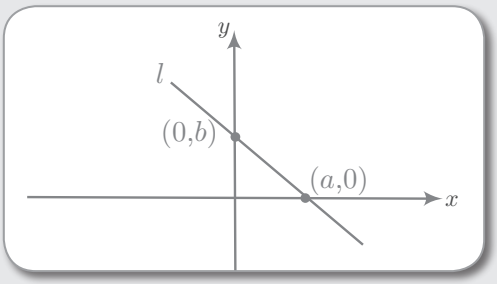
Forma pendiente- intersección de una recta

$$y = mx + b$$



Forma de intersección de una recta

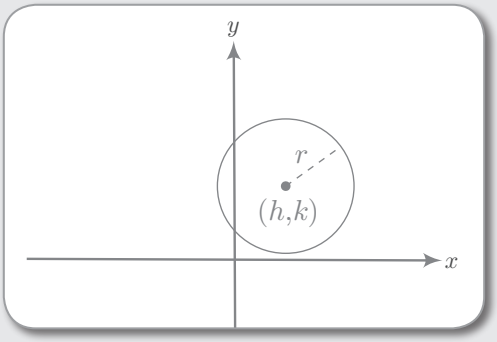
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ (a \neq 0, \ b \neq 0)$$



Ecuación de una circunferencia

La circunferencia con centro (h,k) y radio r:

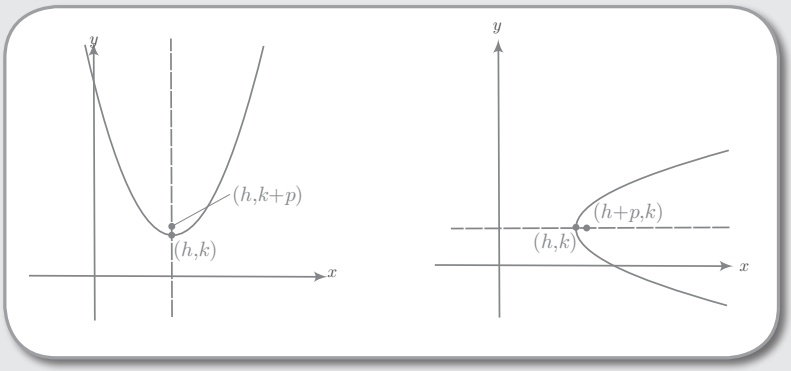
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



Parábolas con vértice en (h,k)

Ecuación estándar

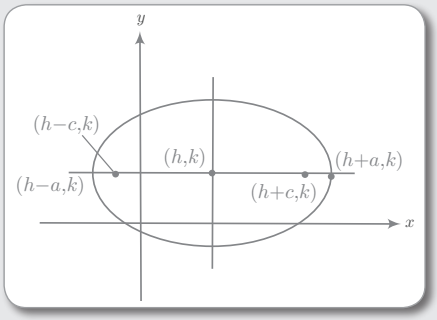
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
Abre: hacia arriba o hacia abajo	A la derecha o a la izquierda.
Foco: $(h,k+p)$	$(h+p,k)$
Directriz: $y = k-p$	$x = h-p$
Eje: $x = h$	$y = k$

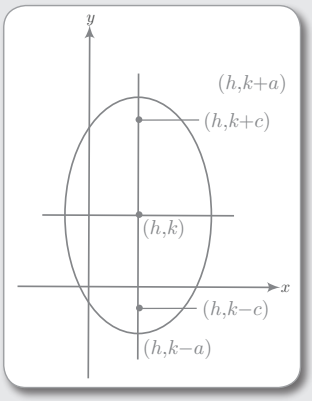


Elipses con centro en (h,k) y $a>b>0$

Ecuación estándar

$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2}+\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$
Eje focal: $y=k$	$x = h$
Focos: $(h\pm c,\, k)$	$(h,\, k\pm c)$
Vértices: $(h\pm a,\, k)$	$(h,\, k\pm a)$
Relación pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$





Hipérbola con centro en (h,k) y $a>b>0$

Ecuación estándar

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

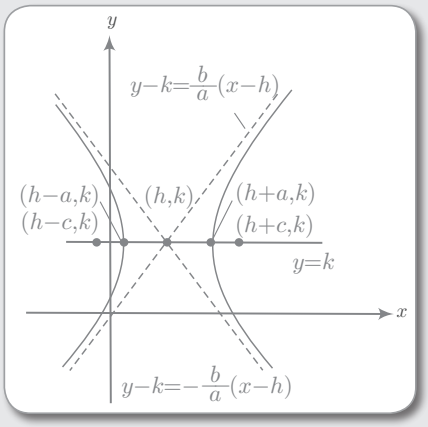
Eje focal: $y=k$ $\quad$ $x=h$

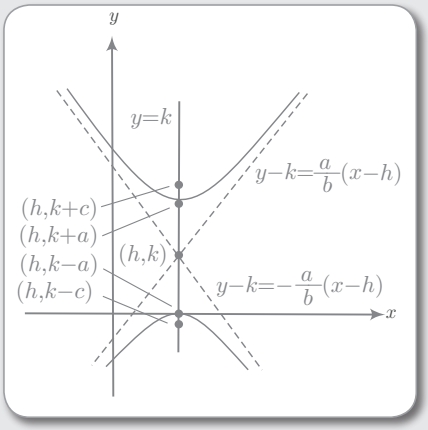
Focos: $(h\pm c,\,k)$ $\quad$ $(h,\,k\pm c)$

Vértices: $(h\pm a,\,k)$ $\quad$ $(h,\,k\pm a)$

Relación pitagórica: $c^2=a^2+b^2$ $\quad$ $c^2=a^2+b^2$

Asíntotas: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$ $\quad$ $y=\pm\frac{a}{b}(x-h)+k$





7 Geometría euclidiana

Objetivos

- Identificar los términos geométricos indefinidos y algunas construcciones básicas de la geometría euclidiana.
- Identificar la relación de los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas y una recta secante que las corta.
- Utilizar y reconocer los teoremas de Thales, Pitágoras y la fórmula de Herón como herramientas básicas en la resolución de problemas de tipo geométrico.
- Utilizar las proporciones para expresar la relación entre las partes correspondientes de figuras semejantes.
- Deducir las fórmulas para hallar las áreas de: paralelogramos, triángulos, trapecios y polígonos regulares.
- Identificar y representar los elementos geométricos que caracterizan a los cuadriláteros, triángulos, polígonos regulares y figuras circulares.
- Calcular el área y perímetro de figuras planas.
- Calcular el área lateral, área total y volumen de cuerpos geométricos: prismas, pirámides, conos, cilindros y esferas.
- Identificar y trazar los elementos de cuerpo sólidos: prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas.
- Aplicar las fórmulas que involucran figuras planas y cuerpos sólidos en la resolución de problemas geométricos.

Antecedentes históricos

La geometría es una ciencia muy antigua y su origen se debe a la necesidad de medir del hombre. Los egipcios (3000 a.c.) desarrollaron una serie de reglas prácticas que permitían medir figuras geométricas y determinar algunas de sus propiedades. La palabra geometría se deriva de la palabras griegas *geo* (tierra) y *metron* (medida).

Los griegos fueron quienes dieron a la geometría su máximo desarrollo, los cuales trataron de sistematizar los datos geométricos que conocían estableciendo razones lógicas y relaciones entre ellos; por hombres como Tales de Mileto (600 a.c.), Pitágoras (540 a.c.), Platón (390 a.c.) y Aristóteles (350 a.c.) y la mayor parte de lo que se estudia actualmente en geometría, se encuentra en el texto de geometría escrito por Euclides (300 a.c.) titulado *Elementos*, el cuál se ha utilizado por más de 2.000 años.

El estudio de la geometría es necesario en la preparación del ingeniero, del arquitecto, del dibujante; existen muchos ejemplos de formas geométricas en el mundo físico y con el paso del tiempo, el hombre empezó a clasificar esas formas, les dio nombre y creó definiciones para describirlas. Por medio de la geometría se aprecia el orden y la belleza de las formas geométricas que abundan en la naturaleza.

Términos indefinidos

Se les puede dar un significado por medio de descripciones, los cuales no se consideran como definiciones; estos términos indefinidos son:

Punto

No tiene ubicación, longitud, anchura ni altura. Se designa al punto conceptual por medio de una letra mayúscula, así: A. B. C.

Recta

Longitud ilimitada, derecha sin grosor ni extremos. Se designa con letras mayúsculas en dos puntos cualesquiera sobre ella o con una letra minúscula, así:

Plano

Un plano tiene longitud y anchura pero no espesor. Un plano se representa como parte de un objeto físico, como el corte más delgado posible; pero no son las representaciones reales de un plano.

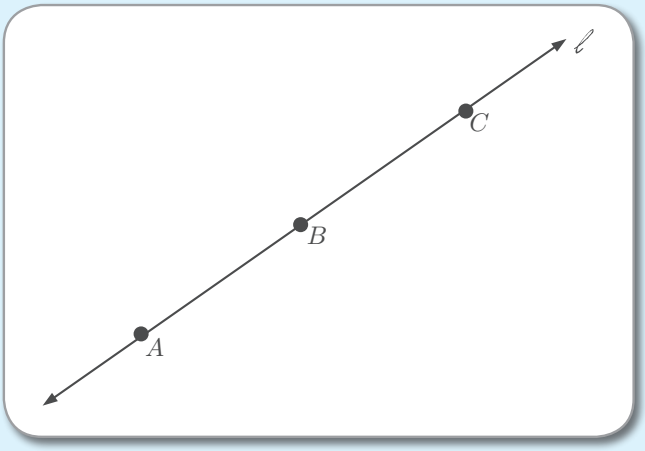
El punto, la recta y el plano cumplen las siguientes propiedades:

- Existen infinitos puntos.
- Por un punto pasan infinitas rectas.
- Dados dos puntos diferentes, estos determinan una única recta.
- Una recta contiene infinitos puntos.
- Existen infinitas rectas.
- Tres puntos que no están en una recta determinan un plano.
- Un plano contiene infinitos puntos.

Algunas relaciones entre puntos y rectas en un plano.

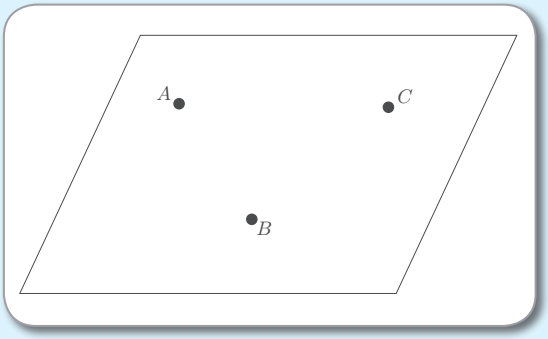
Puntos colineales

Tres o más puntos son colineales si pertenecen a una misma recta (l).



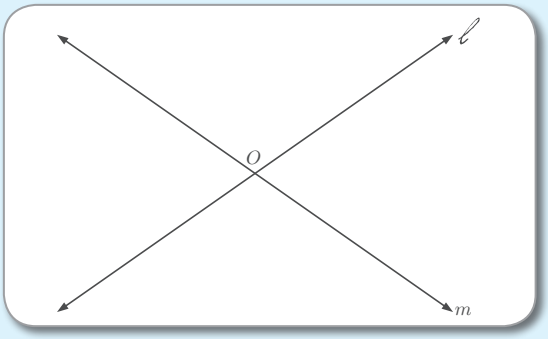
Puntos coplanares

Son puntos que se encuentran en un mismo plano ($\mathcal{M}$).



Rectas intersecantes

Son dos rectas con un punto en común.



Rectas paralelas

Son rectas que están en el mismo plano y no se intersecan, no tiene un punto en común, es decir ℓ es paralela a m y se nota $\ell \parallel m$.

Rectas concurrentes

Son tres o más rectas coplanares que tienen un punto en común.

Segmentos de línea

Un segmento de línea es la parte entre dos puntos de una línea recta, incluyendo estos dos puntos. Se designa así:

Que es "el segmento de línea recta $\overline{AB}$" o $\overline{BA}$.

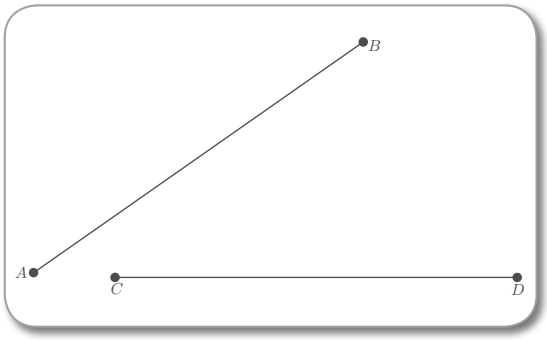
Rayo o semirrecta

Es la porción de una línea que cae a un lado de un punto e incluye el punto, se designa así;

Semirrecta $\overrightarrow{AB}$. Otro punto en la semirrecta diferente al origen es C así; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

Congruencia de segmentos

Dos segmentos de línea son congruentes si tienen la misma longitud, $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$ y se nota $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.



Un segmento es congruente con otro segmento si al colocar el primero sobre el segundo, sus extremos coinciden.

Longitud de un segmento

Consideremos una semirrecta, el número que expresa la distancia entre dos puntos A y B se llama medida o longitud del segmento $\overline{AB}$, así:

AB = Longitud de $\overline{AB}$

Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $AB{=}CD$, es decir, dos segmentos son congruentes si tienen igual longitud.

Segmentos proporcionales

Razones y proporciones

Se llama razón geométrica o relación de dos cantidades al cociente que resulta de dividir la primera entre la segunda. La razón entre a y b es: $a{:}b$ o $a{\div}b$ o $\frac{a}{b}$, donde $b{\neq}0$; a es el antecedente y b es el consecuente.

Proporción: es la igualdad de dos razones.

Sean los segmentos a, b, c y d; donde a =3m, b = 5m, c = 6m y d = 10m.

a _____

b _____

c _____

d _____

La razón de los segmentos a y b es $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ y la razón de los segmentos c y d es $\frac{c}{d} = \frac{6}{10}$; luego, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \iff (3)(\mathbf{10}){=}\,(5)(6)$; es decir se tiene una proporción.

Algunas propiedades de las proporciones

1) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $(a)\,(d){=}\,(b)\,(c)$; se multiplica por bd.

2) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; se divide por bd.

3) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{\mathrm{b}} = \frac{c+d}{d}$;se suma 1.

4) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{\mathrm{b}} = \frac{c-d}{d}$; se resta 1.

5) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

6) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

7) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

8) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \cdots = \frac{m}{n} = \frac{a+c+e+\cdots+m}{b+d+f+\cdots+n} = \frac{a}{b} = \cdots = \frac{m}{n}$

Ejemplos

1. Calcular el valor de x en las siguientes proporciones.

   a) $\frac{\frac{5}{2}}{4} = \frac{6}{x} \Longleftrightarrow \frac{5}{2}x = 24$; así $x = \frac{48}{5}$; este valor de x es la cuarta proporcional de $\frac{5}{2}$, 4 y 6.

   b) $\frac{\frac{5}{2}}{4} = \frac{4}{x} \Longleftrightarrow \frac{5}{2}x = 16$; así $x = \frac{32}{5}$; este valor x es la tercera proporcional de $\frac{5}{2}$ y 4.

   c) $\frac{\frac{5}{2}}{x} = \frac{x}{4} \Longleftrightarrow \frac{5}{2}(4) = x^2$; así $x = \pm\sqrt{10}$; este valor x es la

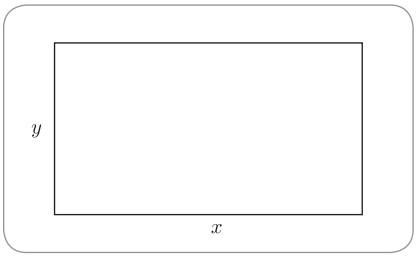
   media proporcional a $\frac{5}{2}$ y 4.

2. Las medidas de los ángulos de un triángulo están en una razón 2,3 y 5, hallar las medidas de los ángulos α, β y δ.

   $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} + \frac{\delta}{5} = \frac{\alpha+\beta+\delta}{10} = \frac{180°}{10} = 18°$; asi se tiene que: $\frac{\alpha}{2} = 18°$; es decir $\alpha = 36°$; $\frac{\beta}{3} = 18°$, es decir $\beta = 54°$ y $\frac{\delta}{5} = 18°$, así $\delta = 90°$.

   Luego se verifica así también, que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

3. El perímetro de un rectángulo es 80. Si la razón entre la base x y la altura y es de $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}}$, hallar las dimensiones del rectángulo.

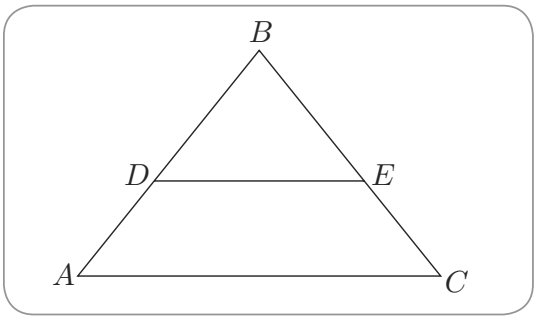


Sea el perímetro $P = 2x + 2y = 80$

$\frac{y}{x} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}} \iff \frac{y}{x} = \frac{6}{18} \iff \frac{y}{x} = \frac{1}{3}$, así; $x = 3y$, lo que implica que el perímetro es $P = 2(3y) + 2y = 80$; luego, $6y + 2y = 80$, lo que hace que $y = 10$.

Por lo tanto, $\frac{10}{x} = \frac{1}{3}$, así $x = 30$.

4. Si en el siguiente triángulo se tiene que:



$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$, al aplicar las propiedades de las proporciones se tiene:

a) $\frac{BD}{BE} = \frac{DA}{EC}$

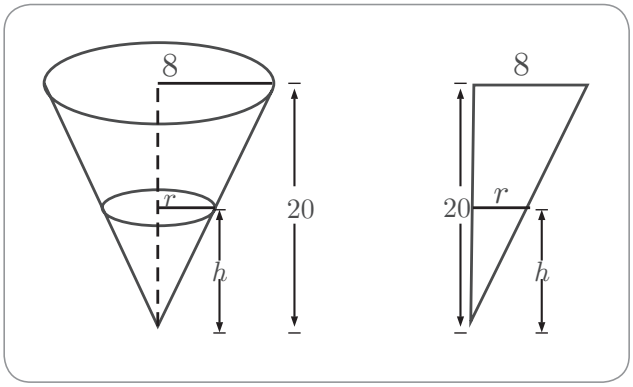
b) $\frac{BD+DA}{DA} = \frac{BE+EC}{EC}$

c) $\frac{BD-DA}{DA} = \frac{BE-EC}{EC}$

d) $\frac{BD+DA}{BD-DA} = \frac{BE+EC}{BE-EC}$

e) $\frac{BD+BE}{DA+EC} = \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$

5. La siguiente figura representa un tanque cónico, ¿cuál es la relación entre las variables r y h.



$\frac{20}{h} = \frac{8}{r} \Leftrightarrow h = \frac{5}{2}r; \quad r = \frac{2}{5}h$

Ejercicio 7.1

1. Calcular el valor de x en las siguientes proporciones:

   a) $\frac{-\frac{3}{2}}{x} = \frac{x-4}{\frac{5}{2}}$

   b) $\frac{3}{\frac{9}{2}} = \frac{9}{x}$

   c) $\frac{x-8}{x} = \frac{6}{8}$

   d) $\frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{x}{\frac{13}{2}}$

   e) $\frac{4}{6} = \frac{22}{x+6}$

2. Escriba falso o verdadero según corresponda:

   a) $\frac{3x}{8x} = \frac{3}{8}$

   b) $\frac{x}{x^2} = \frac{y}{xy}$

   c) $\frac{x+y}{1} = \frac{x^2+y^2}{x+y}$

   d) $\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{x-y}{1}$

   e) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2y+2x}{xy}$

Concepto de ángulo

Un ángulo es la unión de dos semirrectas de origen común. El origen común se llama vértice del ángulo y las dos semirrectas lados del ángulo.

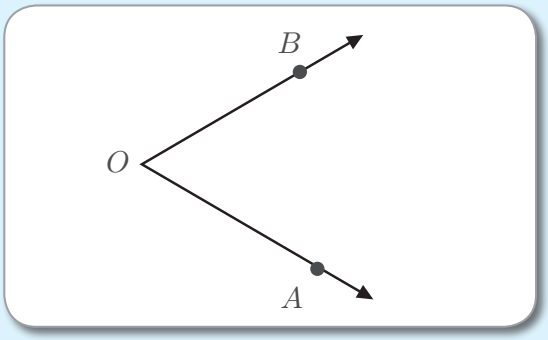
OA y OB lados del ángulo

O: vértice del ángulo

$\angle AOB$: ángulo AOB

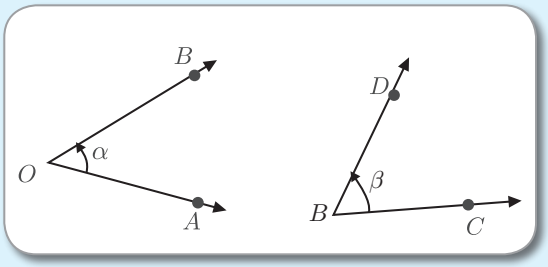
OA: lado inicial

OB: lado terminal



Congruencia de ángulos

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

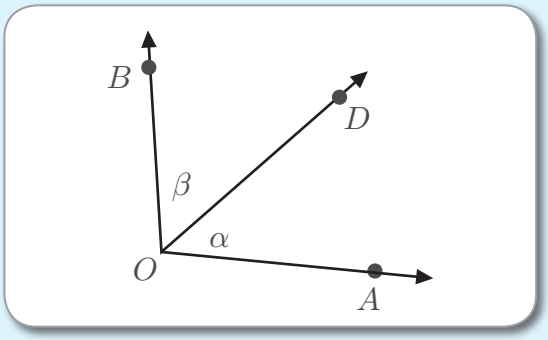


$\angle AOB$ es congruente $\angle CBD$ si $\angle\alpha \cong \angle\beta$.

Bisectriz de un ángulo

Es la semirrecta de origen en el vértice del ángulo y que lo divide en dos ángulos congruentes.

Si OD es la bisectriz del $\angle AOB$, entonces $\angle AOD \cong \angle DOB$ es decir $\angle\alpha \cong \angle\beta$.



Medición de ángulos

Se usan diferentes sistemas para medir ángulos. Los dos sistemas de medida de ángulos más comunes son el sexagesimal y el cíclico. El tamaño de un ángulo depende de qué tanto debe rotarse uno de sus lados al rededor del vértice, hasta que coincida con el otro lado.

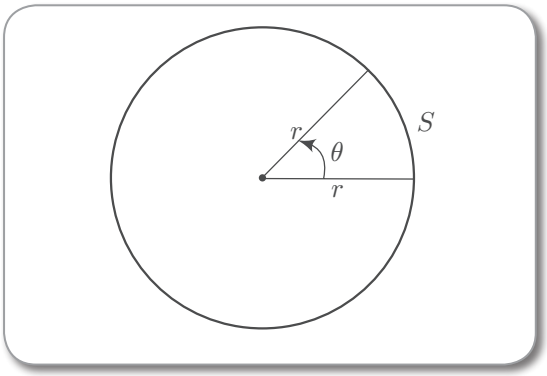
En el sistema sexagesimal la unidad de medida es el grado que equivale a $\frac{1}{360}$ parte del ángulo de una vuelta, es decir;

$1° = \frac{1}{360}$ lo que implica que 360°=1 vuelta

Para medir con más precisión los ángulos se utilizan las unidades de minuto y segundo. Simbólicamente se tiene;

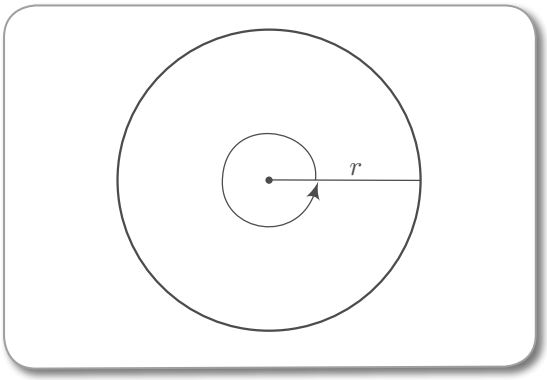
1 grado= 1°= 60 minutos y 1 minuto=60" segundos.

En el sistema cíclico o radianes la unidad de medida es el radian, donde un ángulo en radianes es: $\theta = \frac{s}{r}$; donde s: arco y r: radio.



Si $s = r$ entonces $\theta = 1$ radian.

Si se tiene un giro completo el ángulo θ es igual a:



$\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{rad}$

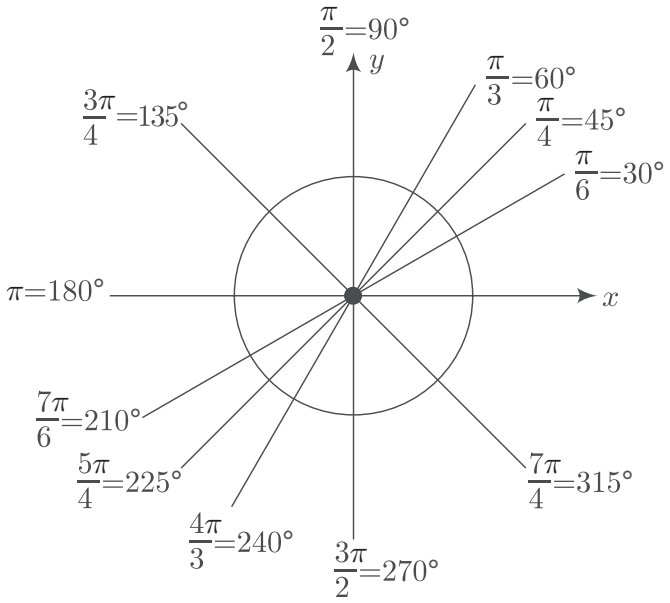
Como 360° $= 2\pi$ rad entonces 180° $= \pi$ rad es decir;

$\frac{180°}{\pi} = 1$ rad,luego $\frac{180°}{3{,}1415} = 57{,}29°$

También $1° = \frac{2\pi}{360°} = \frac{3{,}1415}{180°} = 0{,}01745$rad

Conversiones

- Radianes a grados.
- Grados a radianes.



Tipos de ángulos

Ángulo agudo: es un ángulo que mide entre 0° y 90°.

Ángulo recto: es un ángulo que mide 90°.

Ángulo obtuso: es un ángulo que mide más de 90° y menos de 180°.

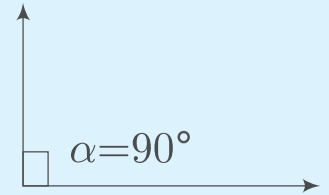
Ángulo llano: es un ángulo que mide 180°.

Ángulo completo: es un ángulo que mide 360°.

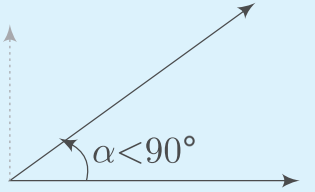
Ángulos complementarios: dos ángulos son complementarios si la suma es un ángulo recto 90°.

Ángulos suplementarios: dos ángulos son suplementarios si la suma es un ángulo llano 180°.

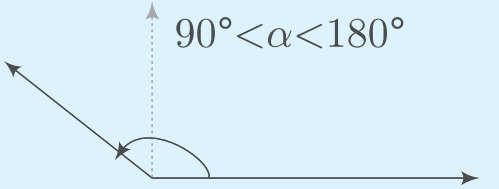
Tipos de ángulos



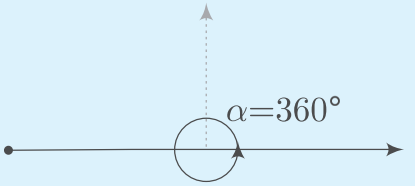
Ángulo recto



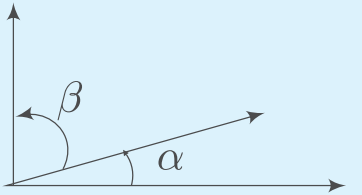
Ángulo agudo



Ángulo obtuso

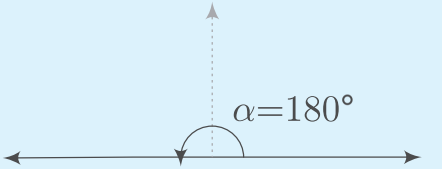


Ángulo completo

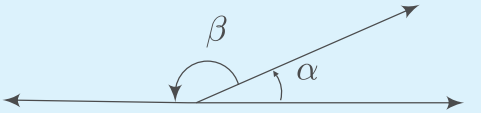


$\alpha+\beta=90°$

Ángulos complementarios



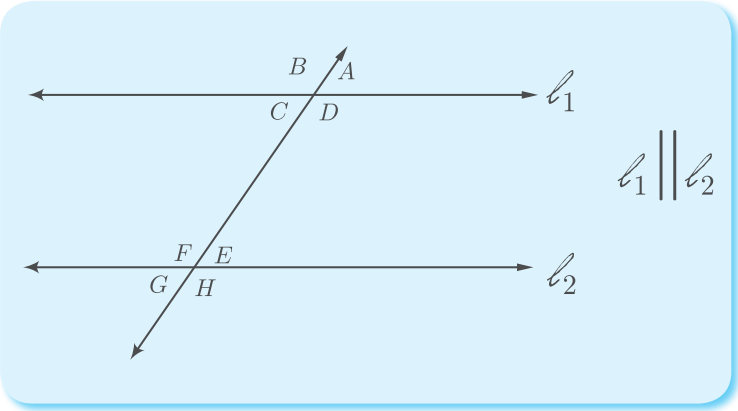
Ángulo llano



$\alpha+\beta=180°$

Ángulo suplementarios

Ángulos entre dos rectas paralelas y una recta secante (transversal).



Clasificación

Respecto a las paralelas:

Externos; *A*, *B*,*G* y *H*

Internos; *C*, *D*, *E* y *F*

Respecto a la posición recíproca

Adyacentes: *G* y *H*; *F* y *E*; *F* y *G*; *E* y *H*

C y *D*; *A* y *B*; *A* y *D*; *B* y *C*.

Opuestos por el vértice: *B* y *D*; *A* y *C*; *E* y *G*; *F* y *H*

Conjugados internos: son los colaterales ambos internos.

E y *D*; *C* y *F*

Conjugados externos: son los colaterales ambos externos

A y *H*; *G* y *B*

Alternos internos: son los no colaterales ambos internos y no adyacentes.

E y *C*; *F* y *D*

Alternos externos: son los no colaterales ambos externos y no adyacentes.

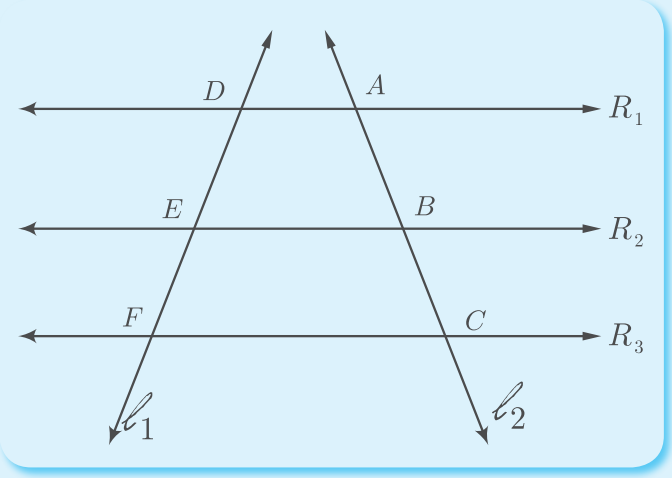
H y *B*; *G* y *A*.

Correspondientes: son los colaterales uno externo y el otro interno y además no adyacentes.

A y *E*; *D* y *H*; *B* y *E*; *C* y *G*

Teorema de Thales

Si dos líneas paralelas son intersecadas por dos transversales, entonces los segmentos correspondientes son proporcionales.



$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$$

Hipótesis: $R_1 \parallel R_2 \parallel R_3$

ℓ_1 y ℓ_2 transversales

DE y *EF* correspondientes de ℓ_1

AB y *BC* correspondientes de ℓ_2

Tésis $\left\{\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}\right.$

Prueba

Supongamos que *DE* $= xu'$ y AB $= yu'$

Si trazamos paralelas por los puntos donde se forma cada unidad de u, los segmentos *EF* y *BC* quedarán divididos en segmentos cuyas medidas son iguales a u' de manera que:

EF $= xu'$ y *BC* $= yu'$,

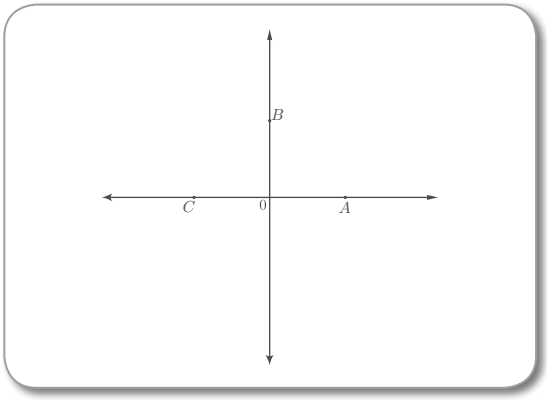
Luego, $\frac{DE}{AB} = \frac{xu}{yu}$, entonces $\frac{DE}{AB} = \frac{x}{y}$ (1)

$\frac{EF}{BC} = \frac{xu'}{yu'}$, entonces $\frac{EF}{BC} = \frac{x}{y}$ (2)

De 1) y 2), tenemos que; $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$

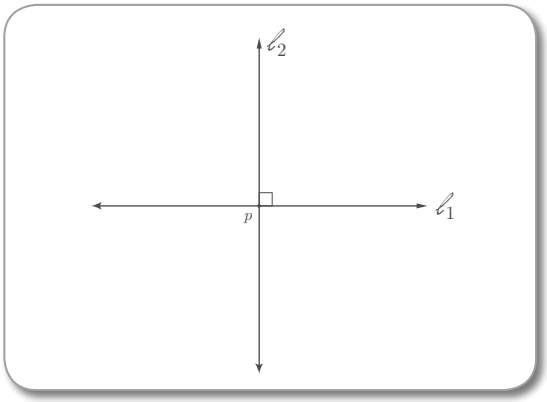
Rectas perpendiculares

Si las semirrectas *OA* y *OB* determinan un ángulo recto, entonces se llaman perpendiculares y se escribe: *OA*$\perp$*OB*



Similarmente, también son perpendiculares las rectas y los segmentos que determinan los puntos *O*, *A* y B; *OA*$\perp$*OB* y *OA*$\perp$*OB*.

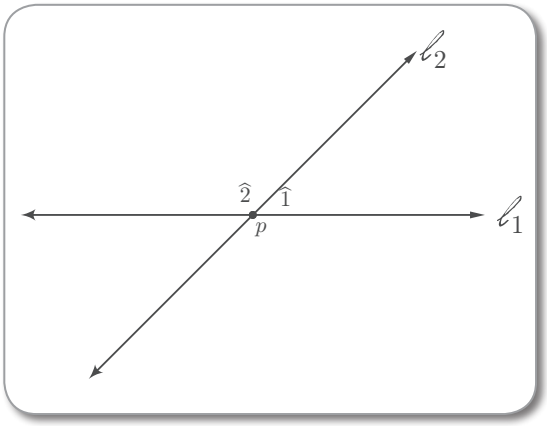
Observamos que los ángulos $\angle$*AOB* y $\angle$*BOC* son adyacentes y congruentes (ambos rectos) así; Dos rectas son perpendiculares si se cortan en un punto formando ángulos adyacentes y congruentes.



Si dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 en un plano cumplen que $\ell_1 \cap \ell_2 = \{p\}$, entonces las rectas son secantes.

Si dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 secantes no son perpendiculares, entonces decimos que son oblicuas.

Vemos que $\angle 1 \neq \angle 2$, así ℓ_2 no es perpendicular a ℓ_1.



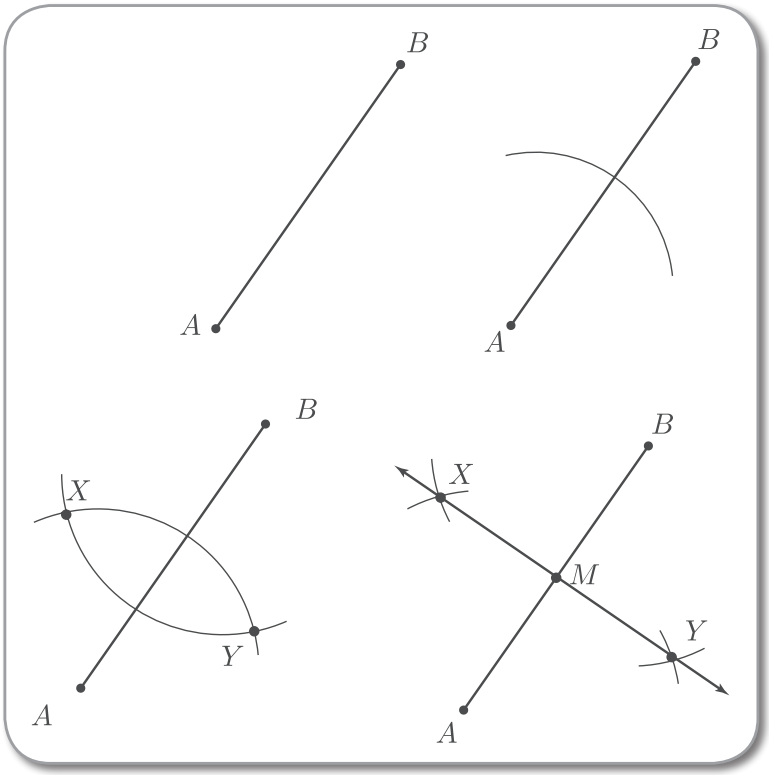
Mediatriz de un segmento

Consideremos el segmento *AB*.

Con una abertura del compás mayor a $\frac{AB}{2}$ y con centro en *A*, trazamos dos arcos.

Con igual abertura y con centro en *B*, trazamos otros dos arcos que corten los anteriores .

Trazamos *XY*. La intersección de *AB* y *XY* es el punto *M*.



El punto *M* obtenido en este procedimiento es el punto medio del segmento *AB*.

La recta *XY* es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ en su punto medio *M* y recibe el nombre de *AB*.

Triángulos

Dados tres puntos *A*, *B* y *C* no colineales, la unión de los tres segmentos $\overline{AB}$ $\overline{BC}$, y $\overline{AC}$ se llama triángulo.

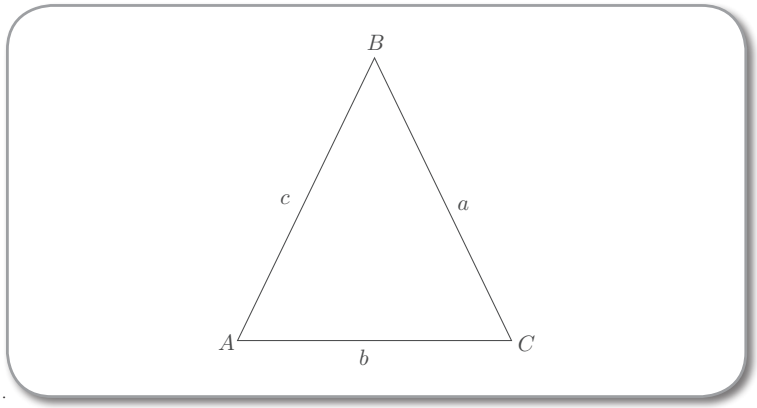
Los puntos *A*, *B* y *C* se llaman vértices del triángulo.

Los segmentos , $\overline{AB}$ $\overline{BC}$, y $\overline{AC}$ se llaman lados del triángulo.

Los ángulos determinados por cada dos lados del triángulo se llaman ángulos interiores, estos son;

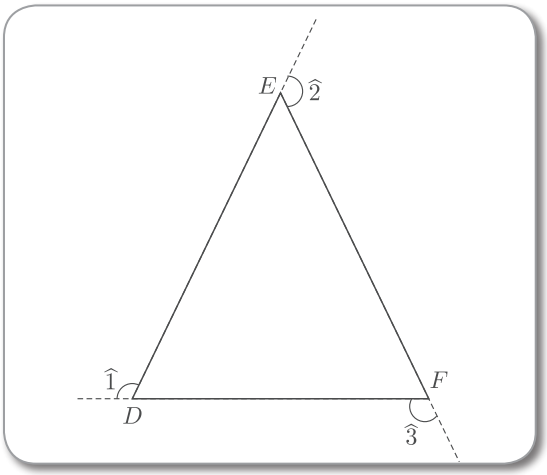
$\angle CAB$, $\angle ABC$ y $\angle BAC$.

El triángulo $\triangle ABC$ tiene tres ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ y tres lados $BC{=}a$, $AC{=}b$ y $AB{=}c$.



El perímetro de un triángulo es el número que representa la suma de las longitudes de sus lados. Así en el $\triangle ABC$ se tiene; $BC + AC + AB = a{+}b{+}c$.

Los ángulos adyacentes a los interiores se llaman **ángulos exteriores**. En el $\triangle DEF$, los ángulos $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son exteriores.

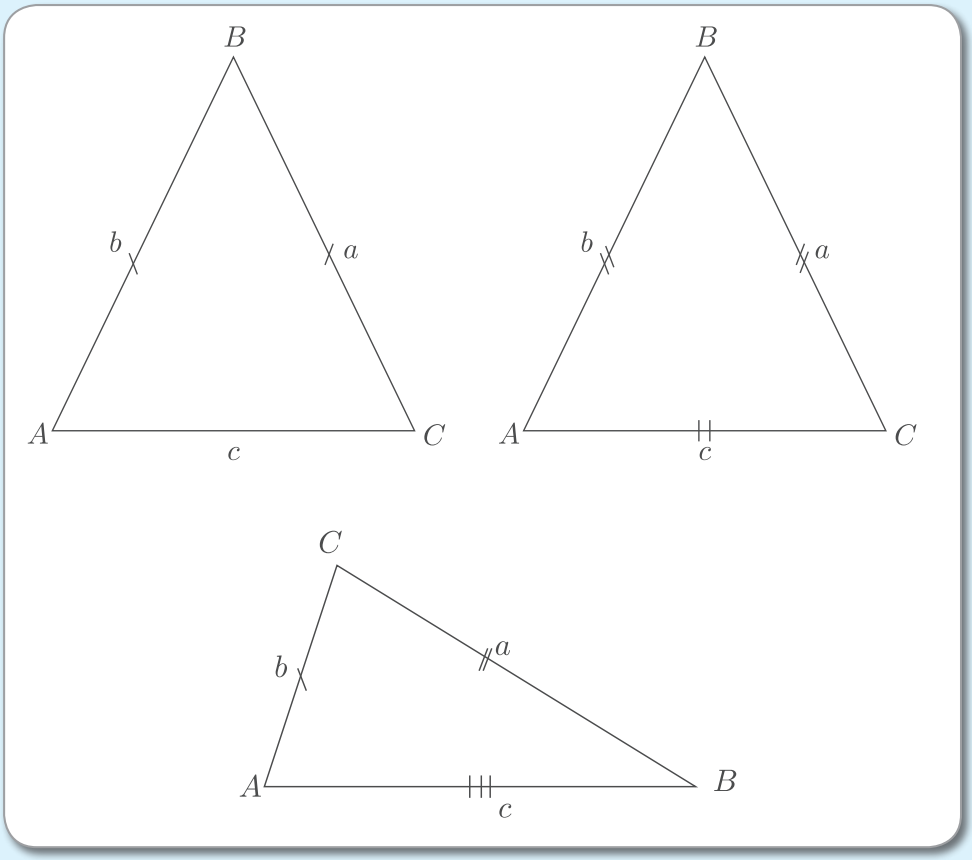


Vemos que $\angle 1 + \angle D{=}180°$; $\angle 2 + E{=}180°$ y $\angle 3 + F{=}180°$.

Clasificación de triángulos

Los triángulos se clasifican de acuerdo con una propiedad de sus lados o de sus ángulos.

Cuando se les clasifica de acuerdo con sus lados se tiene:



Isósceles: si dos lados son congruentes; $a=b$ y $\angle A \cong \angle B$.

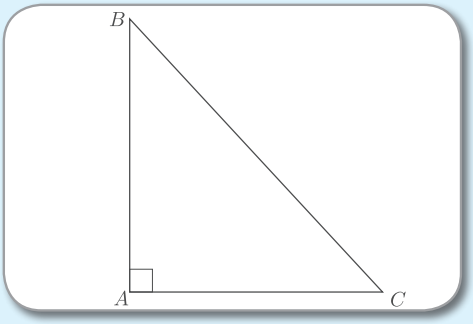
Equilátero: si los tres lados son congruentes; $a=b=c$ y $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$.

Escaleno: si sus tres lados tienen longitudes diferentes; $a \neq b \neq c$ y $\angle A \neq \angle B \neq \angle C$.

Si se clasifican los triángulos de acuerdo a sus ángulos, tenemos;

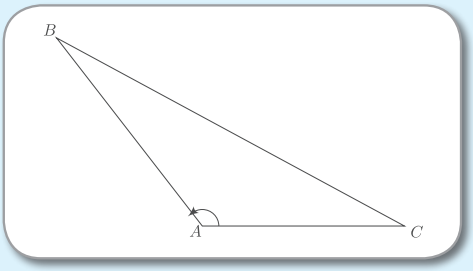
Un triángulo es rectángulo, si tiene un ángulo recto.

El $\triangle ABC$ de la figura tiene recto el ángulo en A. El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los otros dos lados catetos.



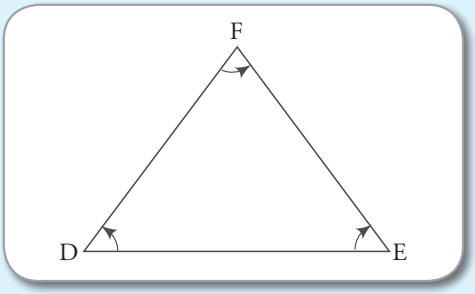
$\angle CAB$ es recto; es decir $\angle CAB = 90°$

Un **triángulo es obtusángulo**, si tiene un ángulo obtuso. $\angle CAB$ es obtuso, es decir; $90° < \angle CAB < 180°$.



Un **triángulo es acutángulo**, si tiene sus tres ángulos agudos.

$\angle EDF$, $\angle DEF$ y $\angle DFE$ son agudos, ya que, cada uno mide menos de 90°.

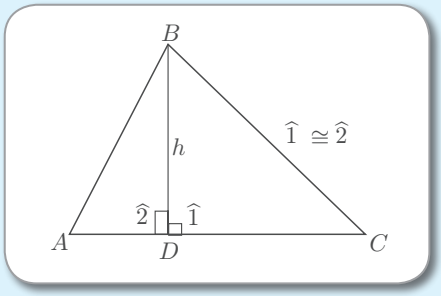


La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo $\triangle ABC$ es 180° o π rad. Como los tres ángulos de un triángulo equilátero son congruentes, la medida de cada uno es:

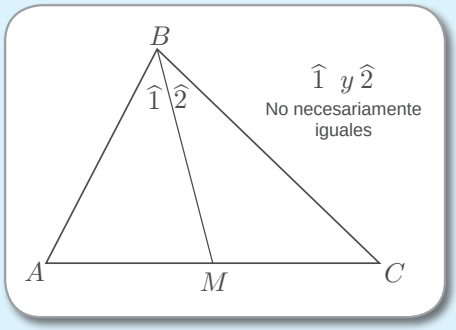
$\frac{180°}{3} = 60°$ o $\frac{\pi}{3}$ rad.

Líneas en triángulos

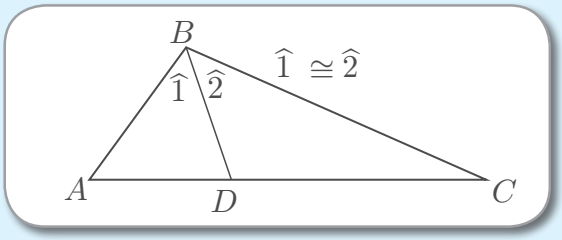
Altura: es el segmento perpendicular comprendido entre un vértice y la recta que contiene el lado opuesto; se tiene que BD es la altura sobre AC así $BD \perp AC$.



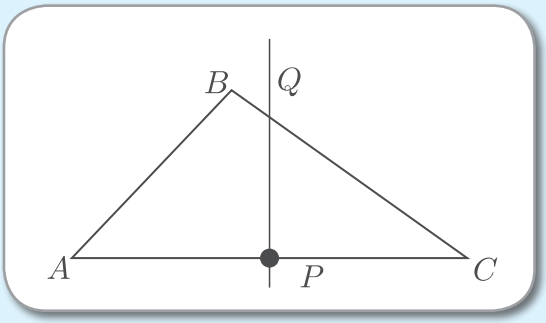
Mediana: es el segmento trazado de un vértice al centro (o punto medio) del lado opuesto.



Bisectriz: es el segmento que bisecta un ángulo y se extiende hasta el lado opuesto. BD es la bisectriz de $\angle B$; lo bisecta, haciendo $\angle 1 = \angle 2$.



Mediatriz: la mediatriz de un lado de un triángulo es la línea que es perpendicular a este lado y lo bisecta; vemos que PQ es la mediatriz de AC; $PQ \perp AC$ y lo bisecta, Es decir $\overline{AP}=\overline{PC}$.

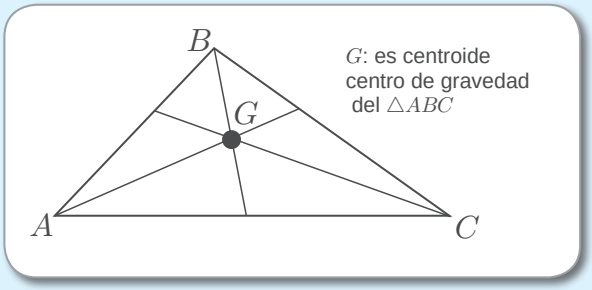


Las tres medianas de un triángulo se intersectan en un punto llamado **baricentro**.

Las tres bisectrices de un triángulo se intersectan en un punto llamado **incentro**.

Las mediatrices de un triángulo se intersectan en un punto llamado **circuncentro**.

Las tres alturas se intersectan en un punto llamado **ortocentro**.

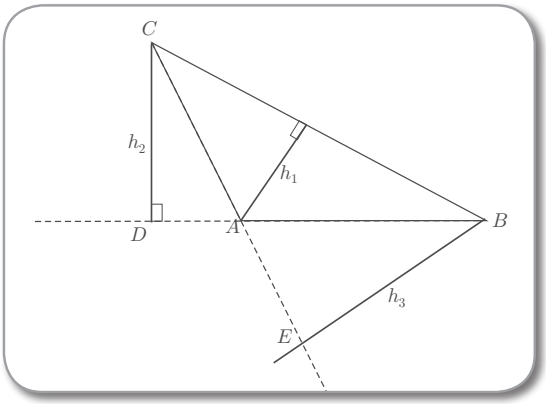


Alturas de un triángulo obtuso $\triangle ABC$.

h_1= sobre el lado BC .

h_2= sobre el lado AB.

h_3= sobre el lado AC.



Congruencia de triángulos

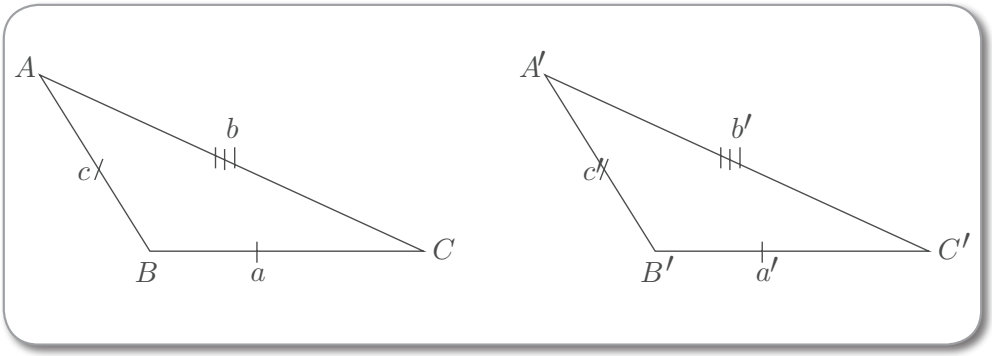
Dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño. La palabra congruente se deriva de las palabras latinas *con* que significa "*con*" y *gruere*, que significa "concordar, convenir". Las figuras congruentes pueden hacerse coincidir parte por parte, donde las partes coincidentes se llaman partes correspondientes. El símbolo para notar congruencia es ,≅; el cual es la combinación de dos símbolos;

$=$; que significa tener el mismo tamaño.

$\sim$; que significa tener la misma forma.

Triángulos congruentes: son los que tienen el mismo tamaño y la misma forma.

Si dos triángulos son congruentes, sus lados y ángulos correspondientes son congruentes.



La figura tiene lados congruentes:

$c \cong c'$; $a \cong a'$; $b \cong b'$; y ángulos correspondientes,

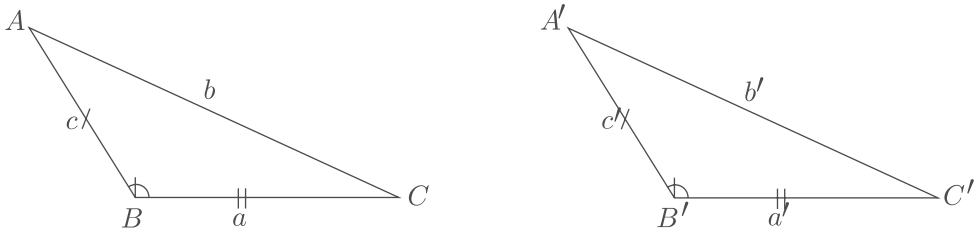
$\angle A \cong \angle A'$; $\angle B \cong B'$ y $\angle C \cong C'$

Así $\triangle ABC \cong A'B'C'$ son congruentes.

Principios para probar la congruencia de triángulos.

Principio del Lado, Ángulo y Lado (LAL)

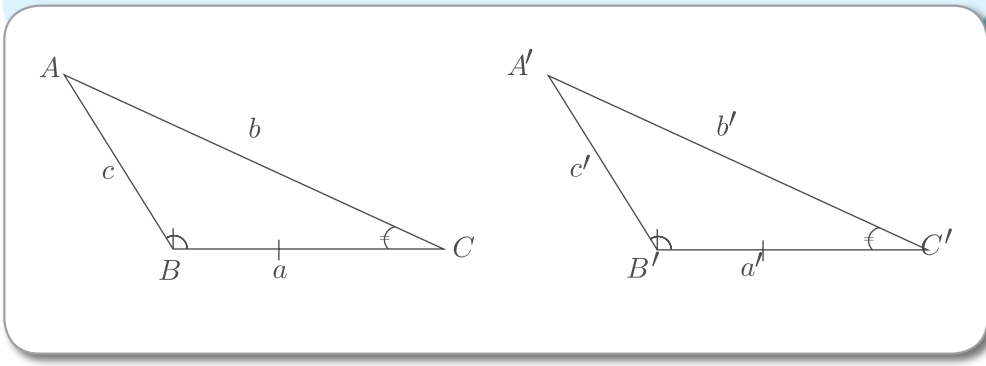
Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.



Si $c \cong c'$, $a \cong a'$ y $\angle B \cong B'$, entonces $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Principio de Ángulo, Lado y Ángulo (ALA)

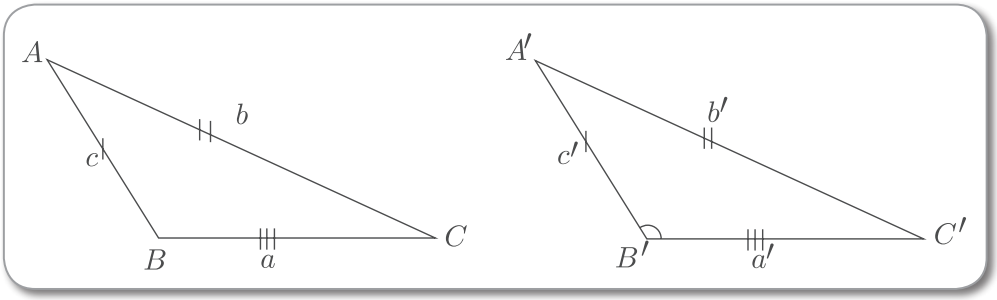
Si un lado y los dos ángulos adyacentes de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.



Si $\angle B \cong B'$; $\angle C \cong C'$ y $a \cong a'$, entonces $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Principio del Lado, Lado y Lado (LLL)

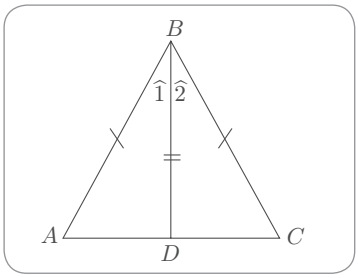
Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.



Si $c \cong c'$, $b \cong b'$ y $a \cong a'$, entonces $\triangle ABD \cong A'B'C'$.

Ejemplos

1. En el siguiente triángulo si $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ y $\angle 1 \cong \angle 2$ pruebe que $\triangle ABD \cong \triangle DBC$.



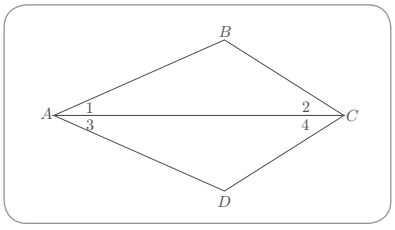
i) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ Hipótesis

ii) $\angle 1 \cong \angle 2$ Hipótesis

iii) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ Un segmento es congruente consigo mismo

iv) $\triangle ABD \cong \triangle DBC$ Postulado (LAL).

2. En el siguiente triángulo si $\angle 1 \cong \angle 4$ y $\angle 3 \cong \angle 2$, pruebe que $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.



i) $\angle 1 \cong \angle 4$ Hipótesis

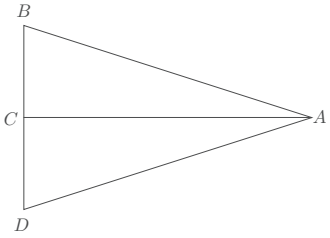
ii) $\angle 3 \cong \angle 2$ Hipótesis

iii) $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ Un segmento es congruente consigo mismo

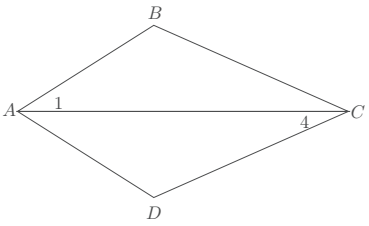
iv) $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ Postulado (ALA).

Ejercicios 7.2

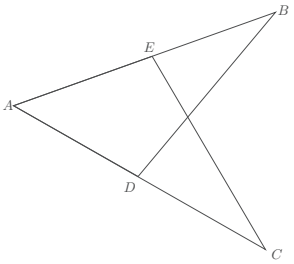
1. En el siguiente triángulo si $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, pruebe que $\triangle ABC \cong \triangle ADC$



2. En el siguiente triángulo si $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\angle 1 = \angle 4$, pruebe que $\triangle ABC \cong \triangle ACD$.

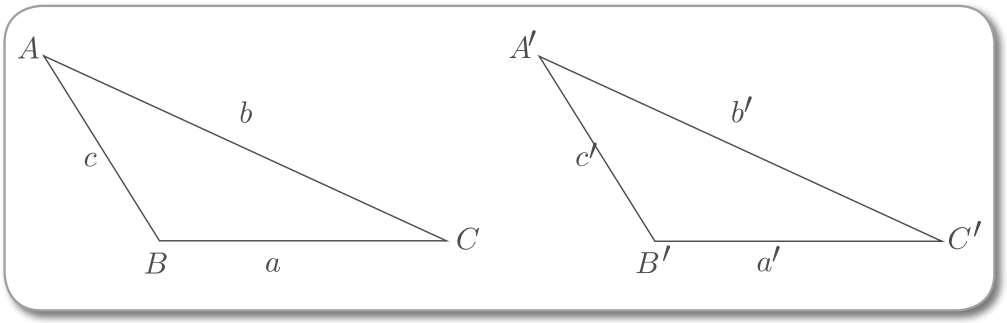


3. En el siguiente triángulo si $\angle C = \angle B$ y $\overline{AC} \cong \overline{AB}$, pruebe que $\triangle ABD \cong \triangle AEC$.



Semejanza de triángulos

Dos figuras son similares si tienen la misma forma aunque no el mismo tamaño. El símbolo para "similar" es $\sim$. El triángulo $\triangle ABC$ es similar al triángulo $\triangle A'B'C'$ ya que, los ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales.



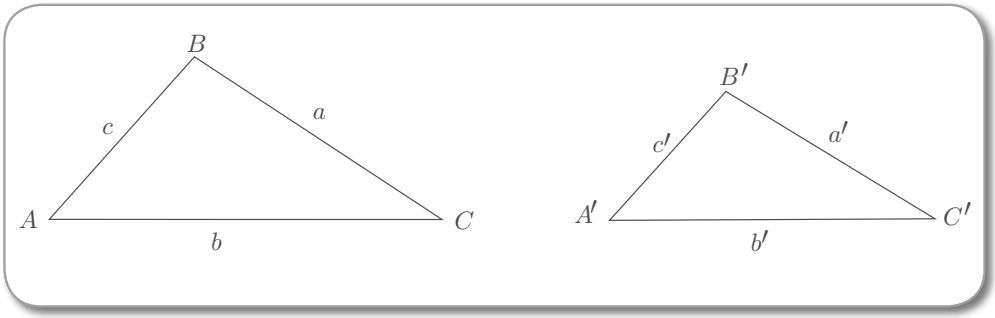
$\angle A \cong \angle A'$ y $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$

$\angle B \cong \angle B'$ y

$\angle C \cong \angle C'$

Algunos principios sobre triángulos semejantes.

- Dos triángulos son semejantes, si dos ángulos de un triángulo son congruentes respectivamente con dos ángulos del otro.



Si $\angle A \cong \angle A'$; $\angle B \cong B'$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

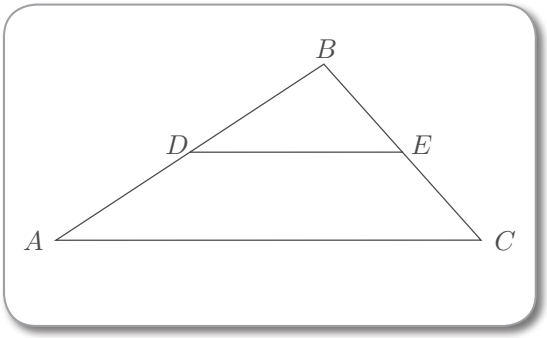
- Dos triángulos son semejantes si un ángulo de un triángulo es congruente con el ángulo del otro triángulo y los lados que incluyen estos ángulos son proporcionales (figura anterior).

  Si $\angle C \cong \angle C'$ y $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

- Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales:

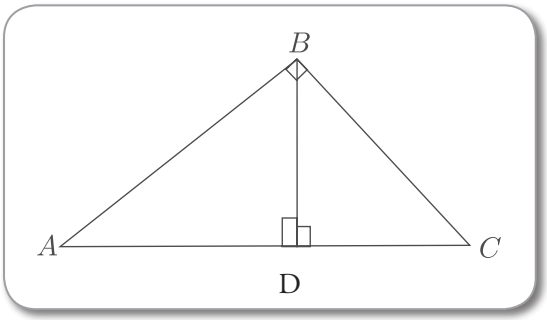
  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

- Una línea paralela a un lado de un triángulo forma un triángulo semejante al triángulo dado.



Si $DE||AC$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle DBE$.

- La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a este triángulo en dos triángulos que son semejantes al triángulo dado entre sí:



Así, $\triangle ABD \sim \triangle CBD \sim \triangle ABC$.

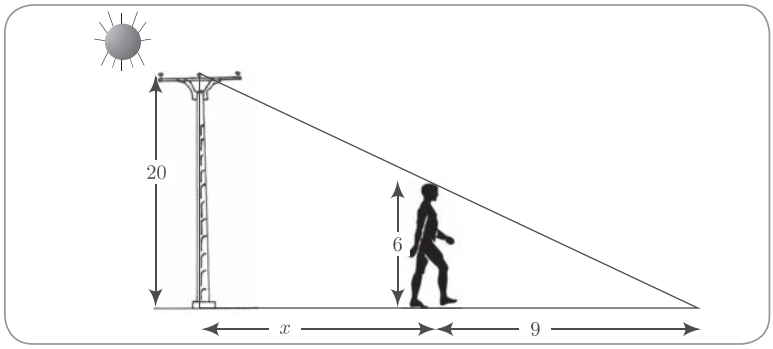
Ejemplos

1. Si una persona de 6 pies de altura proyecta una sombra de 9 pies, ¿qué sombra proyectará un poste de 20 pies?

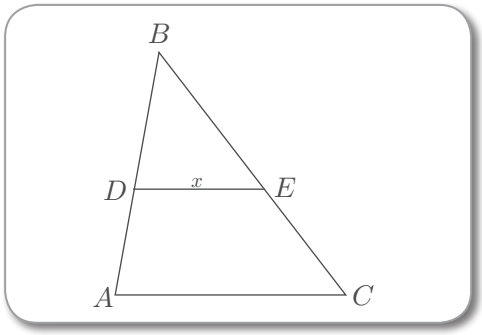
$$\frac{6}{9} = \frac{20}{9+x} \iff 54 + 6x = 180$$

$$\iff 6x = 126$$

$$x = 21$$



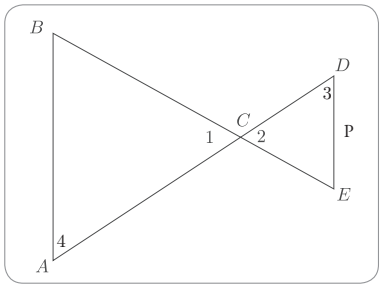
2. Si $DE \parallel AC$, $\overline{BD} = 6$, $\overline{BA} = 16$ y $\overline{AC} = 18$. ¿Cuál es la longitud de $\overline{DE}$?



$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} \iff \frac{16}{6} = \frac{18}{\overline{DE}}$ así;

$16x = (6)(18)$, es decir $x = \frac{54}{8}$

3. Si se toma una fotografía, la imagen que se forma en la película es semejante al objeto que se fotografía. veamos lo anterior por medio de triángulos semejantes.



Sea C el objeto y P la película, si, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ se debe probar que el triángulo $\triangle ABC$ es semejante con el triángulo $\triangle DEC$.

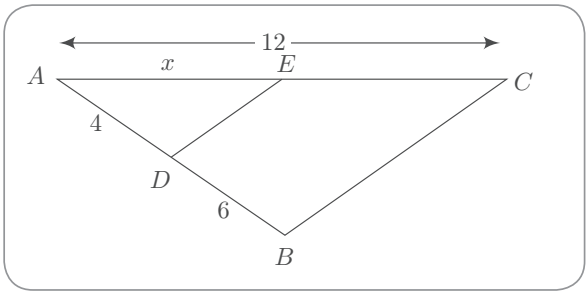
Prueba:

i) $\angle 1 \cong \angle 2$ opuestos por el vértice.

ii) $\angle 3 \cong \angle 4$ Alternos internos.

iii) $\triangle ACB \cong \triangle DCE$ Principio de (AA).

4. Calcular el valor de x en el siguiente triángulo:



Si $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$, entonces $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \iff \frac{4}{6} = \frac{x}{12-x}$ así; $48-4x=6x$, es decir $x = \frac{24}{5}$.

Teorema de Herón

Se utiliza para hallar el área de un triángulo, cuando solo se conoce los lados de un triángulo y no se conoce la altura ni ninguno de los ángulos. Este teórema es de Herón de Alejandría quien vivió hacia el siglo III A.C; son conocidas varias obras suyas, pero se le recuerda sobre todo por la llamada fórmula de Herón.

Fórmula de Herón

Sea el perímetro del triángulo $\triangle ABC$ igual a $P = a+b+c$, llamando al semiperímetro $\frac{P}{2} = S = \frac{a+b+c}{2}$, entonces el área puede expresarse como:

$\mathbb{A}\triangle = \sqrt{\frac{P}{2}(\frac{P}{2}-a)(\frac{P}{2}-b)(\frac{P}{2}-c)}$,,si $\frac{P}{2} = S$ se tiene:

$\mathbb{A}\triangle = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$.

La demostración original del teorema de Herón es realmente sorprendente, combina elementos geométricos sencillos, llegando a construir una de las demostraciones más ricas y elegantes de toda la matemática. Sin embargo, se presenta a continuación una prueba más moderna la cual se basa en el teorema de coseno.

Sea el área del triángulo $\mathbb{A}\triangle = \frac{ch}{2}$ la cual equivale a $\mathbb{A}\triangle = \frac{caSen(\alpha)}{2}$, donde $Sen(\alpha) = \frac{h}{a}$ es decir $h = aSen(\alpha)$.

Sabemos que el teorema del coseno es: $b^2 = a^2 + c^2 - 2acCos(\alpha)$.

Tenemos que, $Cos(\alpha) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, y como $Sen^2(\alpha) = 1 - Cos^2(\alpha)$ entonces,

$$Sen(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2c^2}} = \sqrt{\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2c^2}}$$

$$Sen(\alpha) = \sqrt{\frac{(2ac-(a^2+c^2-b^2))(2ac+(a^2+c^2-b^2))}{4a^2c^2}}$$

$$Sen(\alpha) = \frac{\sqrt{(2ac-a^2-c^2+b^2)(2ac+a^2+c^2-b^2)}}{2ac}$$

$$Sen(\alpha) = \frac{\sqrt{(b^2-(c^2-2ac+a^2))((a^2+2ac+c^2)-b^2)}}{2ac}$$

$$Sen(\alpha) = \frac{\sqrt{\left(b^2-(c-a)^2\right)\left((a+c)^2-b^2\right)}}{2ac}$$

así sustituyendo en $\mathbb{A}\triangle = \frac{caSen(\alpha)}{2}$ se tiene:

$$\mathbb{A}\triangle = \frac{ca\sqrt{\left(b^2-(c-a)^2\right)\left((a+c)^2-b^2\right)}}{4ac} = \frac{\sqrt{\left(b^2-(c-a)^2\right)\left((a+c)^2-b^2\right)}}{4}$$

$$\mathbb{A}\triangle = \frac{\sqrt{(b-(c-a))(b+(c-a))(c+a-b)(c+a+b)}}{4} = \frac{\sqrt{(b-c+a)(b+c-a)(c+a-b)(c+a+b)}}{4}$$

$\mathbb{A}\triangle = \sqrt{\frac{(b-c+a)(b+c-a)(c+a-b)(c+a+b)}{16}}$, ordenado se tiene:

$\mathbb{A}\triangle = \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\frac{(b+c-a)}{2}\frac{(c+a-b)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}} = \sqrt{\frac{P}{2}(S-a)(S-b)(S-c)}$, donde se tiene que: $S - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$, similarmente se tiene que: $S - b = \frac{c+a-b}{2}$

y $S - c = \frac{a+b-c}{2}$, así el área del triángulo es: $\mathbb{A}\triangle = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$.

Ejemplos

Un terreno triangular mide 123 pies 18 pulgadas, 110 pies 9 pulgadas y 195 pies 3 pulgadas en sus respectivos lados. ¿Cuál es el área aproximada del terreno triangular?

Sea $a = 123'18" = 124{,}50\ ft\text{pies}$

Sea $b = 110{,}9" = 110{,}75\ ft\text{pies}$

Sea $c = 195{,}3" = 195{,}25\ ft\text{pies}$

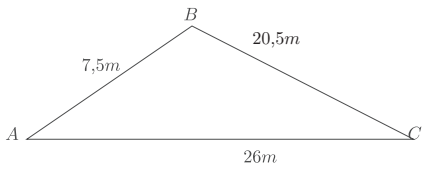
Así; $S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{124{,}5 + 110{,}75 + 195{,}25}{2} = \frac{430{,}50}{2} = 215{,}25\ ft$ pies.

$$\mathbb{A}\triangle = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}\,.$$
$$= \sqrt{215,25(215,25 - 124{,}5)(215,25 - 110{,}75)(215{,}25 - 195{,}25)}$$
$$= \sqrt{215,25(90,75)(104{,}50)(20)} = \sqrt{40825929{,}37} = 6389{,}51\, ft\ \text{pies}^2.$$

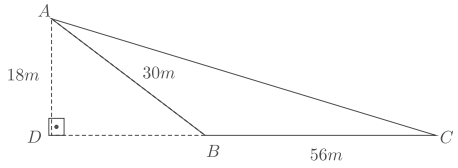
Ejercicio 7.3

1. Halle el área y el perímetro de los siguientes triángulos:

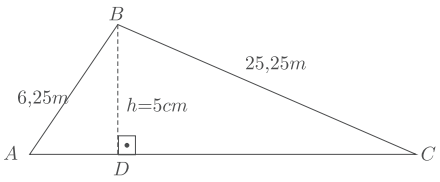
a)



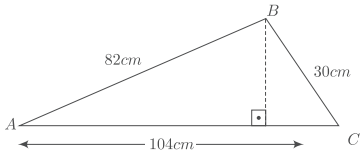
b)



c)

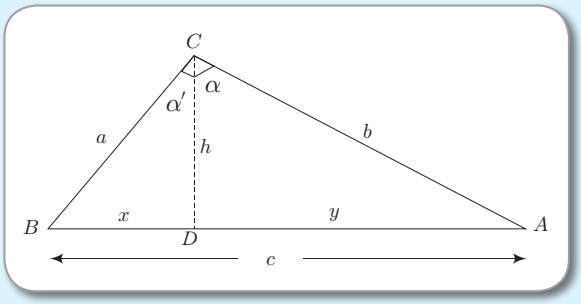


d)



Teorema de Pitágoras

Algunos elementos auxiliares para la prueba del teorema:



Sea el triángulo $\triangle ABC$ rectángulo en C. Sea $\overline{CD} = h$ altura sobre la hipotenusa $c = \overline{AB}$. Por definición de altura y de proyección ortogonal sobre un eje se tiene: $\overline{AD}$ es la proyección ortogonal del cateto $\overline{AC}$ sobre $c = \overline{AB}$ que es la hipotenusa. $\overline{DB}$ es la proyección ortogonal del cateto $\overline{BC}$ sobre $c = \overline{AB}$ que es la hipotenusa.

Si x e y son las medidas de las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa se tiene: $x+y = c$. (1)

En el triángulo $\triangle ABC$ se tiene $\angle A+\angle B = 90º$, entonces $\angle A = 90º-\angle B$ y en el triángulo $\triangle ADC$ se tiene $\angle A+\angle\alpha = 90º$, entonces $\angle A = 90º-\angle\alpha$; lo anterior implica que, $\angle B = \angle\alpha$.

Así el $\triangle ABC \sim \triangle ADC$.

En el triángulo $\triangle BCD$ se tiene $\angle B + \angle \alpha' =$ 90º, entonces $\angle B =$ 90º$- \angle \alpha$; y en el triángulo $\triangle ABC$ se tiene $\angle A + \angle B =$ 90º, entonces $\angle B =$ 90º$- \angle A$; lo anterior implica que, $\angle \alpha' = \angle A$.

Así el $\triangle ABC \sim \triangle BCD$

De la semejanza anterior se tiene los siguientes lados homólogos proporcionales:

Si el $\triangle ABC \sim \triangle ADC$, entonces $\frac{y}{b} = \frac{b}{c} = \frac{h}{a}$ (2)

Si el $\triangle ABC \sim \triangle BCD$, entonces $\frac{x}{a} = \frac{a}{c} = \frac{h}{b}$ (3)

Si el $\triangle ADC \sim \triangle BCD$, entonces $\frac{x}{h} = \frac{h}{y} = \frac{a}{b}$ (4)

De 2) se tiene:
$\frac{y}{b} = \frac{b}{c} \iff b^2 = y \cdot c$ ( ) (5)

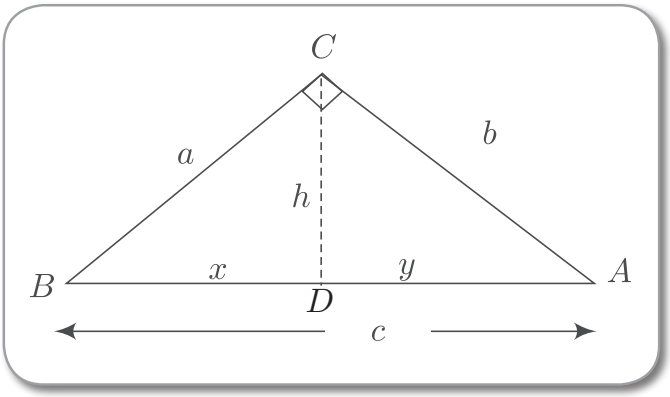
De 3) se tiene: $\frac{x}{a} = \frac{a}{c} \iff a^2 = x \cdot c$ ( ) (6)

De lo anterior, se tiene que la medida de cada cateto es la *medida proporcional* entre la hipotenusa y la de su proyección sobre esta.

De 4) se tiene: $\frac{x}{h} = \frac{h}{y} \iff h^2 = x \cdot y$ (7),
es decir; la medida de la altura es la *medida proporcional* entre las medidas de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

También de 3) se tiene: $\frac{x}{a} = \frac{h}{b} \iff h = \frac{ab}{c}$ (8),
es decir; la medida de la altura correspondiente a la hipotenusa es la *cuarta proporcional* entre las medidas de los catetos y la hipotenusa.

Prueba del teorema de Pitágoras

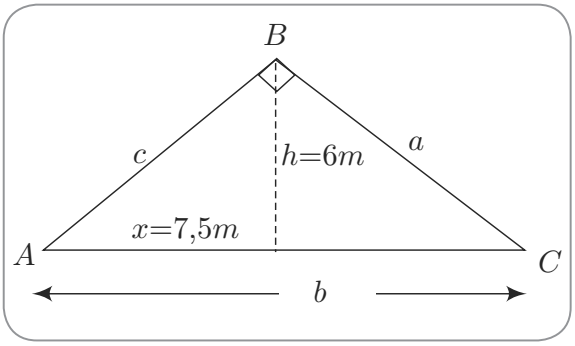


En el triángulo $\triangle ABC$ rectángulo en el ángulo $\angle C$ y con altura $h = \overline{CD}$, se tiene: $b^2 = y{\cdot}c$ y $a^2 = x{\cdot}c$ así; $b^2{+}a^2 = y{\cdot}c + x{\cdot}c$, lo que implica que $b^2{+}a^2 = (y{+}x){\cdot}c$, y como $x + y = c$, se tiene que: $b^2{+}a^2 = c{\cdot}c$, lo que implica que $b^2{+}a^2 = c^2$, es decir;

"La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa" . Lo anterior, es lo que se conoce como el **Teorema de Pitágoras**.

Ejemplos

1. En el triángulo $\triangle ABC$ rectángulo en el ángulo $\angle B$, la altura sobre la hipotenusa mide 6 m y la proyección de $\overline{AB}$ mide 7.5 m. Calcular las medidas de la hipotenusa, de los catetos y de la otra proyección.



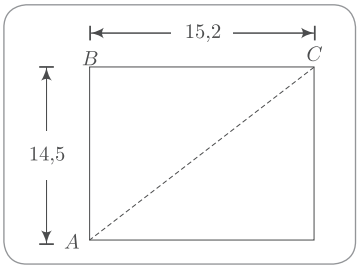
Como $h^2 = x{\cdot}y$ entonces, $y = \frac{h^2}{x} = \frac{(6)^2}{7{,}5} = \frac{36}{7{,}5} = \frac{24}{5}m$

Además como $b = x{+}y$ entonces, $b = \frac{15}{2} + \frac{24}{5} = \frac{75+48}{10} = \frac{123}{10}\,m$, similarmente para la otra proyección se tiene:

Como $c^2 = x{\cdot}b$ entonces,
$c = \sqrt{(\frac{15}{2})(\frac{123}{10})} = \sqrt{\frac{1845}{20}} = \sqrt{92{,}25}\ \text{m} = 9{,}604\text{m}$

Como $a^2 = y{\cdot}b$ entonces,
$a = \sqrt{(\frac{24}{5})(\frac{123}{10})} = \sqrt{\frac{2952}{50}} = \sqrt{59{,}04}\ \text{m} = 7{,}6837\text{m}$

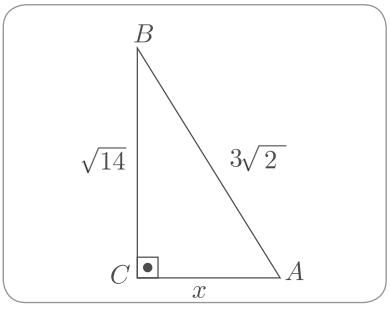
2. Si en un televisor la pantalla mide aproximadamente 15,2 pulgadas de ancho y 14,5 pulgadas de altura. ¿De cuántas pulgadas es la pantalla del televisor?



$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = (14{,}5)^2 + (15{,}2)^2 = 210{,}25 + 231{,}04$$

Así $AC = \sqrt{441{,}29} = 21$ pulgadas aproximadamente.

3. Calcular el valor de x para que el siguiente triángulo sea rectángulo en el ángulo $\angle C$.



El triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo si:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$$

$$(3\sqrt{2})^2 = (\sqrt{14})^2 + x^2$$

$$x^2 = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{14})^2$$

$$x^2 = 9(2) - 14$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2$$

4. Una escalera $8ft$ pies se coloca contra una pared con la base a 3 pies de la pared. ¿A qué altura del suelo está la parte más alta de la escalera?

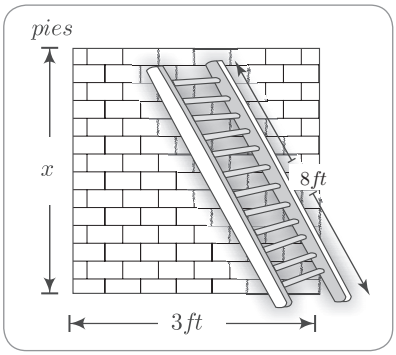
$$x^2 + 3^2 = 8^2$$

$$x^2 = 8^2 - 3^2$$

$$x^2 = 64 - 9$$

$$x = \sqrt{55}$$

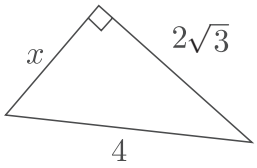
$$x = 7{,}41\ pies$$



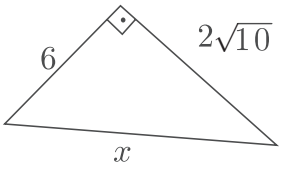
Ejercicio 7.4

1. En los siguientes triángulo rectángulos hallar el valor de:

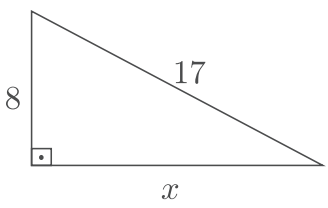
a)



b)



c)



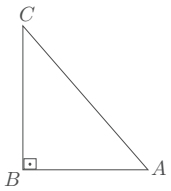
2. En los siguientes ejercicios utilice un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, rectángulo en el ángulo $\angle B$.

   a) Si $\overline{AB}$ =3 y $\overline{AC}$ =5 entonces, $\overline{BC}$ =?

   b) Si $\overline{BC}$ =12 y $\overline{AB}$ = 5 entonces, $\overline{AC}$ = ?

c) Si $\overline{AC} = 17$ y $\overline{AB} = 8$ entonces, $\overline{BC} = ?$

d) Si $\overline{AB} = \sqrt{2}$ y $\overline{BC} = \sqrt{3}$ entonces, $\overline{AC} = ?$

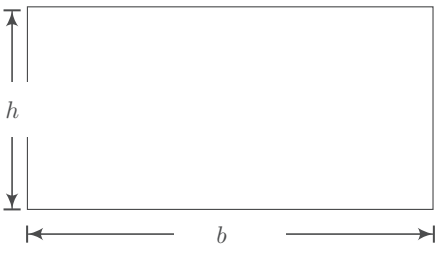


3. Una caja tiene 12 cm de largo, 4 cm de ancho y 5 cm de alto. ¿Cuál es la longitud de la diagonal x?

Polígonos

Área del rectángulo

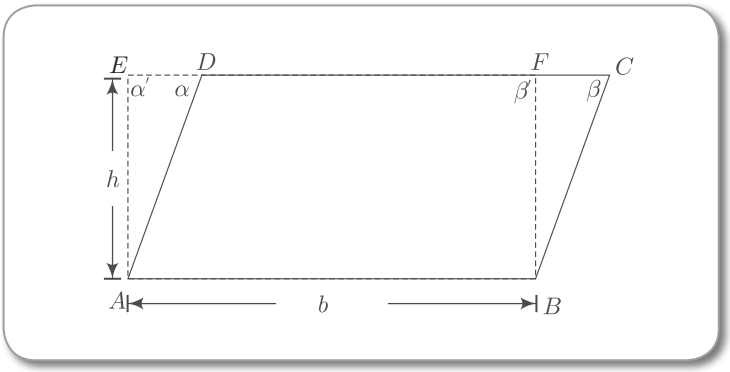
El área del rectángulo es igual al producto de la medida de su base por su altura, es decir; $S = b \cdot h$



Área del paralelogramo

En el paralelogramo $ABCD$ se trazan los segmentos perpendiculares $AE \perp AB$ y $BF \perp DC$, formando un rectángulo $ABFE$.

También se forman los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle BCF$ donde:



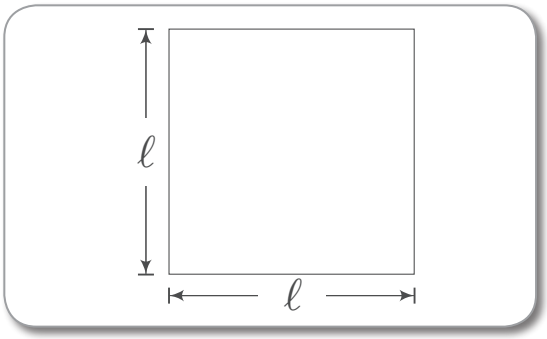
$BC=AD$

$\angle\alpha=\angle\beta$

$\angle\alpha'=\angle\beta'=90°$; así $\triangle ADE=\triangle BCF$ donde, el área del paralelogramo es igual al área del rectángulo; es decir, base por altura: $b\cdot h$

Área del cuadrado

La medida de la base y de la altura son iguales, entonces el área del cuadrado es igual al cuadrado de la medida del lado.



$$\mathbb{A}=\ell\cdot\ell=\ell^2$$

Ejemplos

1. Si la diagonal de un cuadrado es $a+b$, entonces el área es:

Sea x el lado del cuadrado, entonces se tiene que:

$$x^2 + x^2 = (a+b)^2$$
$$2x^2 = (a+b)^2$$

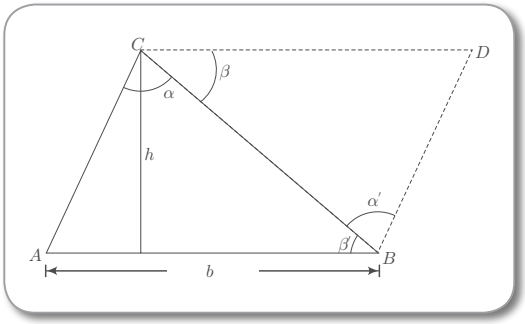
$x = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$, así el área del cuadrado es:

$$\mathbb{A} = x \cdot x = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(a+b)^2}{2}$$

Área del triángulo

Sea el triángulo $\triangle ABC$, si trazamos paralelas a sus respectivos lados opuestos, formamos el paralelogramo $ABCD$.

En los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BDC$ tomemos:



$CB = CB$

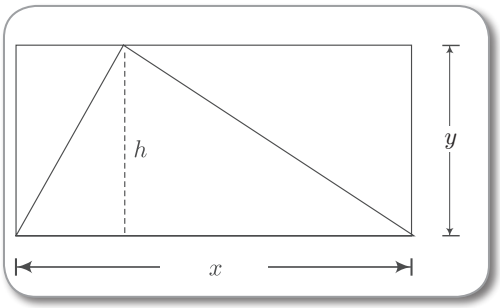
$\angle\alpha = \angle a'$; así $\triangle ABC$ y $\triangle BDC$, luego $\angle\beta = \angle\beta'$

$\mathbb{A}_{paralelogramo}$ $2\mathbb{A}\ \triangle ABC$

$$\mathbb{A}\triangle ABC = \frac{\mathbb{A}_{paralelogramo}}{2} = \frac{b.h}{2}$$

Ejemplos

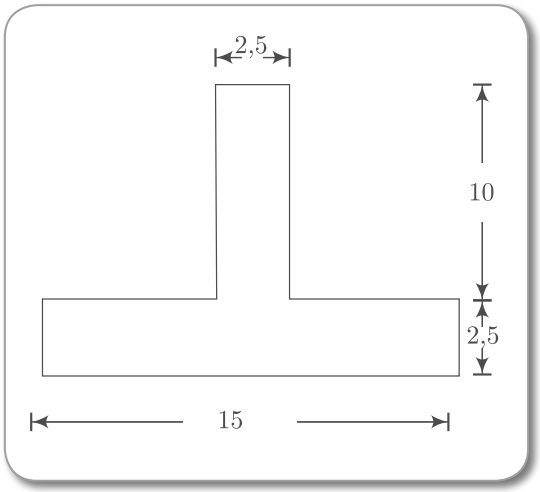
1. En la figura, el área del rectángulo es $20u^2$, entonces el área del triángulo es:



Como $A_{rectangulo}=x\cdot y$,
pero $h=y$, entonces $x\cdot h=20$ lo que implica que:
$h = \frac{20}{x}$, así el área del triángulo es: $\mathbb{A}\triangle = \frac{x\left(\frac{20}{x}\right)}{2} = 10\,u^2$

Ejemplo del área del rectangulo

2. Determinar el área de la sección recta en T de la siguiente figura.

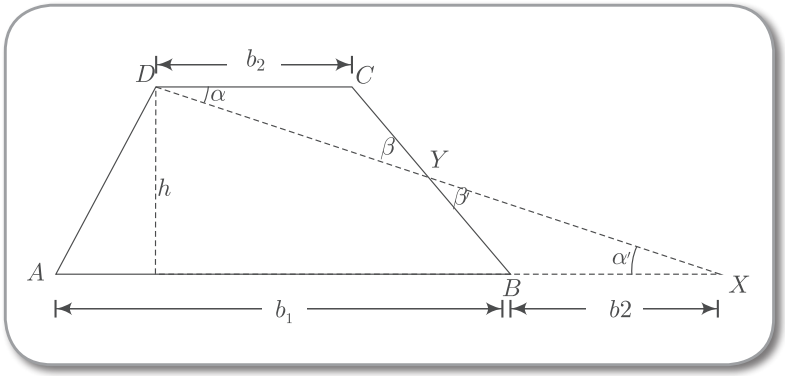


Solución

$$\mathbb{A} = 15(2{,}5)+10(2{,}5) = 37{,}5+25$$
$$= 62{,}5$$

Área del trapecio

Sea el trapecio $ABCD$, prolongando AB y si $BX=DC$ se tiene $\triangle AXD$. Se observa que el trapecio es equivalente $ABCD$ es equivalente al triángulo $\triangle AXD$, ya que; el cuadrilátero $ABYD$ más el triángulo $\triangle YCD$ es igual al trapecio $ABCD$; donde $\triangle YCD = \triangle BXY$ porque: $DC = BX$; $\angle\alpha = \angle\alpha'$; $\angle\beta = \angle\beta'$. Así el área del trapecio $ABCD = \mathbb{A}\triangle AXD$, de esta manera se tiene que:

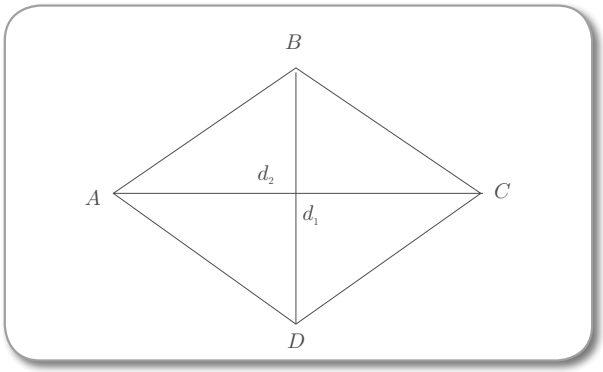


$$ABCD = \mathbb{A}\triangle AXD = \left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)h.$$

Así el área del trapecio es igual al semiproducto de la suma de las medidas de las bases por la medida de la altura.

Área del rombo

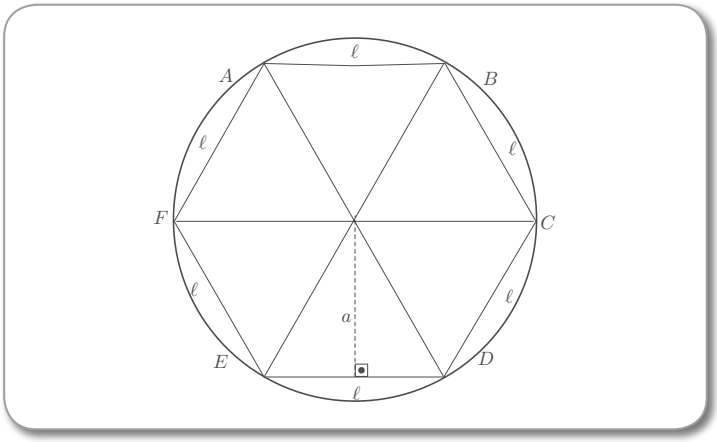
Sea el rombo $ABCD$; si trazamos sus diagonales observamos que el rombo es la unión de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$, los cuales son congruentes. Área del rombo $= \mathbb{A}rombo = 2\mathbb{A}\triangle ABC = \frac{2d_1d_2}{2} = \frac{d_1d_2}{2}$, es el semiproducto de las medidas de las diagonales.



$$\mathbb{A}rombo = 2\mathbb{A}\triangle ABC = \frac{2d_1d_2}{2} = \frac{d_1d_2}{2}$$

Área del polígono regular

El siguiente polígono se descompone en n triángulos isósceles congruentes que tienen de base l y altura a que corresponden a las medidas del lado y la apotema del polígono.



$\mathbb{A}_{poligono\ regular} = \frac{nla}{2} = \frac{(nl)a}{2} = \frac{p.a}{2}$; donde $p{=}nl$, que es el perímetro del polígono.

$$\mathbb{A}_{poligono\ regular} = \frac{nla}{2} = \frac{(nl)a}{2} = \frac{p.a}{2}$$

Ejercicio 7.5

1 Calcule el área de un rectángulo, si tiene una altura de 5 m y su diagonal mide 13 cm.

2. Calcule las longitudes de la base y de la altura de rectángulo, si su área es 35 m^2 y su perímetro es 24 m.

3. Calcule el área de un cuadrado cuyo perímetro es 45 cm.

4. Calcule el número de pulgadas cuadradas en un pie cuadrado.

5. Calcular el área de un triángulo equilátero que tiene por lado $\frac{5}{8}$ de metro.

6. Calcular el área de un triángulo equilátero que tiene de altura 45,5 m.

7. Calcular el área de un triángulo equilátero si su perímetro es de $\frac{36}{5}$ de dm.

8. Calcular las dimensiones a y b, de un rectángulo que están en a relación de 3 a 4, si la diagonal del rectángulo mide 40 m.

9. Calcular el área de un cuadrado, si el lado y la diagonal del cuadrado suman 24,15 m.

10. ¿Cuáles son las dimensiones a y b de un campo deportivo rectangular, si la diagonal mide 200 m y que vendido el metro cuadrado ($m^{2)}$ a 210 dólares, ha producido $3.760.050,00 dólares?

11. ¿Cuáles son las dimensiones b y a de un triángulo que están en relación 3 a 5, si el área es de 360 m^2?

12. Calcular el perímetro de un rombo si tiene un área de 180 m^2, y la diagonal menor es igual al lado.

13. Calcular las bases de un trapecio regular, si el área del trapecio es de 1.600 m^2 y las bases y la altura del trapecio están en relación de 3, 5 y 7, respectivamente.

14. Calcule el área de un rectángulo, si su base tiene longitud 7,5 cm y el perímetro es 25 cm.
15. Calcule la longitud del lado de un pentágono regular, si su perímetro es de 17,5 cm.
16. Calcule el área de un hexágono regular si la longitud de su apotema es de $10\sqrt{3}$ cm.
17. Calcule el área de un pentágono regular si la longitud de su apotema es de 10 cm.

.

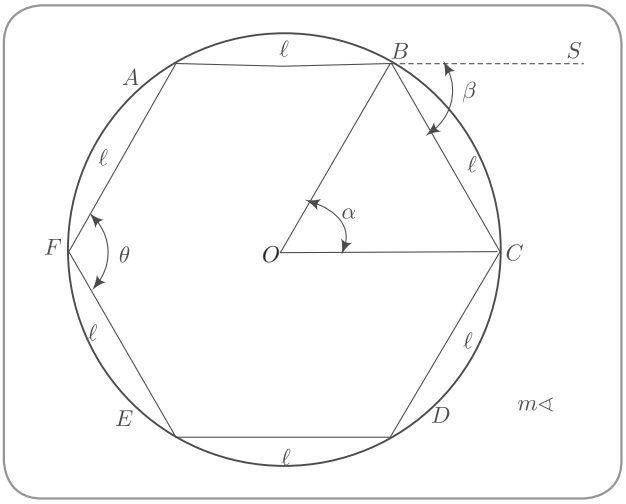
Generalidades de un polígono regular

Si se divide la circunferencia en tres o más arcos congruentes y si se unen los puntos consecutivos mediante cuerdas, se obtienen polígonos regulares inscritos. Además, al unir los vértices consecutivos con el centro de la circunferencia, siempre se forman triángulos cuya altura sobre el lado del polígono recibe el nombre de apotema.

Ejemplos

1. Veamos para el hexágono regular $ABCDEF$ lo anterior.

$m\angle BOC = m\angle CBS$; es decir,



$\angle\alpha = \angle\beta$, donde $\frac{360°}{n} = \frac{360°}{6} = 60°$

$m\angle AFE \frac{(n-2)180°}{n} = \frac{(6-2)180°}{n} = \frac{(4)180°}{6} = 120^{\circ}$

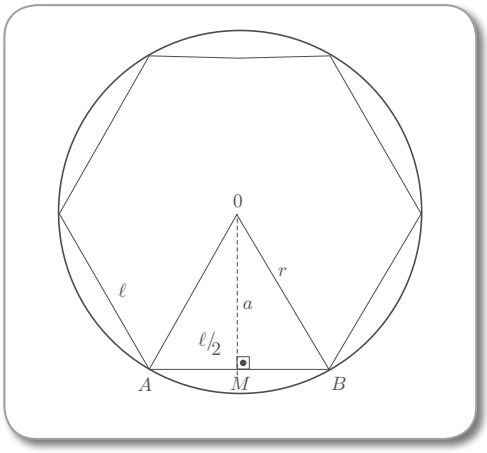
Se observa que la suma del ángulo interno $m\angle AFE$ más la medida del ángulo externo $m\angle CBS$ es 180° es decir;

$$m\angle AFE + m\angle CBS = \theta + \alpha = 120° + 60° = 180°$$

Relaciones entre segmentos y apotemas en algunos polígonos regulares

Ejemplos

1. Calcular las medidas del lado y la apotema de un hexágono regular inscrito en una circunferencia con centro en o y radio r;



l: medida del lado del hexágono

a: apotema o altura h del triángulo. Se observa que $r = l$.

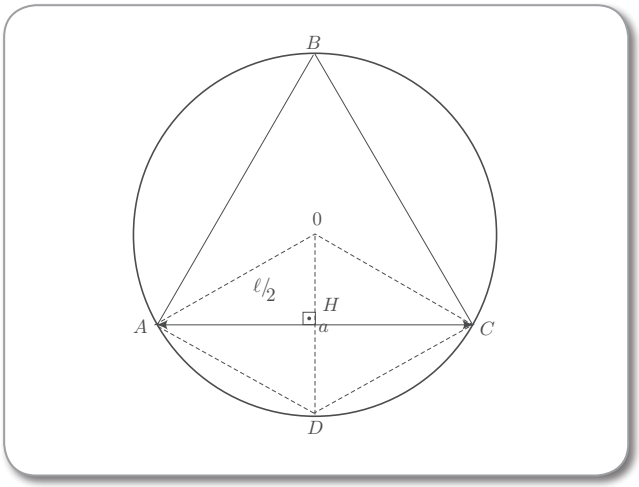
En el triángulo $\triangle AMO$ rectángulo en M se tiene:

$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2$

$r^2 = \frac{l^2}{4} + a^2$ entonces $a^2 = r^2 - \frac{l^2}{4}$ así;

$a^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4}r^2$ de donde $a = \frac{r}{2}\sqrt{3}$

2. Calcular las medidas del lado y la apotema de un triángulo equilátero $\triangle ABC$ inscrito en una circunferencia de centro o y radio r.



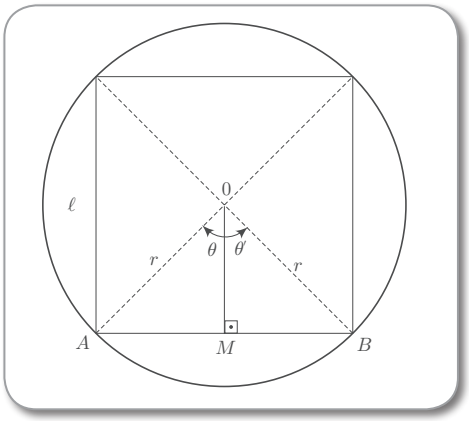
Se observa que los segmentos, $OA = AD = DC = OC = r$ y forman el rombo $OADC$, donde sus diagonales AC y OD son perpendiculares y se cortan en sus puntos medios, así; $OH = \frac{OD}{2}$, entonces $a = \frac{r}{2}$. Luego en el triángulo $\triangle AOH$ rectángulo en H se tiene:

$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2$

$(\frac{l}{2})^2 = r^2 - a^2 = r^2 - (\frac{l}{2})^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4}r^2$ así;

$\frac{l^2}{4} = \frac{3}{4}r^2$ entonces $l = r\sqrt{3}$

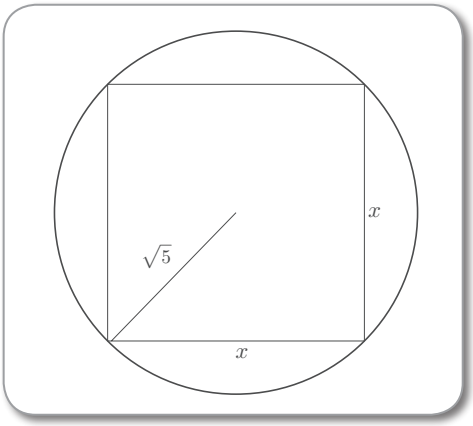
3. Calcular las medidas del lado y la apotema de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio r y centro o.



El ángulo $\angle AOB = \frac{360°}{4} = 90°$, así; $\triangle AOB$ es rectángulo en O, donde la hipotenusa es el lado del cuadrado y sus catetos son el radio de la circunferencia, luego, $l^2{=}r^2{+}r^2{=}2r^2$, entonces $l = r\sqrt{2}$.

El triángulo $\triangle AOB$ es isósceles, entonces haciendo $OM{=}MB$, es decir; $a = \frac{l}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ se tiene que $a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

4. Calcule el área de un cuadrado si el radio del círculo circunscrito es $\sqrt{5}\ cm$.



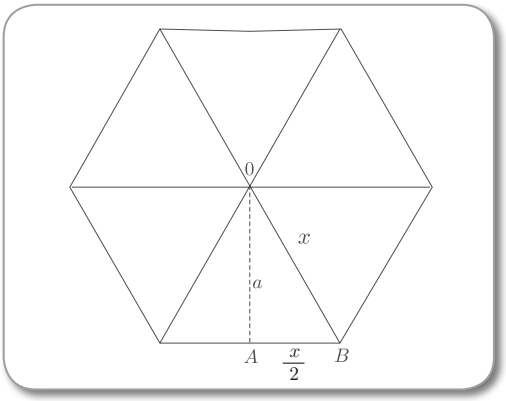
La diagonal del cuadrado inscrito en el círculo es: $d = 2\sqrt{5}$, así: $d^2 = x^2 + x^2$, lo que implica que:

$$d^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 2x^2$$

$$4(5) = 2x^2$$

$$x = \sqrt{10}\,cm$$

5. Calcule el área de un hexágono regular, si la longitud de su apotema es de $5\sqrt{3}\,cm$.



En el triángulo se tiene: $\triangle OAB$

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 = 25(3) + \frac{x^2}{4} = 75 + \frac{x^2}{4}$$

$x^2 - \frac{x^2}{4} = 75$; $\frac{3}{4}x^2 = 75$, así:

$x^2 - \frac{x^2}{4} = 75$; $\frac{3}{4}x^2 = 75$, $x^2 = \frac{(4)(75)}{3} = \frac{300}{3}$ lo que implica que

$$x = \sqrt{\frac{300}{3}} = \sqrt{100} = 10$$

Así el perímetro es: $P = 6x = 6(10) = 60$.

Por lo tanto el área del polígono regular es:

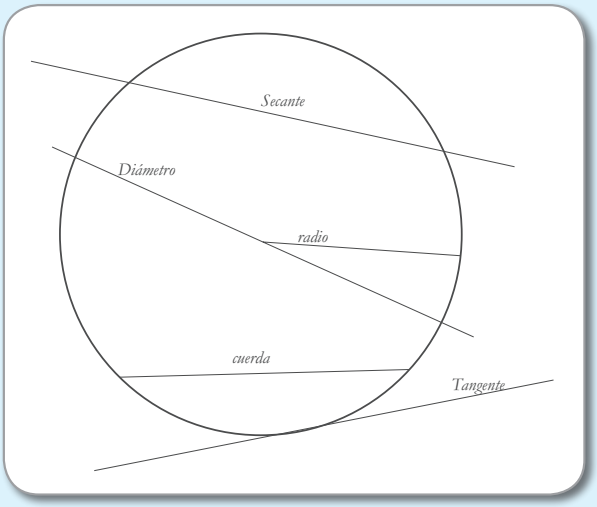
$$\mathbb{A}_{P-R} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{60\left(5\sqrt{3}\right)}{2} = 150\sqrt{3}cm^2.$$

Ejercicio 7.6

1. Calcule la apotema de un pentágono regular, si el radio del círculo inscrito es de $\sqrt{3}$ m.
2. Calcule el área de un cuadrado si el radio del círculo circunscrito es $\sqrt{2}$ m
3. Calcular el área de un triángulo equilátero inscrito en un círculo, si el círculo tiene un cuadrado inscrito de lado 1,2 cm.

Circunferencia y área del círculo

El círculo está formado de una sucesión de puntos que están a la misma distancia de un punto llamado centro; algunos elementos del círculo se definen a continuación:



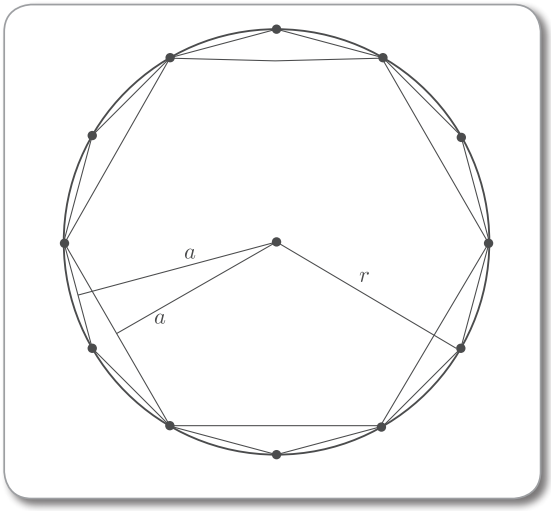
Radio: es un segmento con un extremo en el centro y otro en el círculo.

Diámetro: es una cuerda que pasa por el centro del círculo.

Secante: es una línea que intersecta dos veces al círculo.

Tangente: línea que intersecta al círculo en un solo punto sin cruzarlo.

El círculo también se puede considerar como un polígono regular con un número infinito de lados, como se muestra en la siguiente figura. En este proceso de aproximación indefinida de los polígonos al círculo, el perímetro de los polígonos tiende a la longitud de la circunferencia y las medidas de las apotemas a la del radio, es decir;



$p \to 2\pi r$ y $a \to r$ así;

$$\mathbb{A}_{circulo} = \frac{p.a}{2} = \frac{2\pi r}{2} r = \pi r^2$$

Ejemplos

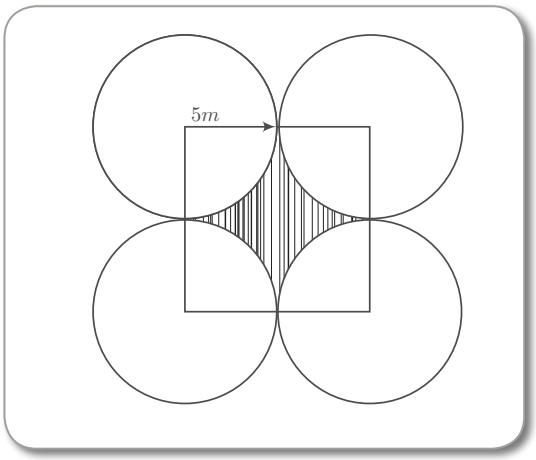
1. Calcular el área de un círculo que tiene una circunferencia de 28,7.

   Como $2\pi r = 28{,}7$ se tiene que; $r = \frac{28{,}7}{2\pi} = 4.$

   Así el área del círculo es: $A = \pi(4{,}56)^2 = 65{,}32 cm^2$.

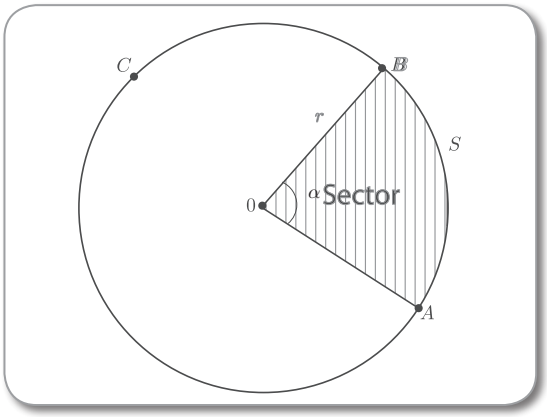
2. Calcular el área de la región sombreada. El área que no esta sombreada dentro del cuadrado corresponde a un área de un círculo de radio $5m$, es decir;

$\mathbb{A}=\pi r^2=\pi 5^2=25\pi^2$,
y el área del cuadrado es:
$\mathbb{A}=10^2=100$. Así el área sombreada es:
$\mathbb{A}_s=100-25\pi^2=25(4-\pi)\ m^2$.



Longitud de arco, áreas de un sector y de un segmento

Un sector de un círculo es la parte del círculo acotada por dos radios y su arco intersectado.



AB=S, donde S es la longitud de arco. El arco está formado por un círculo de radio r y un ángulo central α en radianes y tiene una longitud de arco S que es: $S = \alpha r$, entonces $\alpha = \frac{S}{r}$, también se tiene que:

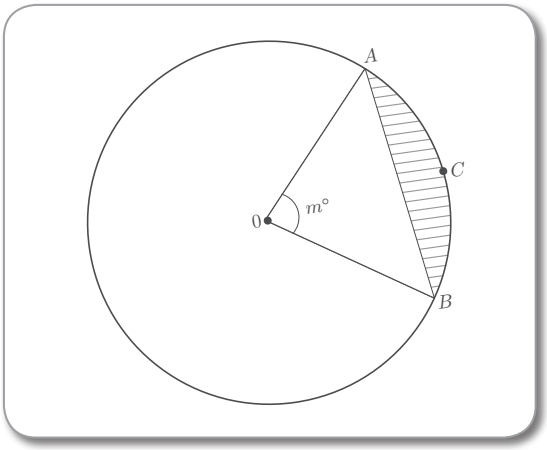
Si $S = r$, entonces α =1 rad.

Si $S = 2\pi r$, entonces $\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad.

AB es el arco menor y ABC es el arco mayor.

De acuerdo a lo anterior se tiene:

- En un círculo de radio r la longitud de arco S de medida m° es igual a $\frac{m}{360}$ de la circunferencia del círculo; $S = (\frac{m}{360°})(2\pi r) = \frac{m\pi r}{180°}$
- El área de un sector de medida m° es igual a $\frac{m}{360}$ del área del círculo; $S = (\frac{m}{360°})(2\pi r) = \frac{m\pi r}{180°}$.



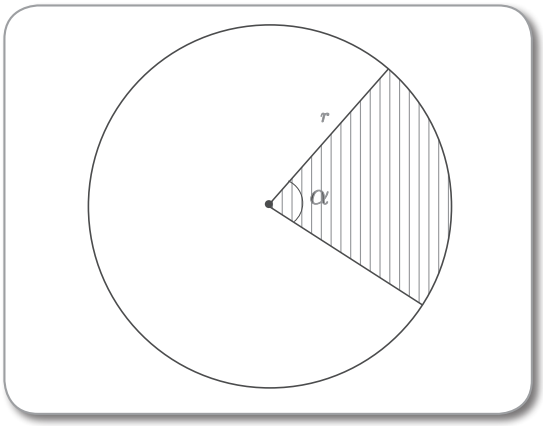
Ejemplo

1. Calcular el área de un sector circular si se conoce que el radio r=10 cm y su ángulo central es 60°.

   Si, 360° equivale al barrido en grados del área total del circulo equivalente a πr^2.

   $\alpha \Rightarrow$ arco del sector así el área del sector es: $\frac{\alpha\pi r^2}{360°}$ así el área es:

   $$\mathbb{A}_{s\text{-}c} = \frac{(60°)(\pi(10)^2)}{360°} = \frac{100\pi}{6}\ \text{cm}^2 = \frac{50\pi}{3}\ \text{cm}^2 = 52{,}35\ \text{cm}^2$$

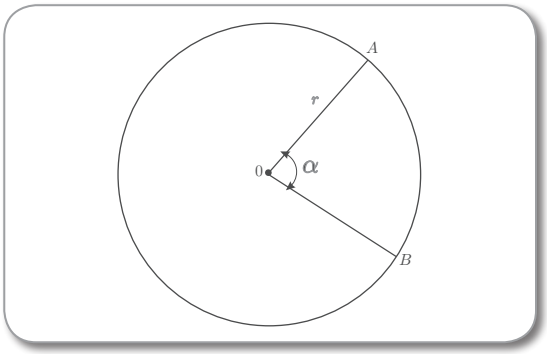


Un segmento de un círculo es una parte de un círculo acotada por una cuerda y su arco. ABC es el segmento menor.

Medición de ángulos y arcos en un círculo

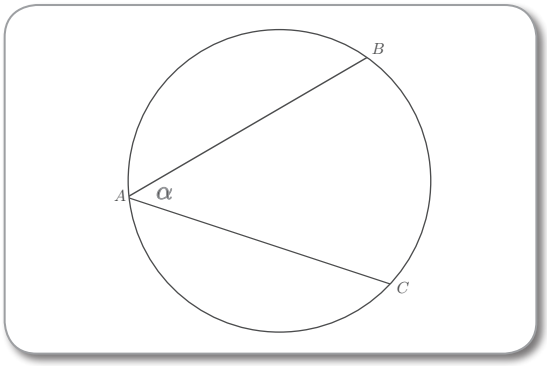
- Si el vértice está en el centro del círculo se genera un ángulo central:

$$m(AB)=m(\alpha)$$



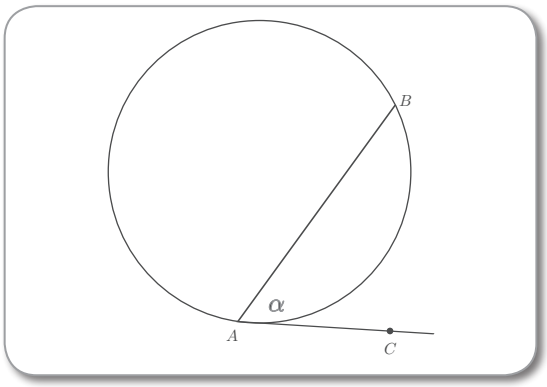
- Si el vértice está sobre el círculo se tiene:

a) **Un ángulo inscrito**



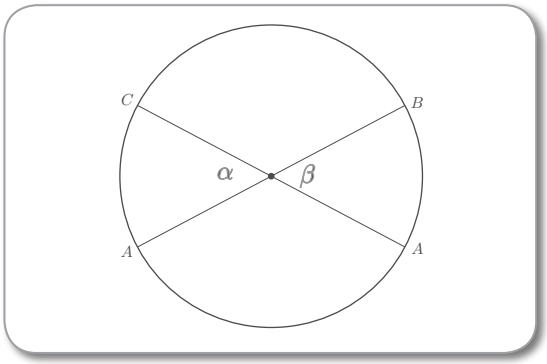
$$m(\alpha) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

b) Un ángulo formado por una cuerda y una tangente.



$$m(\alpha) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

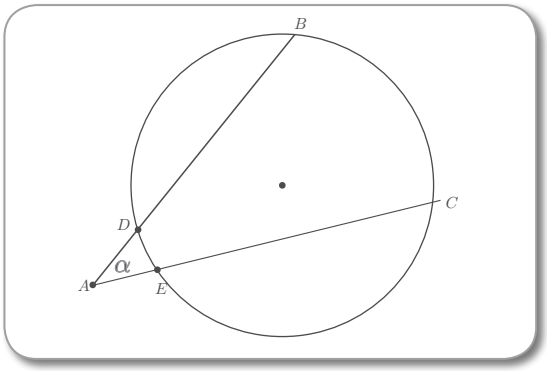
- Si el vértice esta dentro del círculo, se tiene un ángulo formado por dos cuerdas que se intersectan:



$$m(\alpha) = \frac{AC + BD}{2} \text{ o } m(\alpha) = \frac{m(\alpha) + m(\beta)}{2}$$

- Si el vértice esta fuera del círculo, se tiene:

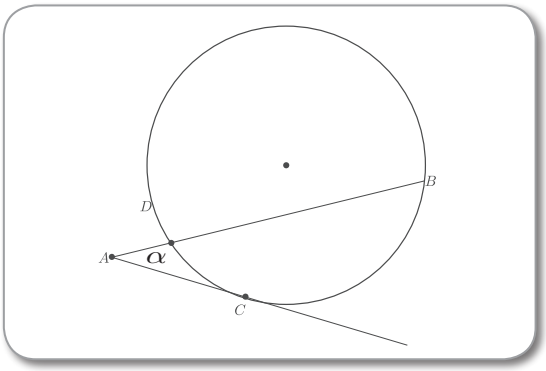
a) Un ángulo formado por dos secantes.



$$m(\alpha) = \frac{BC - DE}{2}$$

también se cumple que $AB \cdot AD = AC \cdot AE$.

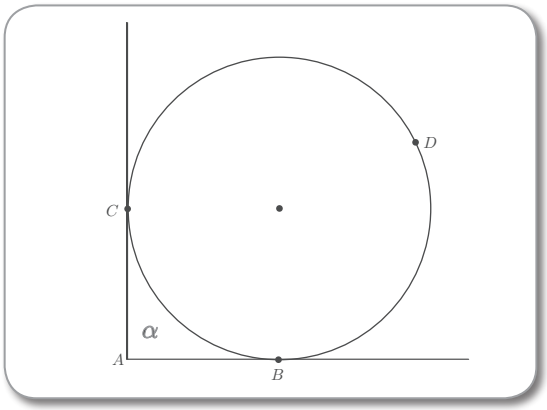
b) Un ángulo formado por una secante y una tangente.



$$m(\alpha) = \frac{BC - DC}{2}$$

También se cumple $(AC)^2 = AB \cdot AD$.

c) Un ángulo formado por dos tangentes.

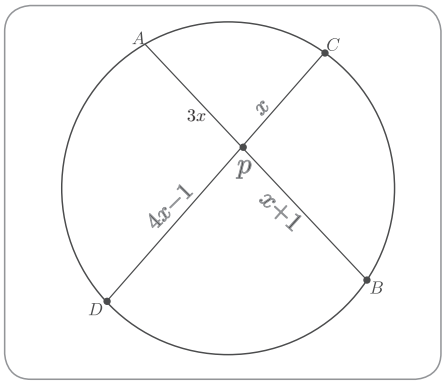


$$m(\alpha) = \frac{CDB - CB}{2}$$

o $m(\alpha) = \{180° - m(\alpha)\}$, también se cumple, que $AC = AB$.

Ejemplo

1. En la siguiente figura el valor de x es:



$\overline{CP} \cdot \overline{PD} = \overline{AP} \cdot \overline{PB}$

$x(4x-1) = 3x(x+1)$

$4x^2 - x = 3x^2 + 3x$, así:

$x^2-4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x=0$ o $x=4$.

Ejercicio 7.7

1. Calcular el radio de un círculo, si el área del cuadrado inscrito en el círculo es de 36 cm^2.
2. Calcular el área de una corona circular comprendida entre los círculos inscrito y circunscrito, a un cuadrado de 22 m de lado.
3. Calcular el radio de un círculo, donde dos cuerdas se cortan en él y el producto de los segmentos de cada cuerda es de 867,75 cm y además, la distancia del punto de intersección al centro del círculo es de 12,5 cm.
4. Calcular el lado de un cuadrado inscrito en un círculo que es concéntrico a otro círculo más grande, donde el radio del círculo grande es 4 m mayor que el radio del círculo pequeño y el área queda aumentada en 80 m^2.
5. Calcular en función del radio de la circunferencia circunscrita, el área del segmento circular comprendido entre el lado del hexágono regular inscrito y el arco subtendido por el hexágono.
6. Calcule las medidas del ángulo central, el ángulo externo y el ángulo interno de un octágono regular.

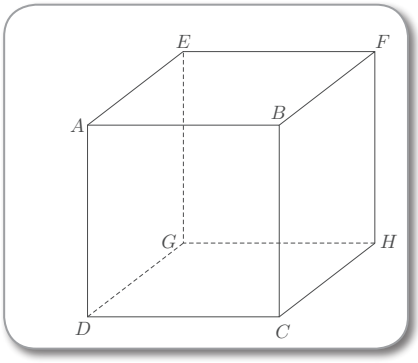
7. Calcule las medidas del ángulo externo y el número de lados de un polígono regular cuyo ángulo interno mide 162º.

Áreas y volúmenes de sólidos

Geometría del espacio

El conjunto de todos los puntos se llama espacio. La geometría del espacio también llamada frecuentemente geometría de los sólidos, trata básicamente de las figuras que no se encuentran en el mismo plano, es decir; una figura en el espacio es una combinación de puntos, rectas y superficies que pueden ser planas y curvas.

En la siguiente figura se tiene:

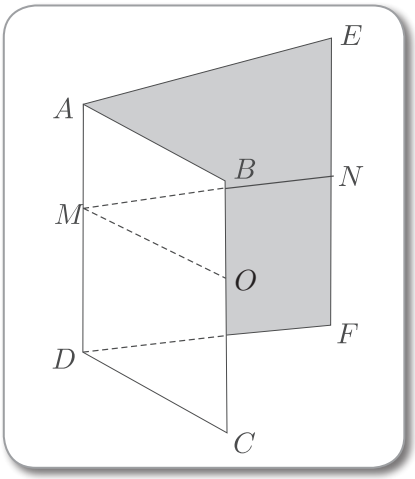


- Ocho vértices.
- Doce aristas; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... , $\overline{GH}$.
- Seis caras; $ABCD$, $EFGH$, ...$BCHF$.

Ángulo diedro

Un *ángulo diedro* es la unión de una recta y dos semiplanos no coplanares que tienen a la recta como su borde en común. La recta se llama *arista* del ángulo diedro y la unión de la arista y su semiplano se llama *cara* o lado del ángulo diedro.

En la siguiente figura se tiene:
- $ABCD$ y $AEFD$, son las caras.
- AD es la arista del ángulo diedro $\angle BADF$.

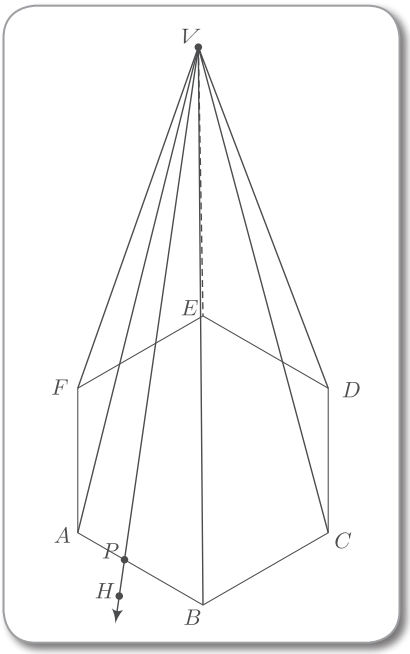


EL *ángulo plano* de un ángulo diedro es el ángulo formado por dos rayos, uno en cada cara, con un vértice común y ambos perpendiculares a la arista en el vértice. En la gráfica anterior se observa que $\angle OMN$ es un ángulo plano del ángulo diedro $\angle BADF$ ya que, $MO \perp AD$ y $MN \perp AD$. Mencionemos algunas propiedades:

- Todos los ángulos planos de un ángulo diedro son congruentes.
- La medida del ángulo plano de un ángulo diedro es la medida del ángulo diedro.
- Si un ángulo plano es agudo, obtuso o recto; el ángulo diedro es agudo, obtuso o recto, respectivamente.
- Dos planos son perpendiculares si, y sólo si, se intersectan para formar ángulos diedros rectos.
- Dos águlos planos son congruentes si, y sólo si, sus ángulos diedros son congruentes.

Ángulo poliedro

Sea $ABCDEF$ un polígono cerrado que se encuentra en un plano y sea V un punto exterior al plano del polígono. El conjunto de los puntos H sobre los rayos desde V que pasan por todos los puntos P del polígono se llama Ángulo poliendro.



- El ángulo poliedro se nota $\angle$ *poliedro* V o $\angle$ *poliedro*$-ABCDEF$.
- Las caras VAB, VBC, VCD, ..., VFA son partes de los planos que forman el ángulo poliedro.
- Las intersecciones de las caras adyacentes son las aristas del ángulo poliedro.
- El ángulo AVB es un *ángulo cara* del ángulo poliedro.
- Los ángulos $\angle AVBC$ y $\angle BVCD$, son los ángulos diedros del ángulo poliedro.

Clasificación de sólidos

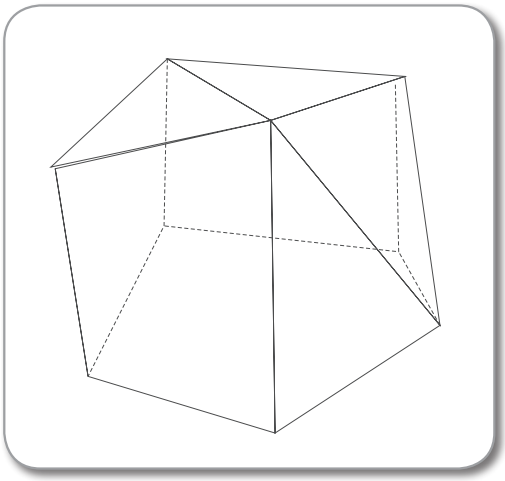
Poliedros

Un *poliedro* es un sólido limitado únicamente por un número finito de superficies planas que son regiones poligonales que cumple:

- El interior de dos regiones cualesquiera no se intersectan.
- Cada lado de cualquiera de los polígonos, es también un lado de uno de los otros polígonos.
- La intersección de dos caras cualesquiera del poliedro es una arista.

- La intersección de dos aristas cualesquiera es un vértice del poliedro.

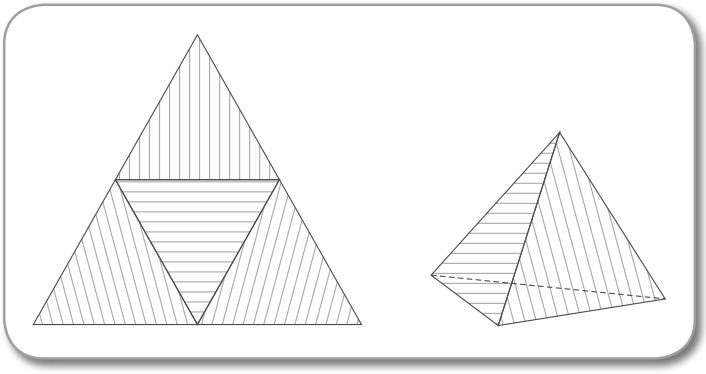
En la siguiente figura se tiene un poliedro con: 8 caras, 16 aristas y 9 vértices.



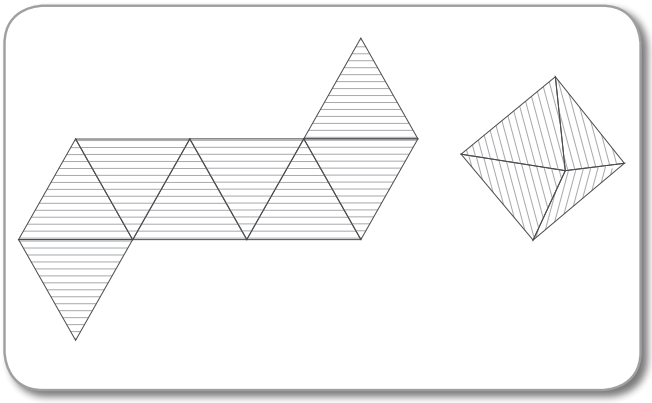
Un poliedro es *regular* si sus caras son polígonos regulares y sus ángulos poliedros son iguales.

Existen exactamente cinco poliedros regulares que están limitados por triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares.

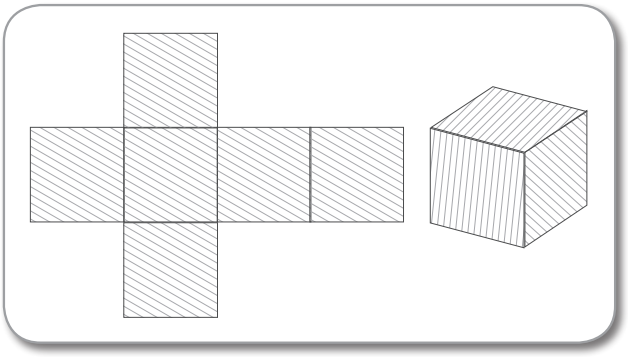
- El *tetraedro regular*, que está limitado por cuatro triángulos equiláteros, donde cada uno de los cuatro ángulos poliedros mide $180°$. Este tetraedro tiene 4 caras, 6 aristas y 4 vértices.



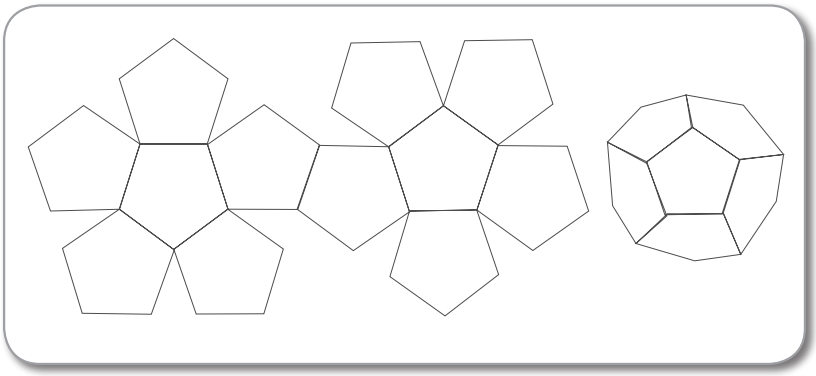
- El *octaedro regular*, que está limitado por ocho triángulos equiláteros. En este sólido cada uno de los seis ángulos poliedros mide $240°$ este octaedro tiene 8 caras, 12 aristas y 6 vértices.



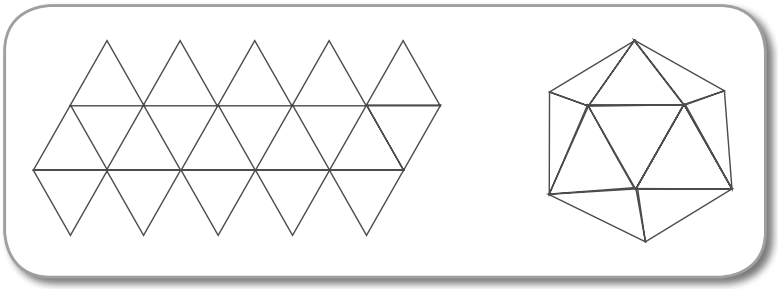
- El *hexaedro regular*, que está limitado por seis cuadrados, donde cada uno de los ocho ángulos poliedros mide $270°$; este hexaedro tiene 6 caras, 12 aristas y 8 vértices.



- El *dodecaedro regular*, que está limitado por doce pentágonos, donde cada uno de los veinte ángulos poliedros mide $324°$; este sólido tiene 12 caras, 30 aristas y 20 vértices.

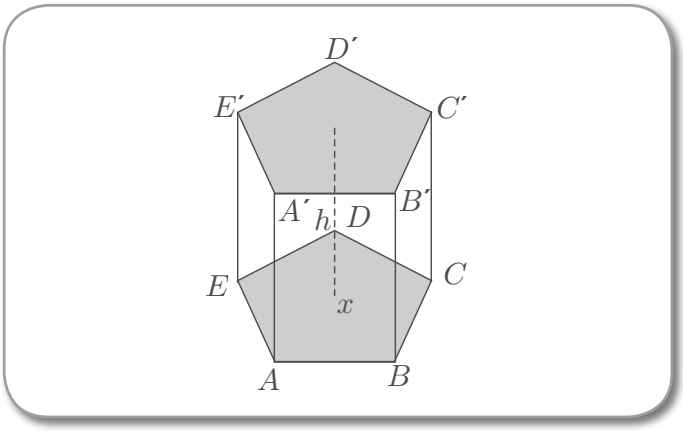


- El *icosaedro regular*, está limitado por veinte triángulos equiláteros, donde cada uno de los doce ángulos poliedros mide 300°; este sólido tiene 20 caras, 30 aristas y 12 vértices.



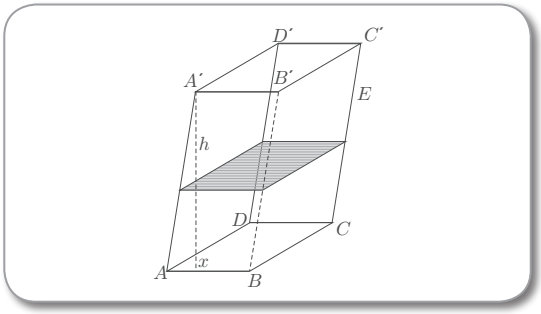
Prisma

Un *prisma* es un poliedro que tiene dos caras paralelas, llamadas bases, las demás caras son paralelogramos, llamadas caras laterales del prisma. En el prisma AE', la base es congruente con la base $A'B'C'D'E'$. La altura h del prisma es la distancia entre las dos bases.

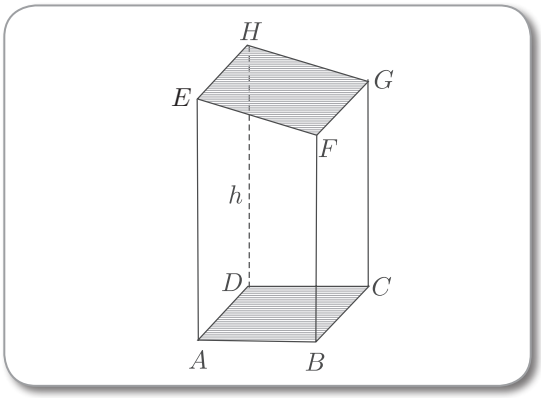


La figura anterior es un *prisma recto*, donde las aristas laterales son perpendiculares a las bases y son iguales y paralelas entre ellas.

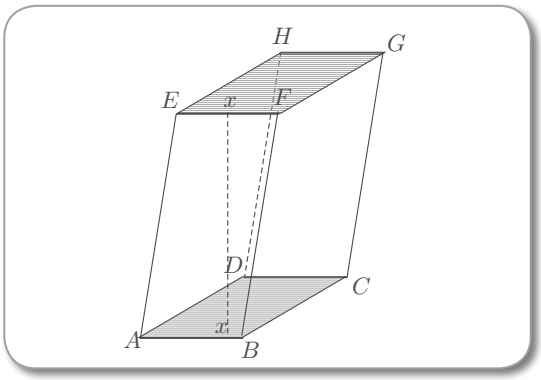
- *Prisma oblicuo* es aquel cuyas aristas laterales son oblicuas a las bases y mayores a la altura.



- *Tronco de prisma*; es la parte de prisma comprendida entre una base y un plano oblicuo que corte todas las aristas laterales.



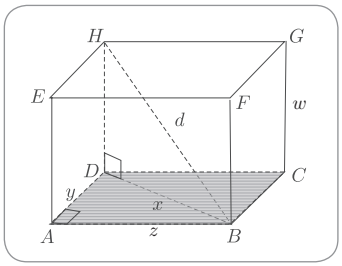
- *Paralelepípedos*, es todo prisma cuyas caras son paralelogramos y congruentes.



- *Paralelepípedo regular*; es un paralelepípedo cuyas caras son rectángulos. Un paralelepípedo rectangular cuyas bases y caras son cuadrados congruentes es un cubo.

Ejemplos

1. Calcular la diagonal del paralelepípedo rectangular, en función de sus tres dimensiones.



Sea el paralelepípedo AH, donde:

$\overline{HB}$, es la diagonal del paralelepípedo igual a d.

$\overline{DB}$, es la diagonal de la base $ABCD$ igual a x.

En el triángulo $\triangle DAB$ rectángulo en A se tiene:

$$y^2 + z^2 = x^2 \qquad (1)$$

En el triángulo $\triangle HDB$ rectángulo en D se tiene:

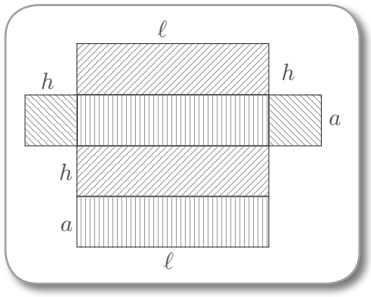
$$x^2 + w^2 = d^2 \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) tenemos;

$y^2 + z^2 + w^2 = d^2$, así; $d = \sqrt{y^2 + z^2 + w^2}$

2. Calcular el área total del paralelepípedo rectángulo de largo ℓ, ancho a y alto h.

$$\mathbb{A} = 2\ell a + 2\ell h + 2ah = 2(\ell a + \ell h + ah)$$



Área del prisma

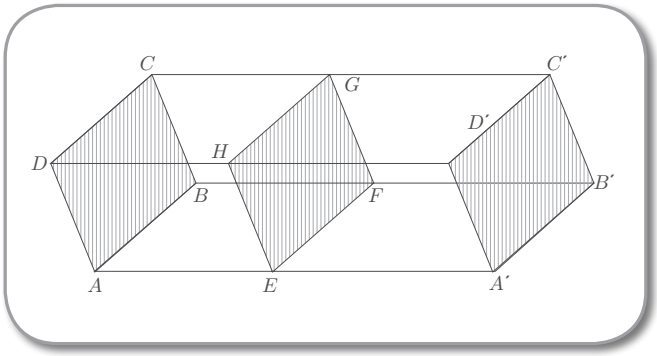
Sea el prisma AD', las aristas laterales $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{DD'}$ y $\overline{CC'}$ son perpendiculares a la sección recta $EFGH$ y por lo tanto a las rectas $\overline{EH}$, $\overline{HG}$, $\overline{GF}$ y $\overline{FE}$, así el área lateral del prisma es;

$$\mathbb{A}_L = l\cdot\overline{EH} + l\cdot\overline{HG} + l\cdot\overline{GF} + l\cdot\overline{FE}$$

$$\mathbb{A}_L = l\cdot\left(\overline{EH} + \overline{HG} + \overline{GF} + \overline{FE}\right)$$

$\mathbb{A}_L = l\cdot P$, donde P es el perímetro de la base y l la altura.

Así el área total del prisma es:
$\mathbb{A}_T = \mathbb{A}_L + 2\mathbb{B}$



Ejercicio 7.8

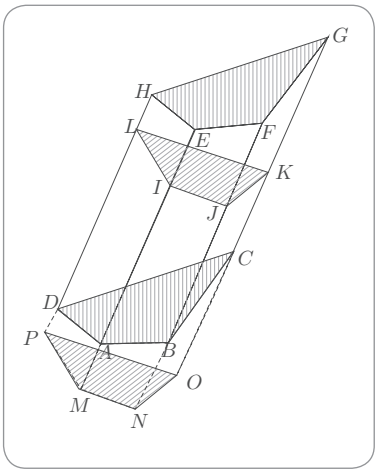
1. Calcule el área de la superficie total de un cubo cuya arista es π pies.
2. Calcule el área de la superficie total de un sólido rectangular con dimensiones de 11, 15 y 8,5 pies.
3. Calcular la diagonal de un cubo, si su arista es de 9 m.
4. Calcular la diagonal de un paralelepípedo rectángulo, en función de sus tres dimensiones.
5. Calcular la arista de un cubo si su área total es de 5 m^2.

Volumen del prisma

El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de la sección recta por una de sus aristas laterales. Todo prisma oblicuo es equivalente a otro prisma recto que tiene por base la sección recta del prisma oblicuo y por altura la arista lateral.

En el prisma oblicuo $DABCHEFG$, se traza la sección recta $LIJK$ y prolongamos sus aristas laterales.

Sea $LP = HD$ y por el punto P se traza la sección recta $MNOP$ paralela a $IJKL$.



Los troncos de prisma $MNOPABCD$ y $IJKLEFGH$ son iguales, por tener sus bases y sus aristas respectivamente iguales. Así el prisma oblicuo DH es equivalente al prisma recto ML, luego el producto de la sección recta por la arista lateral, es igual al producto de la base por la altura $V_{prisma}=\mathbb{B}\cdot h$.

Ejercicio 7.9

1. Calcule el volumen de un cubo, en pies cúbicos, si una arista es de:
   a) 8 pulgadas.
   b) 5 pies.
   c) 4 yardas.
2. Calcule el volumen de un sólido rectangular de longitud 12 pulgadas, de ancho 8 pulgadas y de altura 2 pies.
3. Encuentre el volumen de:
   a) Un pie cúbico en pulgadas cúbicas.
   b) Una yarda cúbica en pies cúbicos.
   c) Un litro (decímetro cúbico) en centímetros cúbicos.

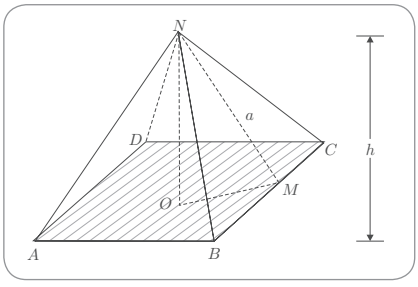
4. Calcular el volumen de un prisma triangular si el lado de la base mide 18 m y su altura es de 24 m.
5. ¿Qué capacidad en litros tiene un tanque que tiene forma de prisma cuadrangular regular, si la apotema de la base es de 1,5 m y su arista lateral es de 3,5 m ?
6. Calcular el volumen de un cubo si su diagonal mide 15 m.
7. Calcular el volumen de un cubo que tiene un área total de 270 dm^3.
8. Calcular el área total de un cubo que contiene 512 litros de capacidad.

Pirámides

Una pirámide es un poliedro que tiene por base un polígono de cualquier número de lados y por caras laterales triángulos, que concurren en un mismo punto llamado vértice.

Pirámide regular

Pirámide regular es la que tiene por base un polígono regular y el pie de la altura coincide con el centro de la base.



En la pirámide $NABCD$, se tiene:

$$\mathbb{A}_L = \frac{ABa}{2} + \frac{BCa}{2} + \frac{CDa}{2} + \frac{DAa}{2}$$

$$\mathbb{A}_L = \frac{1}{2}a\cdot\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}\right)$$

$\mathbb{A}_L = \frac{1}{2}a\cdot P$, donde es el perímetro de la base.

El área total de la pirámide regular es:

$$\mathbb{A}_T = \mathbb{A}_L + \mathbb{B} = \frac{P\cdot a}{2} + \mathbb{B}$$

Ejemplos

1. Calcular el área total $(\mathbb{A}_T)$ de una pirámide cuadrangular regular si la diagonal del polígono de la base mide $4\sqrt{2}\,cm$ y la arista de la pirámide mide 10 cm.

Solución

Como la diagonal del cuadrado es $4\sqrt{2}\,cm$, entonces $x = \overline{AO} = \overline{OC} = 2\sqrt{2}\,cm$ y ; también se observa que el $\triangle BOC$ triángulo es recto en *O*, así; $l^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$

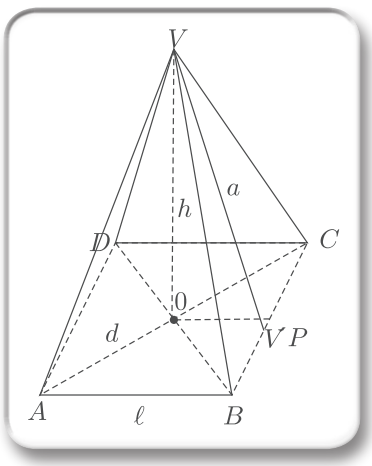
$l^2 = x^2 + x^2$

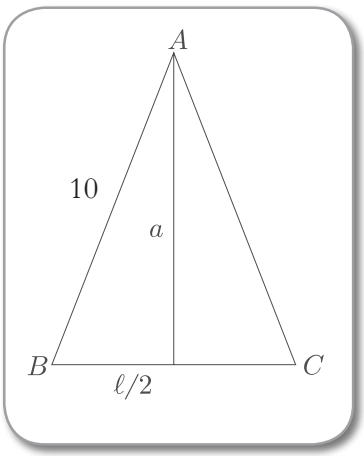
$l^2 = 2x^2$

$l = \sqrt{2}x$

$l = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 4\,cm$

En el triángulo $\triangle OVV'$ rectángulo en $\angle O$ se tiene:





$a^2 = (10cm)^2 - (\frac{\ell}{2}cm)^2$

$a^2 = 100cm^2 - 4cm^2$

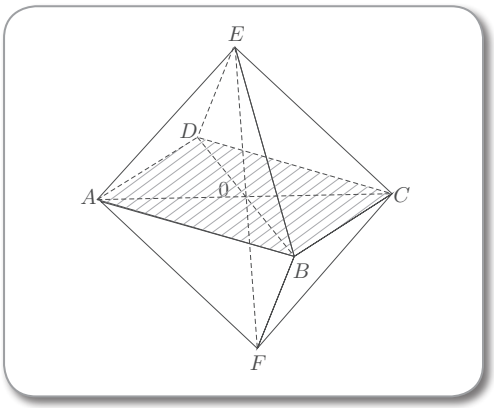
$a^2 = 96cm^2$, entonces, $a = \sqrt{96\,cm^2} = 4\sqrt{6}\,cm$,

Así, $\mathbb{A}_L = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(16\,cm)(4\sqrt{6}\,cm)}{2} = 32\sqrt{6}\,cm^2$

El $\mathbb{A}_T = \mathbb{A}_L + \mathbb{B}$

$$\mathbb{A}_T = 32\sqrt{6}\,cm^2 + 16\,cm^2 = 16\cdot\left(2\sqrt{6}+1\right)cm^2$$

2. Calcular la diagonal del octaedro regular, en función de la arista a.



En el triángulo $\triangle EOA$ rectángulo en O e isósceles, se tiene:

$\overline{EO} = x$ es la mitad de la diagonal EF.

$\overline{OB} = x$ es la mitad de la diagonal BD.

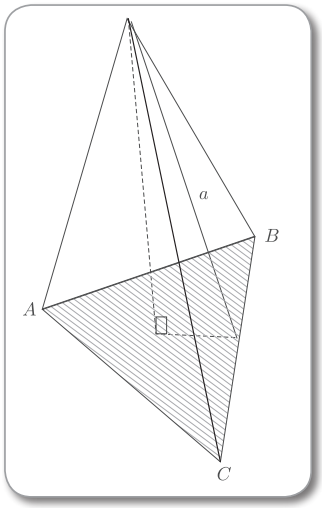
$\overline{BE} = a$ es la arista del octaedro.

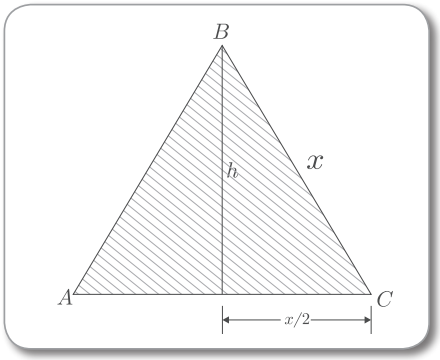
Así, $\overline{BE}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OE}^2$, es decir; $a^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$, entonces $a = \sqrt{2}\,x$.

Por lo tanto, $x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,a}{2}$; como la diagonal es $d = 2x$,

entonces, $d = 2\left(\frac{\sqrt{2}\,a}{2}\right) = \sqrt{2}\,a$.

3. Calcular el área de una pirámide triangular regular, si la apotema de la pirámide mide 180 cm y la altura de la base mide 90 cm.





En el triángulo $\triangle ABC$ se tiene:

$x^2 = \left(90\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$x^2 = 8100 + \frac{x^2}{4}$

$x^2 - \frac{x^2}{4} = 8100$

$\frac{3}{4}x^2 = 8100$, así $x = \sqrt{10800} = 60\sqrt{3}$, donde el área de la base es:

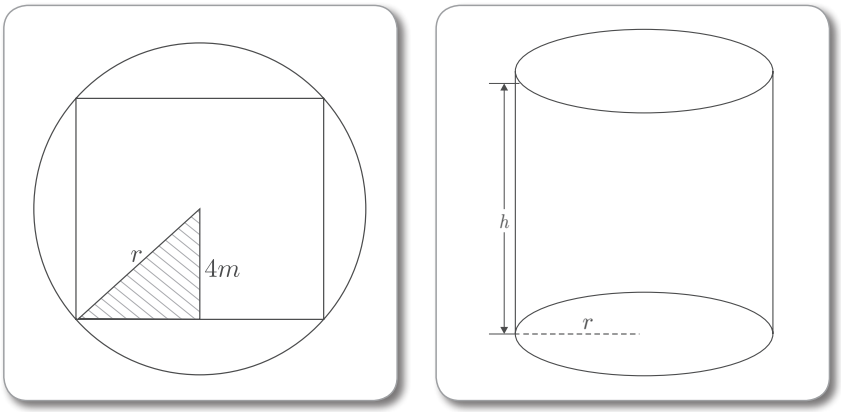
$\triangle\ ABC = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{(60\sqrt{3})(90)}{2} = 2700\sqrt{3}$ y el área de una cara lateral es:

$\triangle\ CBV = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{(60\sqrt{3})(180)}{2} = 5400\sqrt{3}$

Así el área total de la pirámide es: $\mathbb{A}_T = \mathbb{A}_L + B$

$$\mathbb{A}_T = 3\left(5400\sqrt{3}\right) + 2700\sqrt{3} = 18900\sqrt{3} = 32{,}735.76 cm^2.$$

4. Calcular el área total de un cilindro de 20 m de altura, si la apotema del cuadrado inscrito en la base del cilindro es de 4 m.



El radio de la base del cilindro es:

$$r^2 = 4^2 + 4^2$$

$$r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Así el área total del cilindro es:

$$\mathbb{A} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$\mathbb{A} = 2\pi r(r + h)$$

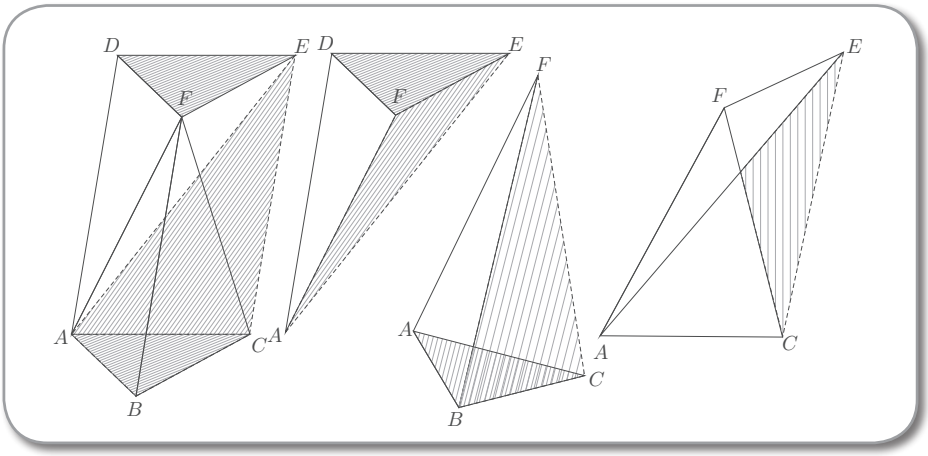
$$\mathbb{A} = 2\pi\left(4\sqrt{2}\right)\left(4\sqrt{2} + 20\right) = (35{,}543)(25{,}6568) = 911{,}919\ m^2$$

Ejercicio 7.10

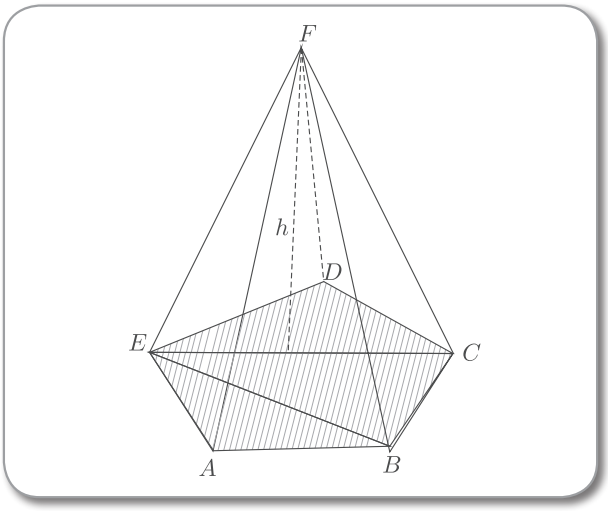
1. Calcular la apotema de una pirámide regular que tiene por apotema de la base 18 cm y su altura mide 24 cm.
2. Calcular la arista lateral de un pirámide, cuya altura de la pirámide es 28 cm y la recta que une el pie de la altura con el extremo de la arista es de 21 cm.
3. Calcular el lado de la base de una pirámide, cuya arista lateral mide 45 cm y la apotema de la pirámide es 36 cm.
4. Calcular la altura de una pirámide, cuya apotema es de 60 cm y la apotema de la base es de 36 cm.
5. Calcular el área total de una pirámide triangular regular, si la apotema de la pirámide mide 18 cm y la altura de la base mide 9 cm.
6. Calcular el área de un octaedro regular si su diagonal mide 24 cm.
7. Calcular la diagonal de un octaedro regular, si tiene un área de 31,176 cm^2.
8. Calcular el área de una cara del tetraedro regular, si la arista mide 6 m.
9. Calcular el área total de un octaedro regular, si la arista mide 16 m.
10. Calcular el área total de un icosaedro regular, si la arista mide 32 m.

Volumen de la pirámide

Sea el prisma triangular $ABCDEF$, trazando los planos AFC y, AFE el prisma queda formado por los tetraedros $ADFE$, $FABC$ y $FACE$; además el tetraedro $ADFE$ es congruente con el tetraedro $FABC$, porque sus alturas y bases son iguales.



Comparando los tetraedros $ADFE$ y $FACE$, y tomando a F como el vértice se tiene; $ADFE \cong FACE$; porque tienen como bases los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle AEC$, los cuales son iguales por ser mitades del paralelogramo $ACDE$ y de igual altura; que es la distancia de F al plano $ACDE$. Así los tres tetraedros son equivalentes, es decir; el volumen de una *pirámide triangular* es un tercio $\left(\frac{1}{3}\right)$ del volumen del prisma.



Luego, en la figura anterior, se tiene una pirámide $FABCDE$ en la cual se traza por la arista FE los planos EFB y EFC, formando tres pirámides triangulares de altura igual a h; así el volumen total de la pirámide $FABCDE$ es:

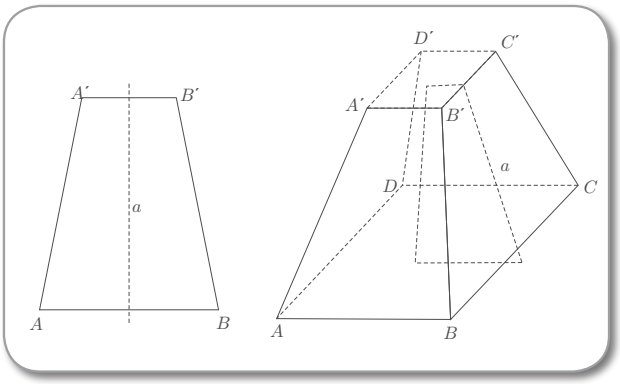
$$V_T = \tfrac{1}{3}ABE\cdot h + \tfrac{1}{3}BEC\cdot h + \tfrac{1}{3}ECD\cdot h$$
$$= \tfrac{1}{3}h\cdot\left(ABE + BEC + ECD\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\mathbb{B}\cdot h, \text{ donde } \mathbb{B} = ABE + BEC + ECD \text{ es el área de la base.}$$

Área del tronco de pirámide regular

Área lateral

En el tronco de pirámide regular AA', el área lateral es:

$$\mathbb{A}_L = \frac{\left(\overline{AB}+\overline{A'B'}\right)}{2}\cdot a + \frac{\left(\overline{BC}+\overline{B'C'}\right)}{2}\cdot a + \frac{\left(\overline{DC}+\overline{D'C'}\right)}{2}\cdot a + \frac{\left(\overline{AD}+\overline{A'D'}\right)}{2}\cdot a$$
$$\mathbb{A}_L = \tfrac{1}{2}a\left(\overline{AB} + \overline{A'B'} + \overline{BC} + \overline{B'C'} + \overline{DC} + \overline{D'C'} + \overline{AD} + \overline{A'D'}\right)$$
$$\mathbb{A}_L = \tfrac{1}{2}a\left[\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{AD}\right) + \left(\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{D'C'} + \overline{A'D'}\right)\right]$$
$$\mathbb{A}_L = \tfrac{1}{2}a\left[P + P'\right]$$



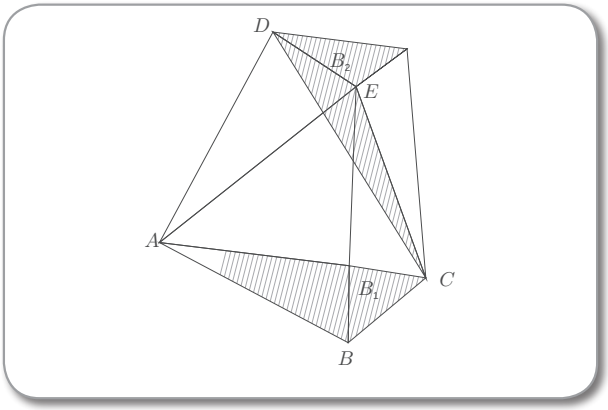
Donde P y P', son perímetros de las bases del tronco de pirámide B_1 y B_2 son las áreas de las bases.

Por lo tanto, el área total del tronco de pirámide es:

$$\mathbb{A}_T = \left(\tfrac{P+P'}{2}\right)\cdot a + \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2$$

Volumen del tronco de pirámide regular

Un tronco de pirámide triangular de bases paralelas es equivalente a la suma de tres pirámides que tienen la misma altura del tronco y cuyas bases respectivas son las dos bases del tronco y la media geométrica entre ellas.



Sea el tronco de pirámide triangular $ABCDEF$, con bases paralelas $\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{B}_2$ y de altura h. Trazando los planos CDE y ACE el tronco queda formado por las siguientes tres pirámides triangulares:

$ADCE$, $EABC$ y $CDEF$, donde el volumen está dado por:

$$V = \tfrac{1}{3}\mathbb{B}_1 \cdot h + \tfrac{1}{3}\mathbb{B}_2 \cdot h + \tfrac{1}{3} \cdot h\sqrt{\mathbb{B}_1 \cdot \mathbb{B}_2}\,]$$

$$V = \tfrac{h}{3}\left[\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2 + \sqrt{\mathbb{B}_1 \cdot \mathbb{B}_2}\,\right]$$

Ejercicio 7.11

1. Calcule el volumen de una pirámide que tiene 16 cm de altura y una base cuadrada cuyo lado es de 8,5 cm.
2. Calcular el área total de un tronco de pirámide cuadrangular si las apotemas de sus bases miden 36 cm y 18 cm, y la altura del tronco mide 24 cm.
3. Cuál es el área lateral de un tronco de pirámide que resulta de una pirámide hexagonal regular de altura 12 cm y el lado de la base mide 6 cm. Si se cortan todas las aristas por un plano paralelo a la base a 4 cm del vértice.

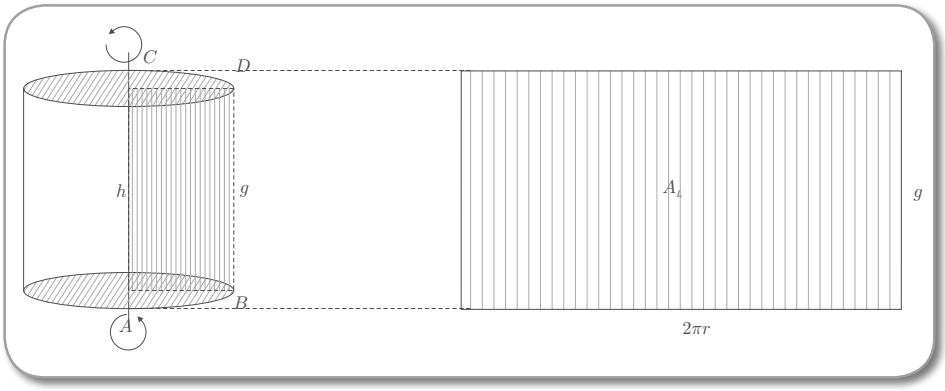
4. Calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular si los lados de las bases mide 8 cm y 16 cm respectivamente, y la apotema del tronco es de 24 cm.
5. Calcular la altura de un tronco de pirámide cuadrangular regular si sus bases tienen de lado 18 cm y 12 cm respectivamente, y tiene un volumen de 1 dm^3.

Superficie cilíndrica

Superficie cilíndrica es la generada por una recta que gira paralela a sí misma y que intersecta a una curva plana dada. La recta que gira se llama *generatriz* y la curva fija se llama *directriz*.

Cilindro circular recto

Cilindro circular recto es un sólido geométrico limitado por una superficie cilíndrica y dos planos paralelos que intersectan a todas las generatrices. Estos dos planos paralelos y congruentes son las bases del cilindro. La superficie cilíndrica limitada es la superficie lateral del cilindro, la altura del cilindro es la distancia perpendicular entre las bases. El cilindro circular puede ser recto u oblicuo, depende de la linea generatriz, si esta es perpendicular u oblicua a las bases.



También puede considerarse el cilindro como generado por una revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

$h = \overline{AC}$; eje o altura del cilindro.

$g = \overline{BD}$; generatriz del cilindro.

$\overline{AB}$; y $\overline{CD}$, radios de las bases.

Área lateral

$\mathbb{A}_L = b{\cdot}h{\cdot}$

$\mathbb{A}_L = 2\pi r{\cdot}h$

$\mathbb{A}_L = 2\pi r{\cdot}g$, ya que, el cilindro es recto se tiene $h = g$.

Área total

$\mathbb{A}_T = \mathbb{A}_L + 2\mathbb{B}$

$\mathbb{A}_T = 2\pi r{\cdot}g + 2\pi r^2$, así;

$\mathbb{A}_T = 2\pi r{\cdot}(g + r)$.

Volumen del cilindro

Se puede definir como el límite del volumen de un prisma inscrito de base regular cuyo número de lados crece indefinidamente, así el volumen del prisma es el área de la base por la altura, por lo tanto el volumen del cilindro es:

$$V_{cilindro} = \mathbb{B}{\cdot}h{=}\pi r^2 h$$

Ejercicio 7.12

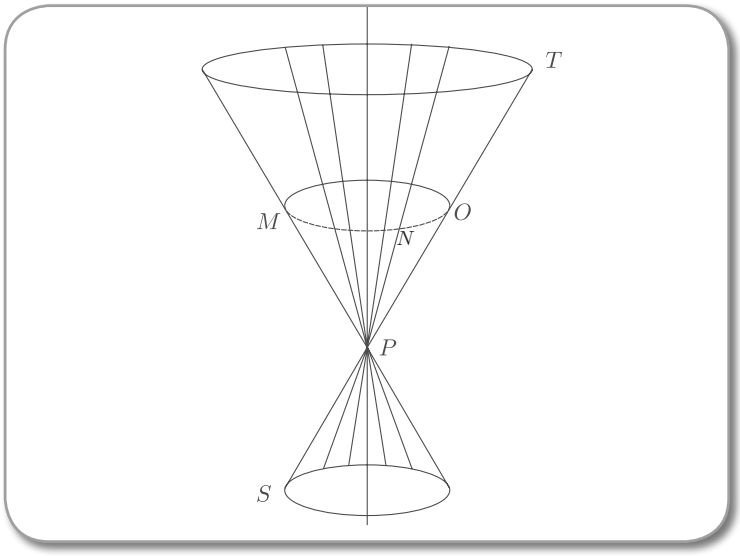
1. Calcular el área total de un cilindro de radio 8 m, si su altura es tres veces la circunferencia de la base.
2. Calcular el área lateral de un cilindro que tiene una altura de 30 m, si la apotema de un triángulo equilátero inscrito en la base del cilindro es de 6 m.
3. Calcular el área total de un cilindro de 40 m de altura, si la apotema del cuadrado inscrito en la base del cilindro es de 8 m.
4. Calcular el área total de un cilindro inscrito en un cubo de 12 m de arista.
5. Cuántos metros cúbicos de un líquido contiene un recipiente

cilíndrico de 6 m de altura y 2,5 m de diámetro, si su contenido solo llega a los $\frac{2}{5}$ de su capacidad.

6. Calcular el radio de la base de un cilindro 1,8 m de altura, que tiene una capacidad de 180 litros.
7. Calcular el área total de un cilindro cuya generatriz es igual al lado del cuadrado inscrito en la base del cilindro y mide 25 m.
8. Calcule el volumen de un cilindro que tiene una altura de 2 yardas y una base cuyo radio es de 5 pies.
9. ¿Cuántos centímetros cuadrados de tela se necesitan para una lata cilíndrica de 10 m de altura y base circular de 6 m de diámetro?

Superficie cónica

Es la generada por una recta que gira alrededor de un punto fijo llamado *vértice* y que intersecta a un plano dado en una curva. La superficie cónica se compone de dos hojas o mantos opuestos por el vértice.



ST; es recta generatriz
P; es el vértice
O; punto que pertenece a la recta generatriz y sigue a la curva que es la directriz.

Cono circular

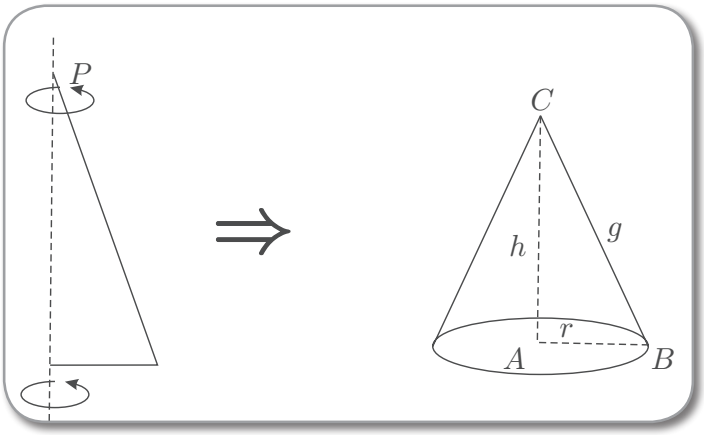
Es un sólido geométrico limitado por una de sus hojas o mantos de una superficie cónica y por un plano que intersecta a todas las generatrices; este plano es la base del cono. También se puede generar un cono, como generado por una revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

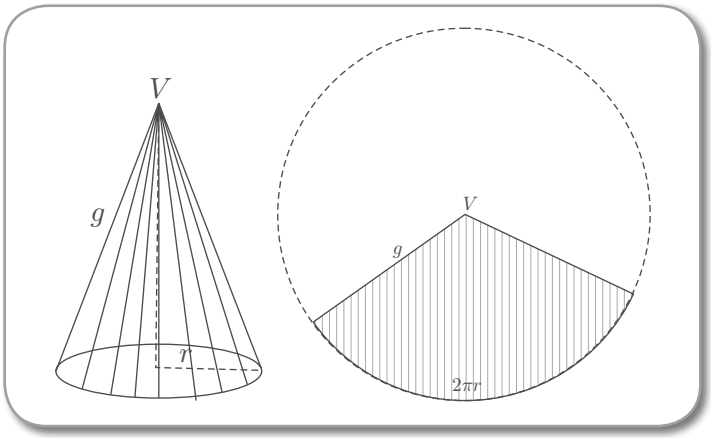
$h = \overline{AC}$; eje o altura del cono.

$g = \overline{BC}$; generatriz del cono.

$r = \overline{AB}$; radio de la base del cono.

El cono también se puede considerar como el límite de una pirámide regular inscrita, donde el número de caras laterales crece indefinidamente.





Área lateral del cono

Como el área de un sector circular es igual al semiproducto de su arco por la medida del radio, tenemos:

$$\mathbb{A}_L = \frac{S}{2}\cdot g$$
$$\mathbb{A}_L = \frac{2\pi r}{2}\cdot g$$
$$\mathbb{A}_L = \pi r\cdot g\ .$$

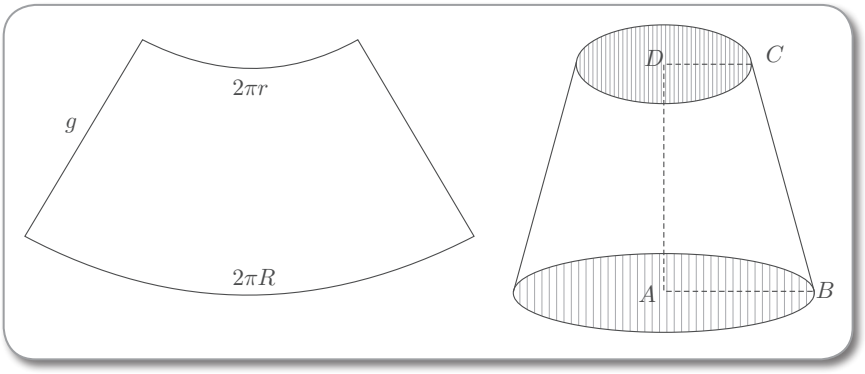
Así el área total es:

$$\mathbb{A}_T = \mathbb{A}_L + \mathbb{B}$$
$$\mathbb{A}_T = \pi r\cdot g + \pi r^2$$
$$\mathbb{A}_T = \pi r\cdot\left(g + r\right)$$

Área del tronco de cono

Área lateral

El tronco de cono de revolución es el generado por la rotación completa de un trapecio rectángulo que gira alrededor del lado perpendicular de las bases. Este sólido es la parte comprendida entre la base y una sección paralela a ella.



De la figura anterior se tiene:

$\overline{AD} = h$; es el eje o altura del trapecio.

$\overline{BC} = g$; es la genetratriz del tronco.

$\overline{AB}$ y $\overline{DC}$; son los radios de las bases del tronco, donde $\overline{AB} = R$ y $\overline{DC} = r$.

Así el área lateral es:

$$\mathbb{A}_L = \left(\frac{2\pi R + 2\pi r}{2}\right) \cdot g \ .$$

$$\mathbb{A}_L = 2\pi\left(\frac{R+r}{2}\right) \cdot g$$

$$\mathbb{A}_L = \pi(R+r) \cdot g$$

$$\mathbb{A}_L = \pi g(R+r)$$

Área total

$\mathbb{A}_T = \mathbb{A}_L + \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2$; donde $\mathbb{B}_1$ es el área de la base mayor y $\mathbb{B}_2$ de la base menor.

$$\mathbb{A}_T = \pi g(R+r) + B_1 + B_2$$

$$\mathbb{A}_T = \pi g(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$$

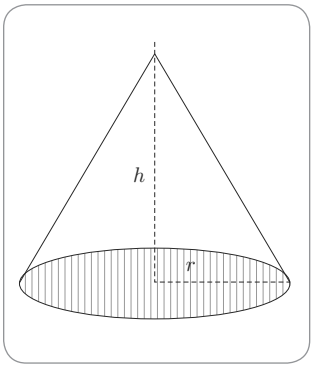
$$\mathbb{A}_T = \pi[R(g+r) + r(g+r)\,]$$

Volumen del cono

$$V = \frac{1}{3} B.h$$

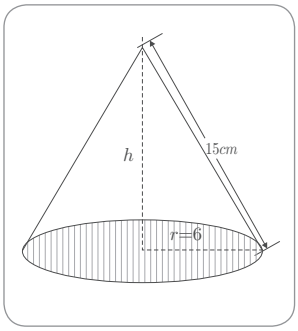
$$V = \frac{1}{3}(\pi r^2)h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Ejemplos

1. Calcular el volumen de un cono si el radio de la base mide 6 cm y la generatriz 15 cm.



$h^2 = g^2 - r^2$

$h^2 = 15^2 - 6^2$

$h^2 = 189$, es decir; $h = 3\sqrt{21}$

Así el volumen del cono es:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi 6^2\left(3\sqrt{21}\right) = 36\pi\sqrt{21} = 518{,}27\ cm^3$$

Volumen del cono truncado

El volumen de un tronco de cono, de bases paralelas, es igual a la suma de los volúmenes de tres conos de igual altura que el tronco, donde las bases respectivas, son las bases del tronco y la media geométrica entre ellas, es decir:

$$V = \tfrac{1}{3}h\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}\right)$$

$$V = \tfrac{1}{3}h\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr\right)$$

$$V = \tfrac{\pi}{3}h\left(R^2 + r^2 + R\cdot r\right)$$

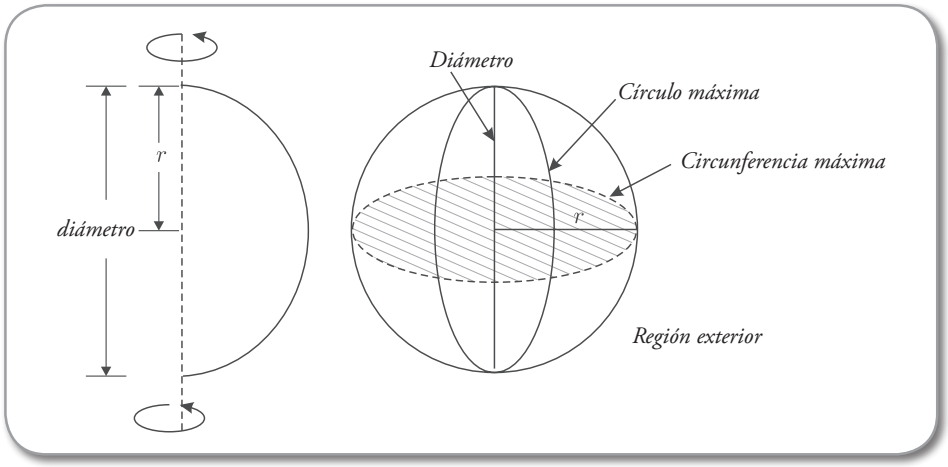
Ejercicio 7.13

1. Calcular el área total de un cono si el radio de la base mide 36 m y su altura 48 m.
2. Calcular el volumen de un cono si el radio de la base mide 45 cm, y la generatriz 75 cm.
3. Calcular el área lateral del cono, si tiene un triángulo equilátero inscrito en su base de lado 12 m y la generatriz del cono es de 36 m.

4. Se quiere construir un embudo de 12 cm de diámetro y 18 cm de generatriz. ¿Qué costo tendrá el material para construirlo si se paga a 0,80 dólares el dm^2?
5. Calcular la altura de un embudo de tres litros de capacidad que tiene un diámetro de 36 cm.
6. Calcular el área lateral de un tronco de cono, cuyos radios de las bases miden 24 m y 12 m respectivamente, y la altura es de 16 m.
7. Calcule el volumen de un cono que tiene una altura de 9 pies y una base cuyo radio es de 4 pulgadas.

Superficie esférica

Es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que están a la misma distancia o que equidistan de un punto fijo llamado centro. También se puede generar una superficie esférica haciendo girar una semicircuferencia alrededor de su diámetro.



En la figura anterior se tiene:

Diámetro: es toda recta que pasa por el centro y une dos puntos de la superficie esférica

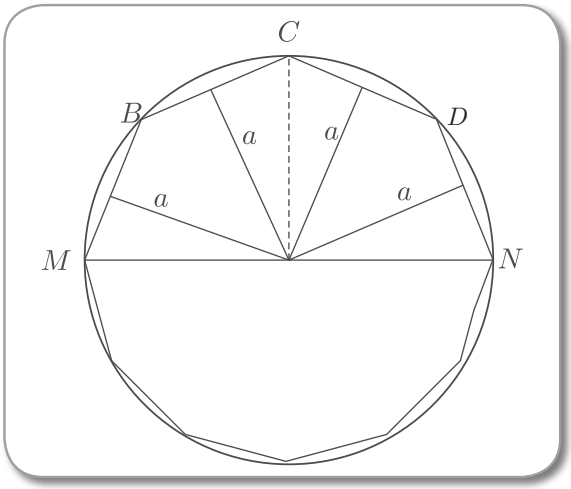
Circunferencia máxima: es la intersección de un plano que pasa por el centro de la esfera y la superficie esférica.

Circulo máximo: es la intersección de la esfera y un plano que pasa por el centro de la esfera.

La superficie esférica divide al espacio en dos regiones, una exterior y una interior a la superficie. Así la esfera es la región del espacio constituida por una superficie esférica y todos sus puntos interiores.

Revolución de una línea poligonal regular

El área generada por la revolución de una línea poligonal regular alrededor de uno de sus diámetros, que no la atraviese, es igual al producto de la proyección de la línea sobre el diámetro por la circunferencia que tiene de radio la apotema a.



Sea la línea poligonal $MBCDN$, entonces se tiene que el área generada por la revolución de una línea polígonal es:

$$\mathbb{A} = 2\pi a \cdot MB + 2\pi a \cdot BC + 2\pi a \cdot CD + 2\pi a \cdot DN$$

$MN = \grave{M}B + BC + CD + DN$; donde

$$\mathbb{A} = 2\pi a \cdot MN$$

$\mathbb{A} = 2\pi a \cdot MN$, donde $MN = d$, que es el diámetro.

Área de la esfera

Si el número de lados de la línea poligonal regular, aumenta indefinidamente, está línea tenderá a la semicircunferencia, la apotema al radio y la superficie generada por la línea poligonal a la superficie esférica, respectivamente.

Así el área de la esfera es:

$\mathbb{A} = 2\pi a \cdot MN$

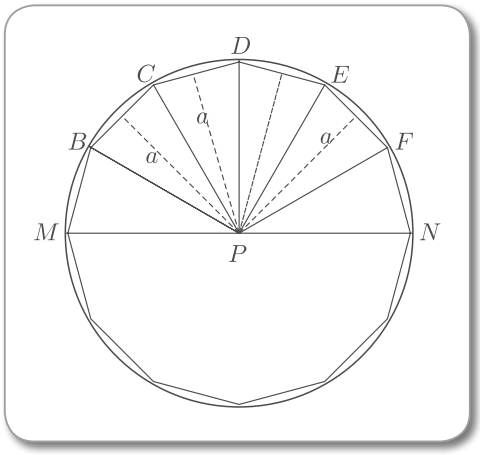
$\mathbb{A} = 2\pi r \cdot d$

$\mathbb{A} = 2\pi r \cdot 2r$

$\mathbb{A} = 4\pi r^2$

Revolución de un sector poligonal

Sea el *sector* poligonal $PBCDEF$, que gira alrededor del diámetro MN, entonces el volumen total es igual a la suma de los volúmenes generados por los siguientes triángulos; $\triangle FPE$, $\triangle EPD$, $\triangle DPC$ y $\triangle CPB$; donde la apotema del sector poligonal es a y las respectivas áreas de las superficies de los triángulos son: A_1, A_2, A_3 y A_4



Así el volumen generado por el *sector* poligonal es:

$V = \frac{1}{3}A_1 \cdot a + \frac{1}{3}A_2 \cdot a + \frac{1}{3}A_3 \cdot a + \frac{1}{3}A_4 \cdot a$

$V = \frac{1}{3}a \cdot \left(A_1 + A_2 + A_3 + A_4\right)$; con $\mathbb{A} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$V = \frac{1}{3}a \cdot \mathbb{A}$

$V = \frac{1}{3}\mathbb{A} \cdot a$

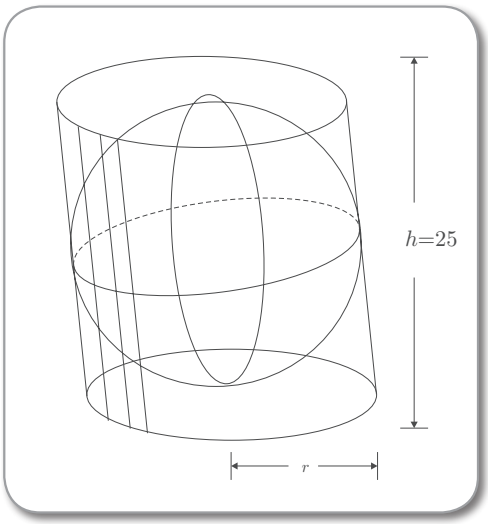
Volumen de la esfera

Si el número de lados del sector poligonal aumenta indefinidamente, similarmente este poligonal tenderá al semicírculo, la apotema al radio y la superficie a la superficie esférica respectivamente; así, el volumen de la esfera es:

$$V = \tfrac{1}{3}\mathbb{A}\cdot a$$
$$V = \tfrac{1}{3}\,{}_4\pi r^2\cdot r$$
$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

También experimentalmente se ha comprobado que se toma un recipiente cilíndrico de radio r y altura $h= 2r$, lleno de líquido. Si se introduce en el cilindro una esfera de radio r, se puede comprobar que el líquido desalojado por la esfera es las dos terceras partes del líquido que contiene el cilindro, es decir;

$$V = \tfrac{2}{3}\mathrm{V}_{cilindro}$$
$$V = \tfrac{2}{3}\pi r^2\cdot h$$
$$V = \tfrac{2}{3}\pi r^2\cdot 2r$$
$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$
$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$



Ejemplo

1. Calcular el área de una esfera que tiene un volumen de 620,97 m^3.

Como el volumen de una esfera es $V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$, entonces se tiene:

$$620{,}97 = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

$\frac{1862,91}{4\pi} = r^3$, es decir; $r^3 = 148,2456$ lo que implica que: $r = 5,29$

Así el área es:

$$\mathbb{A} = 4\pi r^2$$

$$\mathbb{A} = 4\pi(5,29)^2 = 351,65\ m^2$$

Ejercicio 7.14

1. Calcular el volumen de una esfera inscrita en un cubo de 6 m de arista.
2. Calcular el radio de la base de un cono de 12 pies de altura si su volumen es igual al de una esfera de 8 pies de radio.
3. Calcular el volumen de una esfera circunscrita a un octaedro de 12 pies de arista.
4. Calcular el volumen de una esfera que tiene un área de 352,16 $m^{2.}$
5. Calcular el radio de una esfera que tiene un volumen que es el doble de otra esfera de 8 m de diámetro.
6. Calcular el área de una esfera de radio 10 m.
7. Calcule el volumen de una esfera en pies, si tiene un radio de 38 pulgadas.

Recapitulación

1. Calcule el volumen de un cubo, en pies cúbicos, si una arista es de:

   a) 8 pulgadas.

   b) 5 pies.

   c) 4 yardas.
2. Calcule el volumen de un sólido rectangular de longitud 12 pulgadas, de ancho 8 pulgadas y de altura 2 pies.
3. Calcule el volumen de una pirámide que tiene 16 cm de altura y una base cuadrada cuyo lado es de 8,5 cm.

4. Calcule el volumen de una esfera en pies, si tiene un radio de 38 pulgadas.
5. Calcule el volumen de un cilindro que tiene una altura de 2 yardas y una base cuyo radio es de 5 pies.
6. Calcule el volumen de un cono que tiene una altura de 9 pies y una base cuyo radio es de 4 pulgadas.
7. Calcule el área de la superficie total de un cubo cuya arista es π pies.
8. Calcule el área de la superficie total de un sólido rectangular con dimensiones de 11, 15 y 8,5 pies.
9. Encuentre el volumen de:

   a) Un pie cúbico en pulgadas cúbicas.

   b) Una yarda cúbica en pies cúbicos.

   c) Un litro (decímetro cúbico) en centímetros cúbicos.
10. Calcule la longitud del lado de un pentágono regular, si su perímetro es de 17,5 cm.
11. Calcule la apotema a de un pentágono regular, si el radio del círculo inscrito es de $\sqrt{3}\ \mathrm{m}$.
12. Calcule las medidas del ángulo central, el ángulo externo y el ángulo interno de un octágono regular.
13. Calcule las medidas del ángulo externo y el número de lados de un polígono regular cuyo ángulo interno mide 162º.
14. Calcule el área de un hexágono regular si la longitud de su apotema es de $10\sqrt{3}$ cm.
15. Calcule el área de un pentágono regular si la longitud de su apotema es de 10 cm.
16. Calcule el área de un rectángulo, si su base tiene longitud 7,5 cm y el perímetro es de 25 cm.
17. Calcule el área de un rectángulo, si tiene una altura de 5 m y su diagonal mide 13 cm.

18. Calcule las longitudes de la base y de la altura de rectángulo, si su área es 35 m^2 y su perímetro es de 24 m.
19. Calcule el área de un cuadrado cuyo perímetro es de 45 cm.
20. Calcule el área de un cuadrado si el radio del círculo circunscrito es $\sqrt{2}\,\mathrm{m}$.
21. Calcule el número de pulgadas cuadradas en un pie cuadrado.
22. Calcular la apotema de una pirámide regular, que tiene por apotema de la base 18 cm y su altura mide 24 cm.
23. Calcular la arista lateral de un pirámide, cuya altura de la pirámide es 28 cm y la recta que une el pie de la altura con el extremo de la arista es de 21 cm.
24. Calcular el lado de la base de una pirámide, cuya arista lateral mide 45 cm y la apotema de la pirámide es de 36 cm.
25. Calcular la altura de una pirámide, cuya apotema es de 60 cm y la apotema de la base es de 36 cm.
26. Calcular el área total de una pirámide triángular regular, si la apotema de la pirámide mide 18 cm y la altura de la base mide 9 cm.
27. Calcular el área de un octaedro regular si su diagonal mide 24 cm.
28. Calcular la diagonal de un octaedro regular si tiene un área de 31,176 cm^2.
29. Calcular el área total de un tronco de pirámide cuadrangular si las apotemas de sus bases miden 36 cm y 18 cm, y la altura del tronco mide 24 cm.
30. Cuál es el área lateral de un tronco de pirámide que resulta de una pirámide hexagonal regular de altura 12 cm y el lado de la base mide 6 cm. Si se cortan todas las aristas por un plano paralelo a la base a 4 cm del vértice.
31. Calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular si los lados de las bases mide 8 cm y 16 cm respectivamente, y la apotema del tronco es de 24 cm.
32. Calcular la altura de un tronco de pirámide cuadrangular regular si sus bases tienen de lado 18 cm y 12 cm, respectivamente, y tiene un volumen de 1 dm^3.

33. Calcular el área total de un cilindro de radio 8 m, si su altura es tres veces la circunferencia de la base.
34. Calcular el área lateral de un cilindro que tiene una altura de 30 m, si la apotema de un triángulo equilátero inscrito en la base del cilindro es de 6 m.
35. Calcular el área total de un cilindro de 40 m de altura, si la apotema del cuadrado inscrito en la base del cilindro es de 8 m.
36. Calcular el área total de un cilindro inscrito en un cubo de 12 m de arista.
37. ¿Cuántos metros cúbicos de un líquido contiene un recipiente cilíndrico de 6 m de altura y 2,5 m de diámetro, si su contenido solo llega a los $\frac{2}{5}$ de su capacidad?
38. Calcular el radio de la base de un cilindro 1,8 m de altura, que tiene una capacidad de 180 litros.
39. Calcular el área total de un cilindro cuya generatriz es igual al lado del cuadrado inscrito en la base del cilindro y mide 25 m.
40. Calcular el área total de un cono si el radio de la base mide 36 m y su altura 48 m.
41. Calcular el volumen de un cono si el radio de la base mide 45 cm, y la generatriz 75 cm.
42. Calcular el área lateral del cono, si tiene un triángulo equilátero inscrito en su base de lado 12 m y la generatriz del cono es de 36 m.
43. Se quiere construir un embudo de 12 cm de diámetro y 18 cm de generatriz. ¿Qué costo tendrá el material para construirlo si se paga a 0,80 dólares el dm^2.
44. Calcular la altura de un embudo de tres litros de capacidad, que tiene un diámetro de 36 cm.
45. Calcular el área lateral de un tronco de cono, cuyos radios de las bases miden 24 m y 12 m, respectivamente, y la altura es de 16 m.
46. Calcular el área de un triángulo equilátero que tiene por lado $\frac{5}{8}$ de metro.
47. Calcular el área de un triángulo equilátero que tiene de altura 45,5 m.

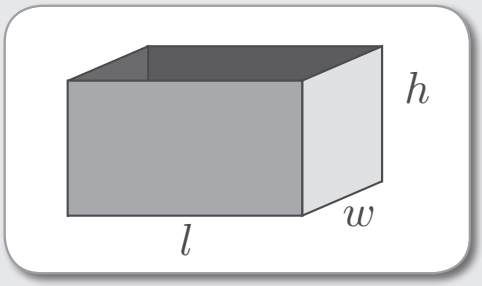
48. Calcular el área de un triángulo equilátero, si su perímetro es de $\frac{35}{5}$dm.
49. Calcular el área de un triángulo equilátero inscrito en un círculo, si el círculo tiene un cuadrado inscrito de lado 1,2 cm.
50. Calcular el radio de un círculo, si el área del cuadrado inscrito en el círculo es de 36 cm^2.
51. Calcular el área de una corona circular comprendida entre los círculos inscrito y circunscrito, a un cuadrado de 22 m de lado.
52. Calcular las dimensiones a y b,de un rectángulo que están en la relación de 3 a 4, si la diagonal del rectángulo mide 40 m.
53. Calcular el radio de un círculo, donde dos cuerdas se cortan en él y el producto de los segmentos de cada cuerda es de 867,75 cm y además, la distancia del punto de intersección al centro del círculo es de 12,5 cm.
54. Calcular el área de un cuadrado, si el lado y la diagonal del cuadrado suman 24,15 m.
55. ¿Cuáles son las dimensiones a y b de un campo deportivo rectangular, si la diagonal mide 200 m^2 y que vendido el metro cuadrado a 210 dólares, ha producido 3.760.050,00 dólares?
56. ¿Cuáles son las dimensiones b y a de un triángulo que están en relación 3 a 5, si el área es de 360 m^2?
57. Calcular el perímetro de un rombo si tiene un área de 180 m^2, y la diagonal menor es igual al lado.
58. Calcular las bases de un trapecio regular, si el área del trapecio es de 1600 m^2 y las bases y la altura del trapecio están en relación de 3, 5 y 7, respectivamente.
59. Calcular el lado de un cuadrado inscrito en un circulo que es concéntrico a otro circulo más grande, donde el radio del círculo grande es 4 m mayor que el radio del círculo pequeño y el área queda aumentada en 80 m^2.
60. Calcular en función del radio de la circunferencia circunscrita, el área del segmento circular comprendido entre el lado del hexágono regular inscrito y el arco subtendido por el hexágono.
61. Calcular el área de una cara del tetraedro regular, si la arista mide 6 m.

62. Calcular el área total de un octaedro regular, si la arista mide 16 m.
63. Calcular el área total de un icosaedro regular, si la arista mide 32 m.
64. Calcular la diagonal de un paralelepípedo rectángulo, en función de sus tres dimensiones.
65. Calcular la diagonal de un cubo, si su arista es 9 m.
66. Calcular la arista de un cubo si su área total es de 5 m^2.
67. Calcular el volumen de un prisma triangular, si el lado de la base mide 18 m y su altura es de 24 m.
68. ¿Qué capacidad en litros tiene un tanque que tiene forma de prisma cuadrangular regular, si la apotema de la base es de 1,5 m y su arista lateral es de 3,5 m?
69. Calcular el volumen de un cubo, si su diagonal mide 15 m.
70. Calcular el volumen de un cubo que tiene un área total de 270 dm^3.
71. Calcular el área total de un cubo que contiene 512 litros de capacidad.
72. Calcular el volumen de una esfera inscrita en un cubo de 6 m de arista.
73. Calcular el radio de la base de cono de 12 pies de altura, si su volumen es igual al de una esfera de 8 pies de radio.
74. Calcular el volumen de una esfera circunscrita a un octaedro de 12 pies de arista.
75. Calcular el volumen de una esfera que tiene un área de 352,16 m^2.
76. Calcular el radio de una esfera que tiene un volumen que es el doble de otra esfera de 8 m de diámetro.
77. ¿Cuántos centímetros cuadrados de tela se necesitan para una lata cilíndrica de 10 m de altura y base circular de 6 m de diámetro?
78. Calcular el área de una esfera de radio 10 m.

Resumen del capítulo 7

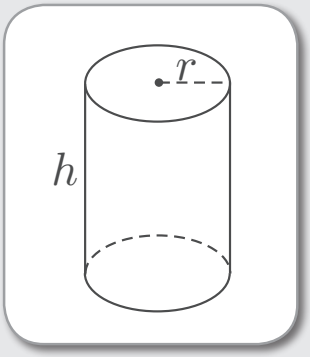
Paralelepípedo

$V = lwh$



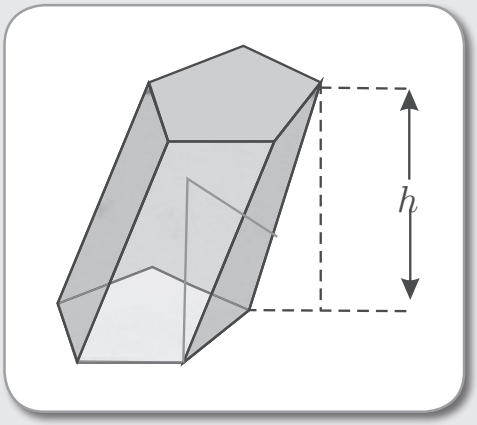
Cilindro circular recto

Volumen $= \pi r^2 h$
Área de la superficie lateral $= 2\pi rh$



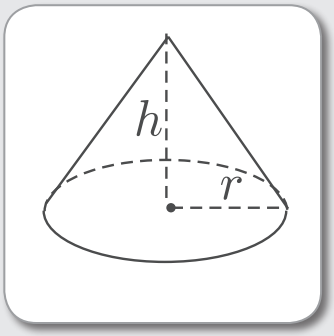
Prisma

$V = BH$ donde B es el área de la base



Cono circular recto

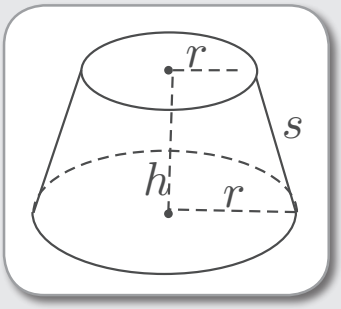
Volumen $= \frac{\pi r^2 h}{3}$
Área de la superficie lateral $= \sqrt{\pi^2 + h^2}$



Tronco de un cono circular recto

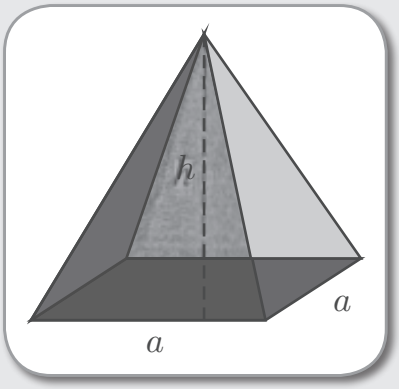
Volumen $= \frac{\pi(r^2+rR+R^2)h}{3}$

Área de la superficie lateral $= \pi s(R+r)$



Pirámide

Volumen $= \frac{1}{3}ha^2$



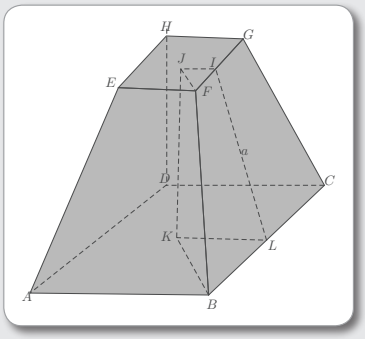
Tronco de pirámide

Área lateral $= \frac{1}{2}a(P+P')$

Área lateral $= \left(\frac{P+P'}{2}\right)a+B_1+B_2$

P: perímetro

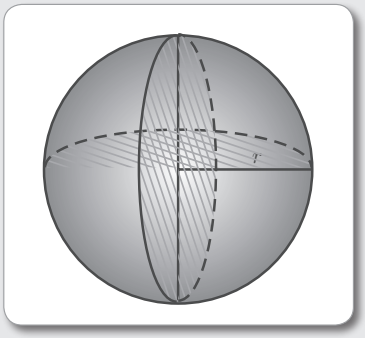
B: área de la base



Esfera

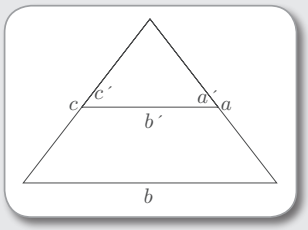
Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Área de la superficie $= 4\pi r^2$



Triángulos semejantes

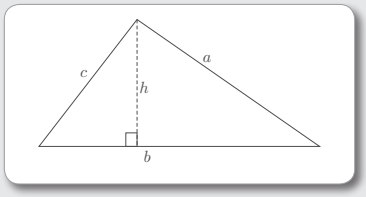
$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$



Triángulo

$A=\frac{1}{2}bh$

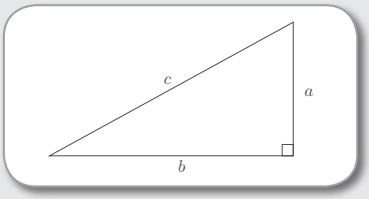
$P=a+b+c$



Triángulo rectángulo

Teorema de Pitágoras

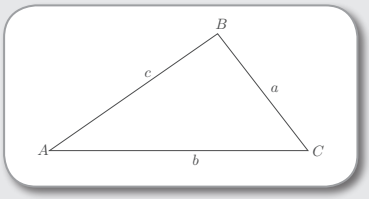
$c^2=a^2+b^2$



Fórmula de Herón

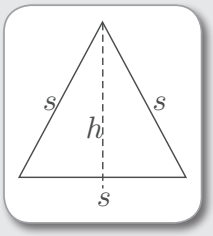
$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

donde $s=\frac{a+b+c}{2}$



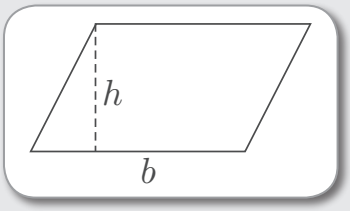
Triángulo equilátero

$h=\frac{s}{2}\sqrt{3}$



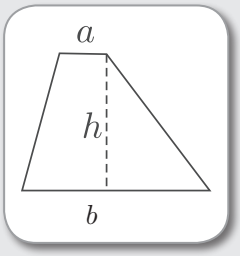
Paralelogramo

Área: $A=bh$



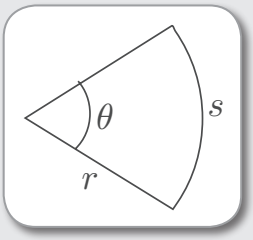
Trapecio

Área: $A = \frac{h}{2}(a+b)$



Sector circular

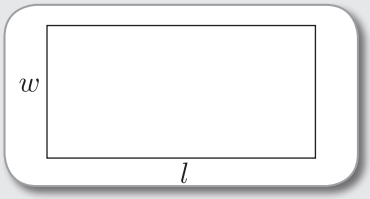
Área: $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ $\quad s=r\theta$



Rectángulo

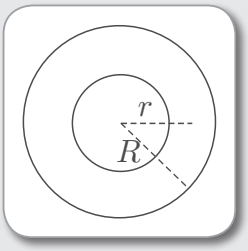
$A= lw$

$P= 2l+2w$



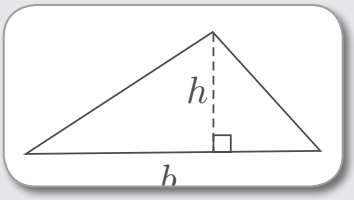
Corona

$A = \pi(R^2 - r^2)$



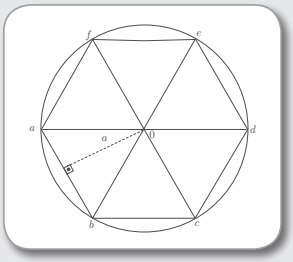
Triángulo

Área: $A = \frac{1}{2}bh$



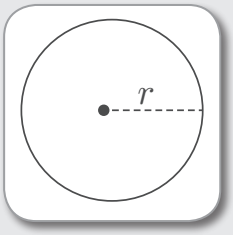
Triángulo rectángulo

Área: $A = \frac{P \cdot a}{2}$



Círculo

$A= \pi r^2$ $\quad C= 2\pi r$



Apéndice A

Fracciones parciales

Sabemos cómo combinar dos o más expresiones racionales en una sola, mediante adición o sustracción.

Ejemplo

$$\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{7x-1}{x^2-x-6}$$

Dada una expresión racional, ¿cómo descomponerla en la suma de dos o más expresiones racionales?

Ejemplo

$\frac{7x-1}{x^2-x-6}$, cómo expresarla en la suma: $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}$?

Además de querer responder a la pregunta, algunas veces es necesario expresar una sola expresión racional como la suma de dos o más fracciones más simples, denominadas **fracciones parciales**. Por ejemplo para evaluar algunas integrales, para hallar la transformada inversa de **Laplace** de algunas funciones.

Veamos, cómo descomponer una expresión racional en fracciones parciales. Consideremos la fracción racional $S(x)$ definida por:

$S(x) = \frac{P_n(x)}{T_m(x)}$. Donde $P_n(x)$ y $T_m(x)$ son polinomios de grado n y m, respectivamente.

Si $n<m$, decimos que $S(x)$ es una fracción **propia**.

Si $n \geq m$, decimos que $S(x)$ es una fracción **impropia**.

Al desarrollar la división de $P_n(x)$ tenemos dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que: $P_n(x) = Q(x) \cdot T_m(x) + R(x)$, donde el grado de $R(x)$ es menor que m multiplicando cada miembro de la igualdad por $\frac{1}{T_m(x)}$ tenemos que: $S(x) = \frac{P_n(x)}{T_m(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{T_m(x)}$; donde $\frac{R(x)}{T_m(x)}$ es una fracción propia.

Como vemos, cualquier fracción impropia, la podemos descomponer como la suma de un polinomio y una fracción propia; **lo que permite reducir el problema de hallar fracciones parciales a las fracciones propias**.

Ejemplo

Descomponer: $\frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 21}{x^2 - 4}$

Al efectuar la división, el cociente, $Q(x)$, es $x^2 - 6$ y el residuo, $R(x)$ es $3x - 3$, por lo tanto:

$$\frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 21}{x^2 - 4} = (x^2 - 6) + \frac{3x - 3}{x^2 - 4}$$

Descomposición en fracciones parciales

Ejemplo

Si sabemos que $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3} = \frac{7x - 1}{x^2 - x - 6}$

Hallemos un procedimiento que permita descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{7x - 1}{x^2 - x - 6}$$

Como la fracción es **propia** veamos como se efectúa la suma.

Al efectuar $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}$ hallamos el M.C.M. entre $x+2$ y $x-3$

$$\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{3(x-3)+4(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{7x-1}{x^2-x-6}$$

Para descomponer en **fracciones parciales** $\frac{7x-1}{x^2-x-6}$

Factorizamos el denominador. $\frac{7x-1}{x^2-x-6}=\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}$

El denominador $(x+2)(x+3)$ es el M.C.M. entre los polinomios $(x+2)$ y $(x+3)$ por lo tanto, estos polinomios son los posibles denominadores en que podemos descomponer la **fracción racional**, es decir:

$$\frac{7x-1}{x^2-x-6}=\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}.$$

Como las **fracciones son propias**, A y B deben ser constantes.

Para hallar A y B efectuamos la operación;

$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$ como tenemos la igualdad:

$\frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}$ esta se cumple si
$A(x+3)+B(x+2)=7x-1.$

Si $x=3$ tenemos que $5B=0$ por lo tanto $B=4$

Si $x=-2$ tenemos que $-5A=-15$ por lo tanto $A=3$

Otra forma da hallar A y B es utilizando **coeficientes indeterminados**
Si $A(x-3)+B(x+2)=7x-1$
$Ax-3A+Bx+2B=7x-1$
$(A+B)x+(-3A+2B)=7x$, de donde se tiene que
$A+B=7$ y
$-3A+2B=-1$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que $A = 3$ y $B = 4$. El lector puede verificar que:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3} = \frac{3(x-3)+4(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{7x-1}{x^2-x-6}.$$

En general, para descomponer una **fracción propia** de la forma $P(x)/T(x)$ en dos o más fracciones parciales procedemos así:

- Factorizamos $T(x)$ en factores de primer grado y/o segundo grado irreducibles y establecemos para que el polinomio es $T(x)$ el m.c.m., estos polinomios son los denominadores de las fracciones parciales.
- Establecemos los numeradores de cada una de las **fracciones parciales**; como estas **fracciones son propias**, los numeradores serán:
  Constantes $(A_i, i = 1, 2, \ldots, n)$ si el denominador es un polinomio de primer grado.
  Polinomios de primer grado o constantes $(A_i, x + B_i, i = 1, 2, \ldots, n)$, si el polinomio del denominador es de segundo grado.
- Efectuamos la suma de las **fracciones parciales** e igualamos su numerador con el numerador de la fracción original.
- Hallamos los valores de los A_i y B_i por **coeficientes indeterminados** o asignando convenientemente valores a x.

Para facilitar el método y determinar las fracciones parciales consideremos la naturaleza de los factores de $T(x)$.

1. Si los factores de $T(x)$ **son todos de primer grado y de multiplicidad uno**, es decir,

$$T(x) = (a_1x + b_1) \times (a_2x + b_2) \ldots \times (a_nx + b_n)$$

$$\frac{P(x)}{T(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \ldots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

Donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes a determinar.

Ejemplo

Descomponer en **fracciones parciales** $\frac{x-8}{x^3-x^2-2x}$

Factorizamos el denominador

$$\frac{x-8}{x^3-x^2-2x} = \frac{x-8}{x(x-2)(x+1)}$$

$x(x-2)(x+1)$ es el m.c.m. entre x,$x-2$ y $x+1$; de esta manera se tiene que:

$$\frac{x-8}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{x-8}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)=x-8$
Asignando valores a x, tenemos que:

Si $x=0$, obtenemos $-2A=-8$ por lo tanto $A=4$

Si $x=2$, obtenemos $6B=-6$ por lo tanto $B=-1$

Si $x=-1$, obtenemos $3C=-9$ por lo tanto $C=-3$

Reemplazando estos valores de A, B y C tenemos que:

$$\frac{x-8}{x(x-2)(x+1)} = \frac{4}{x} + \frac{-1}{x-2} + \frac{-3}{x+1} = \frac{4}{x} - \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+1}$$

2. **Si los factores de $T(x)$ son de primer grado y algunos con multiplicidad mayor que uno**, es decir,

$T(x)=(ax+b)\times(ax+b)\ldots\times(ax+b)$

$$\frac{P(x)}{T(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

donde $A_1, A_2 \ldots A_n$ son constantes a determinar.

Ejemplo

Descomponer en fracciones parciales $\frac{x^4+x^2+16x-12}{x^3(x-2)^2}$

$x^3(x-2)^2$ es el m.c.m. entre x, x^2, x^3, $(x-2)$ y $(x-2)^2$, es decir

$$\frac{x^4+x^2+16x-12}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^4+x^2+16x-121}{x^3(x-2)^2}$$

$$= \frac{Ax^2(x-2)^2+Bx(x-2)^2+C(x-2)^2+Dx^3(x-2)+Ex^3}{x^3(x-2)^2}$$

$$Ax^2(x-2)^2+Bx(x-2)^2+C(x-2)^2+Dx^3(x-2)+Ex^3 = x^4+x^2+16x-12$$

Asignando valores a x, tenemos:

Si $x=0$, obtenemos $4C=-12$ por lo tanto, $C=-3$

Si $x=2$, obtenemos $8E=40$ por lo tanto, $E=5$

Reemplazando estos valores de C y E, tenemos que:

$$Ax^2(x-2)^2+Bx(x-2)^2-3C(x-2)^2+Dx^3(x-2)+5x^3 = x^4+x^2+16x-12$$

$$Ax^2(x^2-4x+4)+Bx(x^2-4x+4)-3(x^2-4x+4)+Dx^3(x-2)+5x^3 = x^4+x^2+16x-12$$

$$(A+D)x^4+(-4A+B-2D+5)x^3+(4A-4B-3)x^2+(4B+12x)-12 = x^4+x^2+16x-12$$

Aplicando el método de coeficientes indeterminados tenemos que:

$$\begin{aligned} A + D &= 1 \\ -4A + B - 2D + 5 &= 0 \\ 4A - 4B - 3 &= 1 \\ 4B + 12 &= 16 \end{aligned}$$

por lo tanto, $B = 1$

Si reemplazamos $B = 1$ en $4A-4B-3 =1$, obtenemos que $A = 2$.

Si reemplazamos $A = 2$ en $A+D =1$, obtenemos que: $D = -1$.

Resumiendo, los valores de las constantes son:

$$A = 2, \qquad B = 1, \qquad C = -3, \qquad D = -1 \quad \text{y} \quad E = 5$$

Reemplazando estos valores de A, B, C, D y E tenemos que:

$$\frac{x^4 + x^2 + 16x - 12}{x^3(x-2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$$

3. **Si $T(x)$ tiene factores de segundo grado irreducibles y de multiplicidad uno**, es decir,

$$T(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1) \times (a_2x^2 + b_2x + c_2) \ldots \times (a_nx^2 + b_nx + c_n)$$

$$\frac{P(x)}{T(x)} = \frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \ldots + \frac{A_nx+B_2}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

donde $A_1, A_2 \ldots A_n$ y $B_1, B_2 \ldots B_n$ son constantes a determinar.

Ejemplo

Descomponer en **fracciones parciales** $\frac{x^2 - x - 5}{x^3 + x^2 - 2}$

Factorizando el denominador, utilizando **división por coeficientes separados** o **coeficientes indeterminados**, obtenemos:

$$x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$$

$x^2 + 2x + 2$ es irreducible en los racionales.

La fracción dada se escribe como una suma de **fracciones parciales** de la manera siguiente:

$$\frac{x^2 - x - 5}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1}$$

$$\frac{x^2 - x - 5}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{(Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 2x + 2)}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}$$

$$(Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 2x + 2) = x^2 - x - 5$$

Asignando valores a x, tenemos:

Si $x = 1$, obtenemos $5C = -1$ por lo tanto $C = -1$

Reemplazando el valor de C, tenemos que:

$$(Ax + B)(x - 1) - (x^2 + 2x + 2) = x^2 - x - 5$$

$$Ax^2 - Ax + Bx - B - x^2 - 2x - 2 = x^2 - x - 5$$

$$(A - 1)x^2 + (B - \mathrm{A} - 2)x + (-B - 2) = x^2 - x - 5$$

Aplicando el método de **coeficientes indeterminados** tenemos que:

$A - 1 = 1$ por lo tanto, $A = 2$

$B - A - 2 = -1$

$-B - 2 = -5$ por lo tanto, $B = 3$

Resumiendo, los valores de las constantes son:

$$A = 2 \qquad B = 3 \quad C = -1$$

Reemplazando estos valores de A, B, y C tenemos que:

$$\frac{x^2-x-5}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{2x+3}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x-1}$$

4. Si $T(x)$ tiene **factores de segundo grado irreducibles en los racionales y con multiplicidad mayor que uno**.

$$T(x)=(ax^2+bx+c)\times(ax^2+bx+c)\ldots\times(ax^2+bx+c)$$

$$\frac{P(x)}{T(x)}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

donde $A_1, A_2 \ldots A_n$ y $B_1, B_2 \ldots B_n$ son constantes a determinar.

Ejemplo

Descomponer en **fracciones parciales** $\frac{3x^4-12x^3+4x^2+11x+4}{x(x^2-3x-2)^2}$

$x(x^2-3x-2)^2$ es el m.c.m. entre x, x^2-3x-2 y $(x^2-3x-2)^2$ por lo tanto,

$$\frac{3x^4-12x^3+4x^2+11x+4}{x(x^2-3x-2)^2} = \frac{Ax+\mathrm{B}}{x^2-3x-2}+\frac{Cx+D}{(x^2-3x-2)^2}+\frac{E}{x}$$

$$\frac{3x^4-12x^3+4x^2+11x+4}{x(x^2-3x-2)^2} = \frac{x(Ax+B)(x^2-3x-2)+x(Cx+D)+E(x^2-3x-2)^2}{x(x^2-3x-2)^2}$$

$$x(Ax+B)(x^2-3x-2)+x(Cx+D)+E(x^2-3x-2)^2$$

$$=3x^4-12x^3+4x^2+11x+4$$

Asignando valores a x, tenemos que:

Si x=0, obtenemos $4E=4$ por lo tanto, $E=1$

Reemplazando el valor de E, tenemos que:

$$x(Ax+B)(x^2-3x-2)+x(Cx+D)+(x^2-3x-2)^2=3x^4-12x^3+4x^2+11x+4$$

$$Ax^4 - 3Ax^3 - 2Ax^2 + Bx^3 - 3Bx^2 - 2Bx + Cx^2$$
$$+ Dx + x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 - 4x^2$$

$$+ 12x = 3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4$$

$$(A+1)x^4 + (-3A+B-6)x^3 + (-2A-3B+C+5)x^2 + (-2B+D+12)x + 4$$

$$= 3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4$$

Aplicando el método de **coeficientes indeterminados** tenemos que:

$$A+1=3 \qquad \text{por lo tanto,} \qquad A=2$$

$$-3A+B-6=-12$$

$$-2A-3B+C+5=4$$

$$-2B+D+12=11$$

Si $A=2$, reemplazando en $-3A+B-6=-12$, obtenemos que $B=0$

Si $A=2$, y $B=0$ reemplazando en $-2A-3B+C+5=4$, obtenemos que $C=3$

Si $B=0$, reemplazando en $-2B+D+12=11$, obtenemos que $D=-1$

Resumiendo, los valores de las constantes son:

$A=2,\ B=0,\ C=3,\ D=-1$ y $E=1$

Reemplazando estos valores de A, B, C, D y E tenemos que:

$$\frac{3x^4-12x^3+4x^2+11x+4}{x(x^2-3x-2)^2} = \frac{2x}{x^2-3x-2} + \frac{3x-1}{(x^2-3x-2)^2} + \frac{1}{x}$$

Ejercicio A1

1. Descomponga en fracciones parciales:

   a. $\frac{12}{x^2-4}$

   b. $\frac{1}{2x^2-x}$

   c. $\frac{x-1}{x^2+x}$

   d. $\frac{x+15}{x^2-9}$

   e. $\frac{x+5}{x^2-4x+3}$

   f. $\frac{3x}{x^2+x-2}$

   g. $\frac{x+12}{3x^2-5x-2}$

   h. $\frac{3x-7}{4x^2+3x-1}$

   i. $\frac{3x^2+3x-12}{6x^3+5x^2-6x}$

   j. $\frac{2x^2-11x-9}{x^3-2x^2-3x}$

2. Exprese la fracción impropia, dada como la suma entre un polinomio y fracciones parciales:

   a. $\frac{2x^3+4}{x^2-4}$

   b. $\frac{x^3+5}{x^2-1}$

   c. $\frac{4x^3-8x^2-10x+30}{2x^2+x-6}$

   d. $\frac{6x^3+x^2-5x-7}{3x^2-x-2}$

3. En los ejercicios siguientes descomponga la fracción indicada en fracciones parciales:

   a. $\frac{3x+16}{(2x^2-x-1)^2}$

   b. $\frac{x^3+6x-4}{(x-2)^3}$

   c. $\frac{3x^2-x+4}{x^3+x^2+x}$

   d. $\frac{3x^2+2x-4}{x^3-8}$

   e. $\frac{2x^2-7x+1}{x^3-x^2+x-1}$

   f. $\frac{11x^2+11x+8}{2x^3+8x^2+3x+12}$

   g. $\frac{3x^2-4x}{(x^2+1)(x^2-x-1)}$

   h. $\frac{x+6}{x^4+2x^3+3x^2}$

   i. $\frac{x^3-x^2}{x^4+2x^2+1}$

   j. $\frac{x^4+x^3-5x^2-14x-1}{x^5-x^4+4x^3-4x^2+4x-4}$

Apéndice B

Polinomios enteros

Elementos de un polinomio

Un polinomio es una expresión de la forma:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0$ números enteros $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

La mayor potencia de x, que es n, es el grado del polinomio; el término a_0 se denomina el **término independiente** y $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ los **coeficientes** de $x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x$, respectivamente.

Ejemplo

1. $7x^4 - 5x^3 + 2x + 3$ es un polinomio de **cuarto grado**; 3 es el **término independiente** y $7, -5$ y 2 son los coeficientes de x^4, x^3 y x.

2. $ax^2 + bx + c$ es un polinomio de segundo grado, c es el término independiente; a y b son los coeficientes de x^2 y . a, b y c se denominan coeficientes literales. El conjunto de los polinomios, es por lo tanto:

   $\mathbb{P} = \{p(x) | p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0; a_n, \ldots a_0 \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\}$

   En particular, los polinomios de grado cero son los números enteros diferentes de cero, ejemplo: $23 = 23x^0$.

Para la designación simplificada de polinomios se usan, de ordinario, las siguientes notaciones: $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$, $R(x)$ o $p(x)$, $q(x)$, $t(x)$,

$r(x)$ y, si es necesario hacer énfasis que $P(x)$ es un polinomio de grado n, se escribe $P_n(x)$.

Observemos que un polinomio **entero** respecto de una letra x, es una suma de monomios de diferentes grados, en caso de existir del mismo grado, estos se pueden reducir a uno solo por ser términos semejantes.

Los monomios de diferentes grados pueden ordenarse con relación a las potencias de x.

Usualmente, un polinomio entero respecto de una letra se escribe en el orden decreciente de las potencias.

Ejemplo

$-6 + 9x^2 + 3x^4 - 5x + x^2 + x^3$ reduciendo los términos semejantes; $9x^2$ y x^2 y ordenando tenemos:

$$-6 + 9x^2 + 3x^4 - 5x + x^2 + x^3 = 3x^4 + x^3 + 10x^2 - 5x - 6$$

Igualdad de polinomios

Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son **iguales** si tienen los mismos términos.

Ejemplos

1. $5x - 4 + 3x^2 + 5x - 4$

2. Si $ax^3 + 2x - c = 5x^3 + 2x - 23$ entonces, $a = 5$ y $c = 23$

Dos polinomios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$; son iguales si y solamente si, $a_n = b_n; a_{n-1} = b_{n-1}; \ldots$ y $a_0 = b_0$.

Dos polinomios enteros respecto de x, son iguales, si y sólo si, son iguales sus grados y los coeficientes que tienen las potencias iguales del mismo término con el mismo grado.

Operaciones

Los polinomios enteros respecto de una letra son un subconjunto de los polinomios en general, por lo tanto se tiene que, los algoritmos o

procedimientos para efectuar operaciones los podemos aplicar a estos polinomios, es decir, dados $P(x)$ y $Q(x)$.

Adición y Multiplicación

Para encontrar la **suma** de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ escribimos todos los términos seguidos de estos dos polinomios y luego, reducimos los términos semejantes.

Para encontrar el producto de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ es necesario multiplicar cada monomio del polinomio $P_n(x)$, por cada monomio del polinomio $Q_m(x)$, sumar los productos obtenidos y reducir los términos semejantes.

Ejemplo

$$(x^3+2x-7)(x^2-3)=x^3(x^2-3)+2x(x^2-3)-7(x^2-3)$$

$$=x^5-3x^3+2x^3-6x-7x^2+21$$

$$=x^5-x^3-7x^2-6x+21$$

Observemos que el producto es un polinomio de grado $(2+3)$.

Sustracción y División

Sustraer de un polinomio $P(x)$, otro polinomio $T(x)$ significa, hallar un polinomio $Q(x)$, **tal que**: $P(x)=T(x)+Q(x)$; $Q(x)$ es único, se denomina la **diferencia** entre los polinomios $P(x)$ y $T(x)$ y se designa $Q(x)-P(x)-T(x)$.

Dividir exactamente el polinomio $P(x)$ por el polinomio $T(x)$, distinto de cero, significa hallar un polinomio $Q(x)$, tal que, $P(x)=T(x)\cdot Q(x)$.

Si $Q(x)$ **existe, es único; y se dice que el polinomio** $T(x)$ **es un divisor de** $P(x)$, **es decir**:

$$Q(x)=P(x)\div T(x)$$

Ejemplo

El polinomio $x^3 + 2x^2 - 2x + 3$ es divisible por $x + 3$ puesto que:

$$x^3 + 2x^2 - 2x + 3 = (x^2 - x + 1)(x + 3)$$

El polinomio $P(x)$, no siempre se divide exactamente por el polinomio $T(x)$.

Ejemplo

Al dividir $x^2 + 3x + 7$ entre $x + 1$ el cociente es $x + 2$ y el residuo es 5, de modo que $x^2 + 3x + 7 = (x + 2)(x + 1) + 5$. Quiere decir, en el conjunto de polinomios la división no siempre es exacta. Sin embargo, siempre es posible la división inexacta, esta conduce al siguiente logaritmo.

Algoritmo de la división

Si $P_n(x)$ y $T_m(x)$ son polinomios tales que el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $T(x)$ $(n \geq m)$ y $T(x) \neq 0$, **existen** dos polinomios **únicos** $q(x)$ y $r(x)$ tales que:

$P(x) = q(x)\,T(x) + r(x)$ donde el grado de $q(x) = n - m$, y el grado de $r(x)$, es menor que el grado de $T(x)$, o bien, $r(x) = 0 \cdot A\,T(x)$, se le denomina el **divisor**, $a\ P(x)$ el **dividendo**, $a\ Q(x)$,el **cociente**, y a, $r(x)$ **el residuo**.

Ejemplo

$$\begin{array}{r} x^3 + 1 \\ -x^3 + x \\ \hline x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l|} x^2 - 1 \\ \hline x \end{array}$$

$$x^3 + 1 = x(\,x^2 - 1) + (x + 1)$$

El ejemplo anterior lo podemos desarrollar a partir de la definición así:

Dividir $x^3 + 1$ entre $x^2 - 1$ es hallar un polinomio $q(x)$ de grado uno, $q(x) = (ax + b)$ y $r(x)$ de grado menor que el de $x^2 - 1$, es decir, a más grado 1, $r(x) = cx + d$ que cumpla:

$x^3 + 1 = (ax + b)(x^2 - 1) + (cx + d) \qquad (*)$

$x^3 + 1 = ax^3 + bx^2 + (c - a)x + (d - b)$ de esta igualdad tenemos que:

$a = 1; \qquad b = 0$

$c - a = 0$ como $a = 1$ tenemos que $c = 1$

$d - b = 1$ como $b = 0$ tenemos que $d = 1$

Reemplazando en (*) tenemos que:

$x^3 + 1 = (1x + 0)(x^2 - 1) + (1x + 1) = x(x^2 - 1) + (x + 1)$

Este método se conoce con el nombre de **coeficientes indeterminados**.

Ejercicio B1

1. Dados $P(x) = 3x^2 - 5x + 2; Q(x) = -7x^2 + 5x - 1;$

   efectúe y escriba en cada caso el grado del polinomio que resulte:

   a. $P(x) + Q(x) + R(x)$ b. $Q(x) \cdot R(x)$

   c. $R(x) \cdot (Q(x)\ P(x))$ d. $7P(x) + 3Q(x) - 2R(x)$

   e. $(P(x))^2$ f. $P(x) + (-P(x))$

2. Factorice:

   a. $12x^3 + 2x^2 + 6x$ b. $x^3 + 2x + x^2 + 2$

   c. $x^2 - 5x + 6$ d. $x^2 + 7x + 10$

   e. $2x^3 - x^2 + 2x - 1x$ f. $x^2 - 10x + 24$

   g. $36x^2 - 25$ h. $x^2 + 4x - 12$

   i. $4x^2 + 12x + 9$ j. $10x^2 - 23x + 12$

   k. $x^4 - 16$ l. $x^6 - 64$

3. Halle el mínimo común múltiplo y el máximo divisor común entre:

   a. $x^2 - 10x + 25;\ x^2 - 25;\ x^2 + 10x + 25$

   b. $x^2 + x;\ x^2 + 2x + 1;\ x^2 - 1$

   c. $x^3 - x^2;\ x^2 - 1;\ x^2 + 2x + 1x$

   d. $3x^3 - 14x^2 - 5x;\ x - 5;\ x^2 - 5x$

   e. $x + 3; x + 1;\ x^2 + 4x + 3$

   f. $2x^2 + 3x - 2;\ 2x - 1;\ x + 2$

   g. $2x + 3; 4x^2 - 3x - 1;\ 2x^2 + x - 3$

   h. $3x + 3;\ 6x^2 - 7x - 1$

   i. $x^2 - 7x + 12;\ x - 3$

   j. $x^2 + 7x + 10;\ x + 2$

4. Efectúe y simplifique:

   a. $\frac{4x^3+6x^2-10x}{2x}$

   b. $\frac{2x^4-7x^3-x^2}{x^2}$

   c. $\frac{6x^4-12x^3+18x^2}{6x^2}$

   d. $\frac{4x^3+6x^2-8x}{2x^2}$

   e. $\frac{12x^2+12+25x}{3+4x}$

   f. $\frac{x^3+48x-64-12x^2}{x^2+16-8x}$

   g. $\frac{3x^4+2x^3+3x-6x^2-2}{x^2+x-2}$

   h. $\frac{6x^4-8x^2-x^3+x+2}{2x^2-x-1}$

   i. $\frac{x^4-2x^3+x^2-1}{x^2-x+1}$

   j. $\frac{2x^4-11x^2-15-39x}{3x+x^2+5}$

5. Efectúe las divisiones siguientes:

   a. $\frac{x^2 + 3x - 12}{x + 5}$

   b. $\frac{x^2 - 10x + 24}{x - 3}$

   c. $\frac{9x^2 - 21x + 12}{3x - 2}$

   d. $\frac{3x^3 - x - 4x^2 + 6}{2 + 3x}$

   e. $\frac{4x^3 - 7x^2 - 21x + 9}{4x - 3}$

   f. $\frac{8x^4 + 15x - 24}{2x^2 - x + 4}$

   g. $\frac{4x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 10x - 2}{2x^2 - 4 + x}$

   h. $\frac{2x^4 - 11x^3 + 3x^5 + 10x + 4}{x + x^2 - 2}$

   i. $\frac{2x^4 - 11x^2 - 40x - 20}{2x^2 - 3 - 6x}$

   j. $\frac{3x^5 - 16x^2 + 15x + 5}{x^2 - 2x + 1}$

6. Dados $P(x)$ y $T(x)$, utilice el método de coeficientes indeterminados y halle $q(x)$ y $r(x)$ tales que: $P(x) = q(x)\,T(x) + r(x)$.

   a. $P(x) = x^4 - 2x^2 + 5;\ T(x) = x^2 - 1$

   b. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 12;\ T(x) = x + 5$

   c. $P(x) = 6x^5 + 3x^4 - 6x + 9;\ T(x) = 3x^2 + x - 3$

7. El número cero también se considera un polinomio. ¿De qué grado es?

Algo más sobre factorización

Hasta ahora los procedimientos para factorizar polinomios básicamente se reducen a binomios, algunos trinomios y algunos polinomios de cuatro términos, ¿cómo factorizar un polinomio de grado n cualquiera?

En principio, el producto de n polinomios de primer grado es un polinomio de grado n; se cumplirá la proposición recíproca, es decir, dado un polinomio de grado n lo podemos descomponer en polinomios de primer grado?

Esto motiva en principio la división de un polinomio entre $(x - a)$.

Teorema del residuo. El residuo de la división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $(x - a)$, es igual al valor del polinomio $P(x)$ calculado en $x = a$, es decir, $r = P(a)$.

Demostración

Como el divisor es un polinomio de grado uno y el grado del residuo es menor que el grado del divisor, necesariamente $r(x)$ es un polinomio de grado cero, es decir, es un número.

Al sustituir x por a, en la igualdad $P(x) = (x - a)\,q(x) + r$; tenemos:

$P(a) = (x - a)\,q(a) + r$, de donde se tiene $P(a) = r$

Ejemplo

Hallar el residuo que se obtiene al dividir el polinomio:

$P(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 5$, entre $(x - 3)$. Hallamos $P(a)$

$P(a) = (3)^3 + 5(3)^2 - 3(3) + 5$

$P(a) = 27 + 45 - 9 + 5$

$P(a) = 68$

Por tanto, el residuo es 68.

Teorema del factor

Si $P(x)$ es divisible entre $(x - a)$, si y solo si, $P(a) = 0$.

Demostración de necesidad. Supongamos que el polinomio $P(x)$ es divisible entre $(x - a)$; es decir, $r = 0$.

Por el teorema del residuo $r = P(a)$ por lo tanto, $P(a) = 0$.

De suficiencia. Si $P(a) = 0$, por el teorema del residuo si $r = P(a) = 0$ significa que $P(x)$ es divisible entre $x - a$.

Ejemplo

1. $P_n(x) = x^n - a^n$ es divisible entre $(x - a)$ con $n \in \mathbb{N}$

   En efecto , $P_n(a) = a^n - a^n = 0$.

2. Si $a > 0$, el polinomio $P_n(x) = x^n - a^n$ es divisible entre $x + a$ si n es un par cualquiera.

   Como n es par $(-a)^n = a^n$ y $P_n(a) = (-a^n) - a^n = a^n - a^n = 0$.

División sintética (por coeficientes separados)

Las aplicaciones del teorema del residuo y del teorema del factor implican la división de polinomios entre $(x-a)$, lo que crea la necesidad de simplificar estos cálculos, veamos:

Ejemplo

1. Efectuar $(p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0) \div (x-a)$.

Aplicando el método de **coeficientes indeterminados** tenemos que existe un polinomio $q(x)$ de grado dos, $q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$ y una constante r tales que:

$$p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0 = (q_2x^2 + q_1x + q_0)(x - a) + r$$

$$p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0 = q_2x^3 + (q_1 + aq_2)x^2 + (q_0 - aq_1)\,x + (r - a)$$

$p_3 - q_2$ por lo tanto, $q_2 = p_3$

$p_2 = q_1 - aq_2$ por lo tanto, $q_1 = p_2 + aq_2$

$p_1 = q_0 - aq_1$ por lo tanto, $q_0 = p_1 + aq_1$

$p_0 = r - aq_0$ por lo tanto, $r = p_0 + aq_0$

Observemos que $q_2 = p_3$ y con este coeficiente, q_2 , hallamos q_1, con q_1 hallamos q_0, y con q_0 hallamos r.

Este procedimiento lo podemos esquematizar así:

$$\begin{array}{rcccc|c} & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & a \\ + & & aq_2 & aq_1 & aq_0 & \\ \hline & q_2 & q_1 & q_0 & r & \end{array}$$

Este esquema que simplifica estos cálculos se denomina **división sintética** (*Regla de Ruffini*).

Ejemplo

1. Hallar el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ al dividir:

   $P(x) = 3x^3 - 8x + 1$ entre $T(x) = x + 2$

   Al expresar $x + 2$ en la forma $(x - a)$, tenemos que $x - 2 = x - (-2)$, es decir: $a = -2$

$$\begin{array}{rrrrl} 3 & 0 & -8 & 1 & \mid\ -2 \\ & 3(-2) & -6(-2) & 4(-2) & \\ \hline 3 & -6 & 4 & -7 & \end{array}$$

Observemos que: 0 es el coeficiente de x^2.

El primer coeficiente, 3, se multiplica por -2 para obtener -6, que lo sumamos con 0 para obtener -6. A continuación, multiplicamos -6 por -2 para obtener 12 y lo sumamos con -8 para obtener 4.

Finalmente, se multiplica 4 por -2 para obtener-8, y lo sumamos con 1 para obtener el residuo, -7.

En consecuencia:

$3x^3 - 8x - 1 = (3x^2 - 6x + 4)(x + 2) + (-7)$

Ejemplo

2. Dividir $P(x) = x^5 - 6x^2 - 4x^3 - 9$ entre $x + 3$. Del resultado de la división, deducir el valor $P(3)$.

$$\begin{array}{rrrrrrl} 1 & 0 & -4 & -6 & 0 & -9 & \mid\ -3 \\ & -3 & 9 & -15 & 63 & -189 & \\ \hline 1 & -3 & 5 & -21 & 63 & -198 & \end{array}$$

Observemos que:

$x^5 - 6x^2 - 4x^3 - 9 = (x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 21x + 63)(x - 3) + (-198)$

Por lo tanto, $P(-3) = 0 + (-198)$.

El valor de $P(-3)$, es igual al residuo que se obtiene al dividir $P(x)$ entre $x + 3$.

Ejemplo

3. Si $x - 3$ es un factor de $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - kx - 33$. Hallar k.

Efectuando la **división sintética** tenemos que:

3	-4	$-k$	-33	$\vert\ 3$
	9	15	$3(-k + 15)$	
3	5	$-k + 15$	$-3k + 12$	

Como $x - 3$ es un factor de $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - kx - 33$, por el teorema del factor se deduce que $-3k + 12 = 0$, de donde $k = 4$.

Ejercicio B2

1. Utilice la división sintética para encontrar $q(x)$ y r tales que: $P(x) = (x - a)\,Q(x) + r$

   a. $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 10x + 7$ y $a = 2$

   b. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 7x + 16$ y $a = -1$

   c. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 5x + 11$ y $a = \frac{1}{2}$

   d. $P(x) = -2x^4 + 3x^3 + 5x - 13$ y $a = 3$

   e. $P(x) = -3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x - 4$ y $a = -2$

2. Si $P(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$, emplee la división sintética para determinar $P(-10)$, $P(-5)$, $P(-2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(5)$, y $P(10)$. ¿Cuáles son los factores de $P(x) =$?
3. Si $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + x + k$, determine k tal que $P(3) = -2$
4. Determine k, tal que:
   a. $x - 2$ sea un factor de $P(x) = 3x^3 + 4x^2 + kr - 20$.
   b. Al dividir $P(x) = x^{100} - kx^3 + 4$ entre $x + 1$, el residuo sea 1.996
5. Muestre que:
   a. $x - 1$ es un factor de $P(x) = 14x^{99} - 65x^{56} + 51$.
   b. $x + 4$ es un factor de $P(x) = 2x^2 + 3x - 20$,
6. Demuestre que el polinomio $Pn(x) = x^n + a^n$ es divisible entre $(x + a)$, si n es impar.

Raíces de un polinomio. Un número a se denomina raíz del polinomio $P(x)$, si $P(a) = 0$, es decir, si $P(x)$ es divisible entre $(x - a)$.

Propiedad: si todos los coeficientes de un polinomio de grado n, donde $n \geq 1$, son números enteros y una raíz a de dicho polinomio es también un número entero, entonces el número a es **divisor** del **término independiente** del polinomio; por lo tanto, pueden ser raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros, **solo los divisores** del término independiente del polinomio.

Ejemplo

Hallar las raíces enteras del polinomio:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$$

Como 45 es el término independiente, las posibles raíces enteras son los divisores de 45, es decir el conjunto:
$\{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 9; \pm 15; \pm 45\}$

Utilizando el teorema del residuo verifiquemos, cuáles de estos términos son raíces:

$P(1) = 1^3 - 1^2 - 21(1) + 45 = 24$; $x = 1$ no es raíz;

$P(-1) = 64$; $x = 1$ no es raíz,

$P(3) = 3^3 - 2^3 - 21(3) + 45 = 0$; $x - 3$ divide a $P(x)$ es decir,

$P(x) = (x - 3)\, q(x)$.

Hallamos $q(x)$ por división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & -21 & 45 & 3 \\ & 3 & 6 & -45 & \\ \hline 1 & 2 & -15 & 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x - 3)\,(x^2 + 2x - 15)$

Observemos que si queda determinada una raíz $x_1 = a$ del polinomio $P(x)$, dicho polinomio puede ser escrito en la forma $P(x) = (x - a)\, q(x)$, donde los coeficientes del polinomio $q(x)$ se calculan con facilidad por división sintética.

Para hallar otras raíces del polinomio $P(x)$, encontramos las raíces del polinomio $q(x)$.

Es posible que el polinomio $q(x)$ tenga como raíz del mismo número a,

$$q(x) = x^2 + 2x - 15$$
$$= x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x + 3) \quad \text{por lo tanto}$$

$$P(x) = (x - 3)(x - 3)(x - 5) = (x - 3)^2(x + 5)$$

Si la raíz a se repite m veces, decimos que a es una raíz con **multiplicidad** m.

En el ejemplo, $x = 3$ es una raíz con multiplicidad 2.

Teorema de las raíces racionales

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, es un polinomio con coeficientes enteros y p/q es una **raíz racional irreducible**, entonces p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n.

Ejemplo

1. Hallar las raíces racionales de $P(x) = 24x^3 - 2x^2 - 5x + 1$.

Si p/q es una raíz racional de $P(x)$. Por el teorema de las **raíces racionales**, p es un divisor de $a_0 = 1$ y q es un divisor de $a_n = 24$, por lo tanto los posibles valores de p/q son:

$$\pm 1, \pm 1/2; \pm 1/3; \pm 1/4; \pm 1/6; \pm 1/8; \pm 1/12; \pm 1/24$$

Verificando algunos de estos valores por la división sintética, tenemos:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 24 & -2 & -5 & 1 & -1 \\ & -24 & 26 & -21 & \\ \hline 24 & -26 & 21 & -20 & \end{array}$$

Como $P(1) = -20$ entonces, $x = 1$ no es raíz racional.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 24 & -2 & -5 & 1 & 1 \\ & 24 & 22 & 17 & \\ \hline 24 & 22 & 17 & 18 & \end{array}$$

Como $P(-1) = 18$ entonces, $x = -1$ no es raíz racional.

$$\begin{array}{rrrrl} 24 & -2 & -5 & 1 & \mid -1/2 \\ & -12 & 7 & -1 & \\ \hline 24 & -14 & 2 & 0 & \end{array}$$

Como $P(-1/2) = 0$ entonces, $x = -1/2$ no es raíz racional y, $P(x) = (2x + 1)\,(24x^2 - 14 + 2)$.

Para hallar otras raíces del polinomio $P(x)$, encontramos las raíces del polinomio: $24x^2 - 14 + 2$, para este polinomio los posibles valores de p/q son: $\pm 1/2$; $\pm 1/3$; $\pm 1/4$; $\pm 1/6$; $\pm 1/8$; $\pm 1/12$.

Verificando con estos valores, tenemos que las otras raíces son:

$x = 1/3$ y $x = 1/4$.

Por lo tanto: $P(x) = 24x^3 - 2x^2 - 5x + 1 = (2x + 1)(3x - 1)(4x - 1)$.

Ejemplo

2. Utilizar el **teorema de las raíces racionales** para probar que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Demostración

$x^2 - 2 = 0$, es una ecuación polinómica cuya raíz es $\sqrt{2}$. Sea p/q una posible raíz racional de $x^2 - 2 = 0$, por lo tanto, $p = 1$, -1, 2 ó -2, y
$q = 1$ o´ -1; entonces, por el teorema de las raíces racionales 1, -1, 2 ó -2 son las únicas posibles raíces racionales. Como $\sqrt{2}$ no es una de las posibles raíces racionales, $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Ejercicio B3

1. Determine las raíces enteras de los siguientes polinomios:
   a. $P(x) = -x^4 + 16$
   b. $P(x) = x^2 + x - 2$
   c. $P(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$
   d. $P(x) = (x-1)(x^2 - 2)(x - 5)$
   e. $P(x) = x^4 - 16$
   f. $P(x) = (x-1)^2 - 9$
   g. $P(x) = x^3 - 9x$
   h. $P(x) = x^4 - x^3$
2. Utilizando el **Teorema del Factor** y la división por **coeficientes separados**, factorice los siguientes polinomios:
   a. $P(x) = x^3 + 8x^2 + 13x + 6$
   b. $P(x) = x^3 - 10x^2 + 27x - 18$
   c. $P(x) = x^4 - x^2 - 12$
   d. $P(x) = x^3 + 6x - 20$
   e. $P(x) = x^4 - 11x^2 - 18x - 8$
   f. $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
   g. $P(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$
   h. $P(x) = x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24$
   i. $P(x) = x^5 - x^4 - 19x^3 + 25x^2 + 66x - 72$
   j. $P(x) = x^5 - x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 22x + 24$
3. Halle las raíces racionales:
   a. $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 2$
   b. $P(x) = x^3 + 2x - 12$
   c. $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

d. $P(x) = 5x^3 - 12x^2 + 17x - 10$

4. Factorice los siguientes polinomios:

a. $P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$

b. P() $24x^3 - 2x^2 - 5x + 1$

c. $P(x) = 6x^5 + x^4 - 14x^3 + 4x^2 + 5x - 2$

d. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

e. $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 35x + 12$

f. $P(x) = 15x^3 + 19x^2 - 70x + 24$

g. $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1$

h. $P(x) = 60x^3 - 7x^2 - 6x + 1$

i. $P(x) = 120x^4 + 26x^3 - 25x^2 - 2x + 1$

j. $P(x) = 15x^3 + 16x^2 - x - 2$

Ecuaciones de grado "n"

Sea $P(x)$ un polinomio de grado n, con coeficientes enteros.

De la definición de raíz de un polinomio $P_n(x) = 0$ y de raíz o solución de la ecuación algebraica $P_n(x) = 0$, se deduce que cualquier raíz del polinomio $P_n(x)$ es raíz o solución de la ecuación $P_n(x) = 0$; por lo tanto, determinar las raíces o soluciones de la ecuación es equivalente a hallar las raíces del polinomio $P(x)$, de ahí la conveniencia de **igualar a cero** una ecuación de grado n para encontrar sus soluciones.

En la determinación de las raíces de la ecuación $P_n(x) = 0$ se tiene en cuenta la multiplicidad de la raíz del polinomio $P(x)$. Por ejemplo, el polinomio $P(x) = x^2 - 2x + 1$ tiene la raíz $x_1 = 1$ con multiplicidad de dos, por la tanto la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene una única raíz o solución $x_1 = 1$, con multiplicidad dos.

Para determinar las raíces de un polinomio consideramos solo las raíces racionales o aquellos casos, en que se logre factorizar completamente el polinomio.

Ejemplos

1. Resolver: $x^3 - 7x - 6 = 0$

   Por división sintética tenemos que:

   $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$

   Por lo tanto: $x^3 - 7x - 6 = 0$

   $$(x - 3)(x + 1)(x + 2) = 0$$

   $$x - 3 = 0 \text{ o } x + 1 = 0 \text{ o } x + 2 = 0$$

   $$x = 3 \text{ o } x = -1 \text{ o } x = -2$$

2. Resolver: $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

   $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ Factorizando,

   $(x^2 - 9)(x^2 + 4) = 0$

   $$(x + 3)(x - 3)(x + 2i)(x - 2i) = 0$$

   $x = -3$ o $x = 3$ o $x = -2i$ o $x = -2i$

3. Resolver:

   $(3x + 4)(-7x + 2)(2x - \sqrt{5})(-12x - 16) = 0$

   $3x + 4 = 0, \quad -7x + 2 = 0,$

   $2x - \sqrt{5} = 0, \quad -12x - 16 = 0$

   La ecuación tiene solamente tres raíces: $x_1 = -\frac{4}{3}$ con multiplicidad de 2;

   $$x_2 = \frac{2}{7}\ ;\ x_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

4. Resolver: $x^3 - 7x^2 + 13x - 7 = 0$

   $$x^3 - 7x^2 + 13x - 7 = 0$$

   $$(x - 1)(x^2 - 6x + 7) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{ó} \quad x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = 3 + \sqrt{2} \quad \text{o} \quad x = 3 - \sqrt{2}$$

5. Resolver: $x^3 = 8$

$$x^3 = 8$$

$$x^3 - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{ó} \quad x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = -1 + \sqrt{3}\,i \quad \text{ó} \quad x = -1 - \sqrt{3}\,i$$

6. Resolver: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0$

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0$ factorizando,

$$x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

$$x(x - 1)^3 = 0$$

$$x(x - 1)(x - 1)(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1 \quad \text{o} \quad x = 1 \quad \text{o} \quad x = 1$$

Tenemos dos soluciones $x = 0$ o´ $x = 1$ con multiplicidad 3.

Observemos en los ejemplos resueltos que las ecuaciones de grado n con coeficientes en los números reales tienen a lo más n soluciones o exactamente n teniendo en cuenta la multiplicidad de las soluciones, esta propiedad es un caso particular del teorema fundamental del álgebra.

Ejercicio B4

1. Halle el conjunto x de las soluciones reales y complejas de:

   a. $x^4 + 16$

   b. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

   c. $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

   d. $x^4 - 4x^2 - 10x - 12 = 0$

Apéndice C

Inducción matemática

Existen proposiciones que su valor de verdad depende de un número natural n por ejemplo, hallar la suma de los cien primeros números naturales

$$1 + 2 + 3 \ \ldots + 98 + 99 + 100$$

Observemos que la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$, la podemos asociar así:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) =$$

$101 \times 50 = 5.050$, que equivale, en este caso, al sumar

$\frac{100}{2}$ veces el primer número 1, más el último, 100, es decir,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 \ = \ \frac{100(100 + 1)}{2} \ = \ 5\,050\,.$$

El anterior razonamiento nos permite inferir la proposición: la suma de los primeros n números naturales es igual a $\frac{n(n+ 1)}{2}$.

De hecho esta afirmación contiene las siguientes proposiciones:

Para $n = 1$: $\quad 1 \ = \ \frac{1(1 + 1)}{2}$;

para $n = 2$: $\quad 1 + 2 \ = \ \frac{2(2 + 1)}{2} = 3$;

para $n = 3$: $\quad 1 + 2 + 3 \ = \ \frac{3(3 + 1)}{2} = 6$;

para $n = 4$: $\quad 1 + 2 + 3 + 4 \ = \ \frac{4(4 + 1)}{2} = 10$.

Hemos verificado la validez de la proposición solo para algunos valores de n, como n puede tomar infinitos valores, tenemos que cada proposición que dependa de n, contiene infinitas proposiciones.

¿Cómo demostrar que la proposición se cumple para cualquier número natural n?

Para demostrar proposiciones de este tipo se desarrolla el método de demostración que tiene como fundamento el **principio de inducción matemática**.

Principio de inducción matemática

Supóngase que S_1, S_2, S_3,... es una sucesión de proposiciones; es decir, para cada número entero positivo n, se tiene una proposición S_n. Si se cumplen las dos condiciones siguientes:

$i)$ S_1 es cierta.

$ii)$ Para cada entero positivo k, S_k implica S_{k+1}

Entonces cada proposición S_1, S_2, S_3... es cierta; esto es, S_k es cierta para todos los enteros positivos.

Ejemplo

1. Aplicaremos el principio de inducción matemática para demostrar que:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Se sabe que S_n es cierta para algunos valores de n, esto no significa que se cumpla para cualquier valor de n.

Para demostrar que S_n es, en efecto, cierta para todos los valores de n, se tienen que verificar las siguientes condiciones:

$i)$ S_1 es cierta.

$ii)$ Si S_k es cierta, entonces S_{k+1} es también cierta, siendo k un número entero positivo.

La condición $i)$ puede verificarse directamente por medio de su cálculo; para S_1 la proposición establece que:

$1 = \frac{1(1+1)}{2}$, lo que evidentemente es cierto.

Para probar la condición $ii)$ se va a demostrar que S_k implica S_{k+1}; es decir, se va a demostrar que si S_k se supone cierta, entonces S_{k+1} tiene que ser cierta, o sea que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

Supóngase S_k cierta; es decir, supóngase que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + \mathrm{k} = \frac{k(k+1)}{2}$$

Como S_k es válida, sumando $(k+1)$ a los dos miembros de la igualdad, se tiene que:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + \mathrm{k} + (\mathrm{k}+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \text{ ; factorizando,} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

Pero esta última proposición es precisamente S_{k+1}.

Como se ha probado la condición (ii), entonces, por el **principio de inducción matemática**, se concluye que S_n es cierta para todo entero positivo n; por lo tanto,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{para todo entero positivo .}$$

Ejemplo

2. Demostrar que:

$$a + (a + r) + (a + 2r) + \ldots + [a + (n-1)r] = \tfrac{1}{2}\, n[2a + (n-1)\mathrm{r}]$$

para todo entero positivo n.

$i)$ Para $n = 1$ tenemos que: $\frac{1}{2}(1)[2a + (1 - 1)r] = \frac{2a}{2} = a$; S_1 es cierta.

$ii)$ Supongamos que S_k es cierta, es decir,

$$a + (a + r) + (a + 2r) + \ldots + [a + (k-1)r] =$$
$$\tfrac{1}{2}k\,[2a + (k - 1)r]$$

Debemos demostrar que S_{k+1} es cierta.

$$a + (a + r) + ... + [a + (k - 1)r] + a + [(k + 1) - 1]r =$$

$$\tfrac{1}{2}k\,[2a + (k - 1)r] + a + [(k + 1) - 1]r$$

$$a + (a + r) + ... + [a + (k - 1)r] + (a + kr) = \tfrac{1}{2}k$$

$$[2a + (k - 1)r] + (a + kr)$$

$$a + (a + r) + ... + [a + (k - 1)r] + (a + kr) =$$

$$\tfrac{1}{2}k(2a + kr - r) + a + kr$$

$$= \frac{k(2a + kr - r) + 2a + 2kr}{2}$$

$$= \frac{2ak + k^2r - kr + 2a + 2kr}{2}$$

$$= \frac{(2ak + 2a) + (k^2r - kr + 2kr)}{2}$$

$$= \frac{2a(k + 1) + (k^2r + kr)}{2}$$

$$= \frac{2a(k + 1) + kr(k + 1)}{2}$$

$$= \frac{(k + 1)(2a + kr)}{2}$$

$$a + (a + r) + ... + [a + (k - 1)r] + (a + kr) = \tfrac{1}{2}(k + 1)(2a + kr)$$

Como se quería demostrar.

Ejemplo

3. Demostrar por inducción matemática que para todo entero positivo,

$$1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

Probaremos las dos condiciones del principio de inducción matemática, en la proposición S_n dada por la ecuación:

$$1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

$i)$ S_1 se convierte en $1 = 1(3 \times 1 - 1)/2$, lo cual es cierto.

$ii)$ Supóngase que S_k es cierta; es decir, que para todo entero positivo fijo k,

$$1 + 4 + 7 + ... + (3k - 2) = \frac{k(3k-1)}{2}$$

Se va a probar que S_{k+1} es cierta; esto es, se va a probar que para cada entero positivo k.

$$1 + 4 + 7 + ... + (3k-2) + [3(k+1) - 2] = \frac{(k+1)[3(k+1)-2]}{2}$$

$$1 + 4 + 7 + ... + (3k-2) + (3k+1) = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

Como S_k es una igualdad válida, sumando $(3k+1)$ a cada uno de los miembros de dicha igualdad, se tiene:

$$1 + 4 + 7 + ... + (3k-2) + (3k+1) = \frac{k(3k-1)}{2} + (3k+1)$$

$$= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

Por lo tanto, S_{k+1} es cierta y se ha probado la condición (ii).

De donde, se concluye que: $1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$.

Es cierta para todo entero positivo n.

4. Demostrar por inducción matemática que para $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sea Sn la representación de la igualdad:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Empleando el principio de inducción matemática, tenemos:

$i)$ S_1 es $1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = \frac{1.2.3}{6} = 1$, lo que es cierto.

$ii)$ Supongamos que S_k es cierta, siendo k un entero positivo fijo,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Debemos probar que S_{k+1} es cierta, donde S_{k+1} es la igualdad

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Sumando $(k+1)^2$ a ambos miembros de la igualdad S_k tenemos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$; \text{ factorizando,}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

Puesto que la último igualdad es S_{k+1}, entonces, S_{k+1} es cierta si S_k es cierta; por el principio de **inducción matemática**, concluimos que S_n es verdad para todo entero positivo n. Es decir, para todo n entero y positivo.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. Probar que $x^n - y^n$ es divisible entre $(x-y)$ para todo n entero positivo si $x \neq y$.

Por el principio de inducción matemática, probaremos las dos condiciones siguientes:

$i)$ Para $n = 1$, $x^n - y^n = x - y$, que es divisible por $(x-y)$; S_1 cierta.

$ii)$ Supongamos que S_k es cierta, es decir $x^k - y^k$ es divisible por $(x-y)$.

Debemos probar que S_{k+1} es cierta, o sea, que $x^{k+1} - y^{k+1}$ es divisible por $(x-y)$.

Ahora: $x^{k+1} - y^{k+1} = x^{k+1} - xy^k + xy^k - y^{k+1}$

$$= (x^{k+1} - xy^k) + (xy^k - y^{k+1})$$

$$= x(x^k - y^k) + y^k (x - y)$$

$y^k(x-y)$ es divisible por $(x-y)$, como $(x^k - y^k)$ es divisible por$(x-y)$ hipótesis de inducción, $x(x^k - y^k) + y^k (x-y)$ es divisible por$(x-y)$; por lo tanto, S_{k+1} es cierta y la demostración queda completa.

6. Si $x \in \mathbb{R}$, demuestre que: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, para $m, n \in \mathbb{Z}^+$

$i)$ S_1 es cierta $x^m \cdot x^1 = x^m \cdot x = x^{m+n}$.

$ii)$ Suponemos que S_k es cierta, entonces, S_{k+1} es cierta o sea,

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

Debemos demostrar que S_{k+1} es cierta o sea: $x^m \cdot x^{k+1} = x^{m+(k+1)}$, veamos:

$x^m \cdot x^{k+1} = x^m \cdot (x^k \cdot x)$ Propiedad de los exponentes

$= (x^m . x^k).x$ Propiedad asociativa

$= x^{m+k} \, . \, x^1$ Hipótesis de inducción

$= x^{(m+k)+1}$ Propiedad de los exponentes

$= x^{m+(k+1)}$ Propiedad asociativa

Por tanto: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ por el Principio de inducción matemática.

Desarrollo binomial

Para hallar potencias de binomios con exponentes enteros positivos, tales como:

$(x + 3y)^{12}$, $(2x - 7y)^8$, sin efectuar las multiplicaciones sucesivas; existe un teorema que permite simplificar estos procedimientos.

Este teorema se denomina el **Teorema del binomio de Newton** y se puede demostrar por el principio de inducción matemática.

Veamos algunos ejemplos del desarrollo de $(a + b)^n$, para $n \in \mathbb{Z}^+$.

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Observemos que se cumplen las siguientes propiedades para a y b,

$i)$ Hay $n+1$ términos; donde el primer término es a^n; el último término es b^n.

$ii)$ El exponente de a disminuye en 1 en cada término, y el exponente de b crece en 1.

$iii)$ Para cada término del desarrollo, la suma de los exponentes de a y b es siempre n.

La regla de formación de los coeficientes es fácil de determinar, utilizando la siguiente notación: $0!$ (factorial de cero) se define $0! = 1$ y $1! = 1$.

Si n es un entero positivo, n $0!$ (factorial de n) se define:

$$n! = n\,(n-1)(n-2)\,...3.2.1.$$

Por ejemplo:

$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$
$$7! = 7.6.5! = (42)(120) = 5.040$$

Ahora, si $0 \leq k \leq n$, siendo k y n enteros, la expresión $\binom{n}{k}$, viene dada por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Por ejemplo

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

$$\binom{17}{14} = \frac{17!}{14!\,(17-14)!} = \frac{17!}{14!\,3!} = 680$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

El **teorema del binomio** formaliza los coeficientes que aparecen al desarrollar cualquier binomio.

Teorema del binomio

Sea a y b números reales y n un entero positivo, tenemos que:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Demostración

Utilizando el **Principio de inducción matemática**, sea S_1 la proposición: $(a + b)^1 = (a^1 + b^1)$

$i)$ S_1 es cierta. (¿Por qué?)

$ii)$ Se va a mostrar que si S_n es cierta, entonces S_{n+1} es también cierta, [Nótese que se usa n en vez de k en (ii)].

Supóngase que S_n es cierta; esto es supóngase que:

$$(a + b)^1 = (a^1 + b^1)$$

Para n entero positivo. Multiplicando ambos miembros por $(a + b)$ se obtiene:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}($$

$$= (a+b)\left\{\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n\right\}$$

$$= \binom{n}{0}(a^{n+1} + a^n b) + \binom{n}{1}(a^n b + a^{n-1}b^2) + \ldots +$$

$$\binom{n}{k}(a^{n-k+1}b^k + a^{n-k}b^{k+1}) \; + \; ... \; + \binom{n}{n}(ab^n + b^{n+1})$$

$$= \; \binom{n}{0}a^{n+1} + \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right\}a^n b + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\}a^{n-1}b^2 + ... +$$

$$\left\{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right\}a^{n+1-k}b^k + ... + \binom{n}{n}b^{n+1}.$$

Pero, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{k!(n+1-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$= \binom{n+1}{k}$$

Por lo tanto:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + ... + \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + ... + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

Esta última es precisamente S_{n+1} con lo que queda completa la demostración.

En el desarrollo de $(a-b)^n$, tenemos que $(a-b)^n = (a+(-b))^n$, es decir:

$$(a-b)^n = a^n + na^{n-1}(-b) + \underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}(-b)^2 + ... + \binom{n}{n-2}}a^2(-b)^{n-2} + na(-b)^{n-1} + (-b)^n$$

como $(-b)^n = b^n$ para n par, y $(-b)^n = (b^n)$ para n impar tenemos que:

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \binom{n}{4}a^{n-4}b^4 - \binom{n}{5}a^{n-5}b^5 + ...$$

Observemos que los términos que ocupan lugar impar son positivos y los que ocupan lugar par son negativos.

Ejemplos

1. Desarrollar $(x+y)^5$

Por el **teorema del binomio**,

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5$$

$$= x^5 + \tfrac{5!}{1!4!}x^4y + \tfrac{5!}{2!3!}x^3y^2 + \tfrac{5!}{3!2!}x^2y^3 + \tfrac{5!}{4!1!}xy^4 + y^5$$

$$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

2. Desarrollar $(x-3)^4$

$$(x-3)^4 = [x+(-3)]^4$$

$$= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(-3) + \binom{4}{2}x^2(-3)^2 + \binom{4}{3}x(-3)^3 + \binom{4}{4}(-3)^4$$

$$= x^4 + 4x^3(-3) + 6x^2(-3)^2 + 4x(-3)^3 + (-3)^4$$

$$= x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$$

Observe la **simetría** de los valores de los coeficientes en los desarrollos binomiales.

$$(a+b)^2 = \underbrace{1a^2 + 2ab +}\, 1b^2$$

$$(a+b)^3 = \underbrace{1a^3 + \underbrace{3a^2b +}\, 3ab^2 +}\, 1b^3$$

$$(a+b)^4 = \underbrace{1a^4 + \underbrace{4a^3b + 6a^2b^2 +}\, 4ab^3 +}\, 1b^4$$

En general, $(a+b)^n=$

$$\underbrace{\binom{n}{0}a^n + \underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b + \underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + .. + \binom{n}{n-2}}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}}ab^{n-1} + \binom{n}{n}}\mathrm{b^n}$$

en donde:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

puesto que; $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

y $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

3. Hallar el desarrollo de $(3x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{y})^4$.

$(3x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{y})^4.=$

$$(3x^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{y})^4 = (3x^2)^4 - 4(3x^2)^3(\tfrac{1}{2}\sqrt{y}) + 6(3x^2)^2(\tfrac{1}{2}\sqrt{y})^2 - 4(3x^2)(\tfrac{1}{2}\sqrt{y})^3$$

$$+ (\tfrac{1}{2}\sqrt{y})^4 = 81x^8 - 54x^6\sqrt{y} + \tfrac{27}{2}x^4y\ \tfrac{3}{2} - x^2y^{3/2} + \tfrac{1}{16}y^2$$

4. Hallar el sexto término del desarrollo de $(2x - y^2)$.

El sexto término es: $\binom{8}{5}(2x)^3(-y^2)^5 = -\binom{8}{5}8x^3y^{10}$

$$= -\frac{8.7.6.5!}{3.2.1.5!}(8x^3y^{10})$$

$$= -448x^3y^{10}$$

5. Encontrar el término que no contiene a x en el desarrollo de:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$$

El término que no contiene a x es aquel en que su exponente es cero, es decir:

$(x^2)^{10-k}.\left(\frac{1}{x^3}\right)^k = x^0$ (Por el teorema del binomio).

$\frac{x^{20-2k}}{x^{3k}} = x^0$

$x^{20-5k} = x^0$

$20 - 5k = 0$

$k = 4$

Para $k = 4$ corresponde el quinto término, verifiquemos,

el quinto término de $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$ es:

$\binom{10}{4}(x^2)^{10-4}\left(\frac{1}{x^3}\right)^4 = \frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.1.6!}(x^2)^6\left(\frac{1}{x^3}\right)^4 = 210x^{12}.\frac{1}{x^{12}} = 210x^0 = 210$

6. Encontrar el quinto término de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$. El quinto término de:

   $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ es $\binom{10}{4}x^{10-4}.(-\frac{1}{x})^4 = \frac{10.9.8.7.6!}{1.2.3.4.6!}\ x^6.\frac{1}{x^4} = 210x^2$

7. Encontrar el coeficiente del término que contiene x^3y^4 en el desarrollo de $(2x + 3y)^7$.

   $(2x + 3y)^7 = [(2x) + (3y)]^7$. El término que contiene a x^3y^4 corresponde en el desarrollo al de $(2x)^3 \cdot (3y)^4$

   En el coeficiente de $(2x)^3 \cdot (3y)^4$ tenemos que $7 - k = 3$, es decir, $k = 4$ y corresponde al **quinto término**.

   El coeficiente de $(2x)^3 \cdot (3y)^4$ es $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!.3!} = 35$ y el coeficiente de x^3y^4 es $35 \cdot 2.^3 \cdot 3^4 = 22\,680$.

Ejercicio C1

1. Demuestre por inducción matemática las siguientes identidades:

   a. $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

   b. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   c. $2 + 4 + ... + 2n = n^2 + n$

   d. $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(2n - 1)(2n + 1)$

   e. $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$

   f. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

   g. $4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^n = \frac{4}{3}(4^n - 1)$

2. Pruebe que $a^{2n} - b^{2n}$ es divisible por $a + b$, en donde y son números reales y n entero positivo.

3. Pruebe que $n\,(n^2 + 5)$ es divisible por 6 para todo entero positivo n.

4. Para cualquier número $x \neq 1$ y $|x| < 1$ probar:

   $x^0 + x^1 + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$

5. Halle el valor de cada una de la siguientes expresiones:

   a. $\binom{15}{10}$ b. $\binom{n}{n}$

   c. $\binom{6}{2}$ d. $\binom{15}{5}$

   e. $\binom{n}{0}$ f. $\binom{6}{5}$

   g. $\binom{15}{3}$ h. $\binom{n}{1}$

   i. $\binom{6}{4}$

6. Demuestre y verifique que: $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

7. Sea $a = x = 1$, en el desarrollo de $(a + x)^n$. Halle la suma de:

   $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$

8. Halle los cuatro primeros término de los siguientes desarrollos:

   a. $(x^2 + 2a)^{10}$

   b. $(2a - \frac{1}{b})^6$

   c. $(\sqrt{\frac{1}{2}x} + 2y)^7$

   d. $(\frac{1}{a} + \frac{x}{2})^{11}$

   e. $(a^{3/2} - 2x^2)^8$

9. Utilice el **teorema del binomio** para desarrollar cada una de las siguientes expresiones:

   a. $(2z + y)^5$

   b. $(x - 3)^4$

   c. $(y^2 - 2x)^4$

   d. $(\frac{1}{a} + \frac{x}{2})^3$

10. Aplicando el **teorema del binomio**, halle el término que se indica en cada una de las siguientes expresiones, sin escribir los términos que le preceden:

    a. $(\frac{x^2}{2} + a)^{15}$, 4° término.

    b. $(y^2 - 2z)^{10}$, 6° término.

    c. $(2x^2 - \frac{a^2}{3})^9$, 7° término.

    d. $(x + \sqrt{a})^{12}$, término medio.

    e. $(a + \frac{x^2}{3})^9$, término que contiene $x6$, y qué lugar ocupa.

    f. $(1 - x^3y^{-2})^{12}$, término medio.

    g. $(x^2 - 1/2)^{11}$, término que contiene x^{10}, y qué lugar ocupa.

    h. $(2\sqrt{y} - \frac{x}{2})^{10}$, término que contiene y^4, y qué lugar ocupa.

i. $(x + y)^{25}$, 8° término.

j. $(y^2 - 3)^{10}$, 5° término.

k. $\left(x - \frac{2}{x}\right)^{15}$, 7° término.

l. $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{20}$, 9° término.

m. $(2a - 4b^2)^{12}$, 6° término.

n. $\left(x + \frac{3}{x}\right)^{12}$, término medio.

o. $(2x + 3y)^{30}$, 10° término.

11. Escriba el término que contiene a x^5 en el desarrollo de $(2x + 3y)^7$.

12. Encuentre el término que contiene a x^{-3} en el desarrollo de $\left(x + \frac{y}{x}\right)^{11}$.

Respuestas a algunos ejercicios y problemas

Capítulo 1

Ejercicio 1.1

1. a. Demuestre que $\forall x$, y y $z \in \mathbb{R}$, entonces, si $x.z = y.z$ y $z \neq 0$, luego, $x = z$.

Demostración

$x \cdot z = y \cdot z$	Hipótesis
$z \neq 0$	Hipótesis
$\frac{1}{z}$ es un número real distinto de 0	(axioma del Inverso multiplicativo)
$(x \cdot z)\left(\frac{1}{z}\right) = (y \cdot z)\left(\frac{1}{z}\right)$	Propiedad multiplicativa de la igualdad para $z \neq 0$
$(x)(z \cdot \frac{1}{z}) = (y)(z \cdot \frac{1}{z})$	Propiedad asociativa de la multiplicación
$x \cdot 1 = y \cdot 1$	Axioma del inverso multiplicativo
$x = y$	Axioma del idéntico multiplicativo

1. b. Demuestre que $\forall x$, $y \in \mathbb{R}$, $x.y = 0$, si sólo si, $x = 0$ ó $y = 0$

Demostración

Si $x = 0$, entonces, la conclusión del teorema es cierta porque $0 \cdot y = 0$ por el teorema 1.

Ahora suponga $x \neq 0$, y que $xy = 0$ implica $y = 0$, luego, por el **axioma del inverso multiplicativo** x tiene inverso multiplicativo, a saber $\frac{1}{x}$, que es diferente de 0. Por lo tanto: $\frac{1}{x}(x \cdot y) = \frac{1}{x}(0)$. Por la propiedad multiplicativa de la igualdad.

Pero por la propiedad asociativa de la multiplicación: $\frac{1}{x}(x \cdot y) = (\frac{1}{x} \cdot x) \cdot y$, y por el teorema 1 entonces: $\frac{1}{x} \cdot 0 = 0$; luego se tiene que $(\frac{1}{x} \cdot x) \cdot y = 0$; pero $\frac{1}{x} \cdot x = 1$ por el Axioma del inverso multiplicativo, así que $1 \cdot y = 0$ e $y = 0$ por el Axioma del idéntico multiplicativo. Luego vemos que si $x \neq 0$, necesariamente $y = 0$, lo cual demuestra el teorema.

1. c. Demuestre que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, entonces: $(-x)\,(-y) = x \cdot y$.

Demostración

$y+(-y) = 0$	Axioma del inverso aditivo
$(-x)[y+(-y)] = (-x)\cdot 0$	Prop. multiplicativa de la igualdad
$(-x)[y+(-y)] = 0$	Teorema 1
$(-x)y+(-x)(-y) = 0$	Propiedad distributiva
$xy+[(-x)y+(-x)(-y)] = xy+0$	Propiedad aditiva de la igualdad
$xy+[(-x)y+[(-x)(-y)] = xy$	Axioma del idéntico aditivo
$[xy+(-x)y]+[(-x)(-y)] = xy$	Propiedad asociativa de la suma
$[yx+y(-x)]+[(-x)(-y)] = xy$	Propiedad conmutativa de la multiplicación
$y[x+(-x)]+[(-x)(-y)] = xy$	Propiedad distributiva
$[y\cdot 0]+[(-x)](-y)] = xy$	Axioma del inverso aditivo
$[0+(-x)(-y) = xy$	Teorema 1
$(-x)(-y) = xy$	Axioma del idéntico aditivo

2. a. Si $x < y$ y $z<w$ entonces $x+z < y+w$

Demostración

Si $x < y$ y $z<w$ tenemos que $y - x > 0$ y $w-z > 0$ (definición).

$(y - x) + (w - z) > 0$ (axioma 7).

$(y + w) - (x + z) > 0$ (axiomas 1, 2 y teorema del ejercicio 5).

$y+w>x+z$ o $x+z<y+w$ (definición)

2. c. Si $x<y$ y $z<0$ entonces, $x \cdot z > y \cdot z$

Demostración

Si $x<y$ y $z<0$ tenemos que: $y - x > 0$ (definición)

$-z>0$	(axioma 8).
$(y - x)\,(-z)>0$	(axioma 7).
$-y \cdot z + x \cdot z>0$	(axioma 6 y teoremas anteriores).
$x \cdot z > y \cdot z$	(definición).

7. Si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$

Demostración

Si $x \leq y$ e $y \leq z$ tenemos que:

$y - x \geq 0$ y $z - y \geq 0$	por definición de desigualdad,
$(y-x) + (z-y) \geq 0$	sumando cada miembro de la desigualdad
$y - x + z - y \geq 0 + 0$	por la cancelativa y la modulativa para la suma.
$z - x \geq 0$	Sumando en cada miembro y cancelando
$z \geq x$ o sea $x \leq z$	por definición de desigualdad,

Ejercicio 1.2

1. a. $3^{2/5}$; b. $3^{8/7}$; c. $3^{2/9}.5^{4/9} = 5.625^{1/9}$; d. 45; e. $2^{1/9}.\ 3^{19/18}$;
   f. $3^{1/5}.\ 5^{2/5} = 75^{1/5}$

2. a. $\sqrt{2}$; b. $4.\sqrt[5]{28}$; c. $2.\sqrt[4]{7}$; d. $\sqrt[7]{4a^4}$; e. $\sqrt[4]{a^{15}}$;
   f. $\sqrt[3]{(3/5)^5} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{9/25}$

3. a. $-7'011.591$; c. 318,5; d. $\frac{8}{729} = (\frac{2}{9})^3$; f. $\frac{18+\sqrt{3}}{26}$.

4. a. $2\sqrt[3]{6}$; b. 12; c. $10.\sqrt{10}$; d. 5; e. $2.\sqrt[3]{4}$; f. $2.\sqrt[4]{4}$; g. 2; h. $\frac{7}{4}$.

5. a. $\sqrt[4]{1.875}$; b. $\sqrt[3]{32}$; c. $\sqrt{5/4}$; d. $\sqrt{49/4}$.

6. a. 8; b. 16; c. 1/5; d. 4; e. 1; f. 4/3; g. 1; h. $\frac{1}{2}.a^2$;

7. a. $14\sqrt{5}$; b 3 ; c. $-6 - 3\sqrt{2}$; d. $\sqrt{75} = \sqrt{5\sqrt{3}}$; e. $\sqrt{7}$;
   f. $2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}$; g. $5\sqrt{3}$; h. $57.\sqrt{3}$; i. $5.\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$
   j. $6.\sqrt[3]{2} - 3.\sqrt[3]{5}$; k. 0; l. $21\sqrt{5}$.

8. a. 6; b. $7 + \sqrt{22}$; c. $\sqrt{6} + 2 - \frac{1}{3}\sqrt{15}$; d. $\sqrt{2} - \sqrt{6} - 1$;
   e. $4x - 12\sqrt{xy} + 9y$; f. $5 - 2\sqrt{6}$; g. $\sqrt{32}$; h. $\sqrt[72]{2^{66}.\ 3^{16}\ .\ 5^{12}.\ 23^9}$

9. a. $\frac{\sqrt{3}+3}{-2}$; b. $6 + 2\sqrt{6}$; c. $22 - 9\sqrt{6}$; d. $5 + 2\sqrt{6}$;
   e. $\frac{4+3.\sqrt{3}+\sqrt{5}-2.\sqrt{15}}{11}$; f. $\frac{2.\sqrt{3}+3.\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$; g. $\frac{8-\sqrt{10}}{27}$.

10. a. $\alpha>0$; b. $\alpha>0$

Capítulo 2

Ejercicio 2.1

1. a. -1 b. Indeterminado c. $3/4$ d. $29/2$ e. $(\forall a,b\in\mathbb{R}|a\neq 2b)$

2. a. $a=1,\ b=2, c=3;$ b. $a=1, b=2, c=0;$
   c. $a=2,\ b=3, c=0;$ d. $a=0$ o $b=0$

3. Ej. 1: Racional, Ej. 2 a. Racional, Ej. 2 b. Entera si $c\in\mathbb{Z}^+$

   Ej. 2 c. Irracional, Ej. 2 d. Racional

5. a. $19a+3c$; b. $-14a^x+7a^m$; c. $5m^{a+1}-11m^{a+2}+6m^{a+3}$;
   d. $2ab-3cd$; e. $3xy+13yz-4z$; f. $6b-4bc+4c$;
   g. $3x+(5\sqrt{3}+2)y+2$ h. $0{,}55a+6{,}05b+6c-15$; i.
   $b+(15\sqrt{2}-1)ab-3$; j. $-2x+2y-z$ k. $4x-2$; l. $4a+6b+$
   $11c-15$; m. $-4x-2x^n+8$

6. a. $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}xy+\frac{1}{4}y^2$; b. $x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{5}{3}y^2$;
   f. $\frac{1}{6}x^4-\frac{5}{6}x^3y+\frac{27}{8}x^2y^2+xy^3-\frac{1}{504}y^4$

Ejercicio 2.2

1. a. $-2x-9$; b. $-x+4$; c. $5x-6y+12$; d. $4ab+6bc-11$;
   e. $-a+17b-9c$; f. $a-5b-5c$; g. $2-2y$ h. $2x+y-3$
   i. $-\frac{13}{28}x+\frac{181}{200}y$; j. $-10\sqrt{5}a+15$

2. a. $4x-6y-6$; b. $-14x+20y+4$; c. $x-3y$; d. $-x+2$;
   e. $-4x+7y+35$; f. $9a-b-7c+d$; g. $6d+2d^2$; h. $6x^2-5x-2$
   i. $-m^4-4m^3+10m^2-12m+6+\sqrt{7}$; j. $dy^3-6by-3a+5cy^2$

3. $a+5b-6c$; 4. $6m-n+p$; 5. a^2-ab+b^2; 6. $4x^2-3$; 7. $3a^3+a^2-a-5$;
   8. $8x-8y+3$; 9. $-18x+15y-25$.

10. $-a-4b-9c$; 11. $a-10b+5c$; 12. $3x-18y-z+9$

13. a. $-\frac{3}{10}a-\frac{8}{9}b+\frac{1}{2}$; b. $\frac{1}{2}a+\frac{19}{20}b-c+d-\frac{7}{8}$;
    c. $\frac{5}{6}m^3+\frac{1}{2}m^2n-\frac{3}{8}mn^2+\frac{19}{45}n^3$ d. $a^3+\frac{15}{8}a^2-\frac{19}{10}a-\frac{1}{24}$

14. a. $\frac{15}{2}a+\frac{33}{5}b-5$; b. $-\frac{7}{8}x^4y-\frac{5}{14}x^3y^2+\frac{2}{3}x^2y^3+\frac{11}{24}xy^4-\frac{65}{9}+\frac{1}{5}x^5$
    e. $\frac{2}{13}m^6+\frac{13}{20}m^4n^2-\frac{11}{14}m^2n^4+\frac{2}{9}n^6+\frac{3}{5}$

15. a. $2a - b$; b. $2m + 2n$; c. a; e. $2x^2 + 4xy + 3y^2$; f. $-3a - 2b$;
o. $9x - 10y$; r. $-5a - 10b - 14$; t. $10a + 33b + 6c + 10$

16. a. $x - [-2y - (x - y)]$; b. $4m - [2n - 3 + (-m + n) - (2m - n)]$
e. $2a - \{-3b + \{2a + [a + (b - a)]\}$; f. $3a - \{5 - [-12 + (7a - 3) - 34a]\}$

17. a. $-\left(a^2 - b^2 + 2bc + c^2\right)$; b. $-[2a - (-3a + b)]$;
d. $-[-x^3 + (3x^2 + 4x - 2)]$; f. $-\{-a + b - [-2a - (5a + 9b) + 6b]\}$

18. a. $3a - (-5b - 6c - 7)$; b. $5x - (4y - 8z + 10)$;
f. $12a - (6b - 8c + 10)$; j. $x^2 - (-2xy + z - 5)$
i. $3x - (8y - 12z + 20)$

Ejercicio 2.3

1. $-16a^3b^3$; 2. $-6a^4b^4c^4$; 3. $x^3y^2 - 2xy^3 + 4xy^2$; 4. $8x^3 + 4x^2y^2 - 20xy - 10y^3$

5. $a^3 + a^2b - 4ab^2 + 2b^3$; 6. $2x^3 - 9x^2y + 2x^2 + 11xy^2 - 6xy - 3y^3 + 2y^2$

7. $a^3 + 8b^3$; 8. $x^3 - 3xyz + y^3 + z^3$; 9. $-\mathrm{m}^6 + 2\mathrm{m}^5 - 3\mathrm{m}^4 + 4\mathrm{m}^3 - 3\mathrm{m}^2 + 2\mathrm{m} - 1$

10. $x^5 + 7x^4 + 11x^3 - x^2 + 8x - 2$

11. $xyz + axy + axz + a^2x + ayz + a^2y + a^2z + a^3$

12. $x^6 - x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1$; 13. $a^5 - a^5$

14. $a^3 + 3ab + b^3 - 1$; 15. $a^8 + a^4 + 1$

18. $x^6 - 2x^5 + x^4y - 2x^3y - x^2y + 2xy + y + 2x + 1$

19. $a^8 + a^4 + 1$; 20. $x^7 - x^6 + x^5 + x^3 + 1$; 21. $5x^3 + 12x$

22. $6x^4 - 12x^2 + 9x\mathrm{y} - x$; 23. $7x^2 - 13x$; 24. $2x^2 + 9x$

25. $a^{x+3} + a^x$; 26. $-x^{n+2} + x^{n+4} + 3x^{n+3} + x^{n+2}$

30. $a^{x+2} + 8a^{x-1} - 3a^{x-2} - 2a^x$

32. $-m^{2a+3} + 2m^{2a+2} + 2m^{2a+1} - 4m^{2a} - m^{2a-1} + m^{2a-2}$

33. $x^{2a-2} + x^{2a-3} - 4x^{2a-4} - x^{2a-7}$

34. $a^{2n}b^3 - a^{2n-1}b^4 + a^{2n-2}b^5 - 2a^{2n-4}b^7 + a^{2n-5}b^8$

35. $5x^{n+3} - 4x^{n+2} - 14x^{n+1} + 9x^n$

38. $\frac{5}{32}\,a^2mx^2 - \frac{1}{8}a^2my^2 + \frac{5}{16}a^4m - \frac{5}{24}\,a^2b^2m$

40. $\frac{2}{7}\,a^3 + x^{10}y^3 - \frac{5}{21}a^3x^8y^5 + \frac{3}{7}\,a^3x^6y^7 - \frac{1}{14}\,a^3x^4y^9$

41. $\frac{1}{6}\,a^2 + \frac{1}{12}\,ab - \frac{1}{4}\,b^2$

42. $\frac{1}{3}\,x^3 - \frac{35}{36}\,x^2y + \frac{2}{3}\,xy^2 - \frac{3}{8}y^3$

44. $\frac{1}{14}\,x^5 - \frac{101}{420}\,x^4y + \frac{139}{280}\,x^3y^2 - \frac{1}{2}\,x^2y^3 + \frac{5}{12}\,xy^4$

45. $\frac{1}{2}\,m^5 - \frac{5}{6}\,m^4n + \frac{99}{100}\,m^3n^2 - \frac{101}{60}\,m^2n^3 + \frac{7}{6}\,mn^4 - \frac{5}{8}\,n^5$

Ejercicio 2.4

1. a. $(x+y)^4$; b. x^3y^2; c. $-\frac{32y}{x^2z^5}$; d. $\frac{1}{4a^4b^5}$; e. $-\frac{xy^2}{96z^{14}}$; f. $-\frac{a^4}{3b^2}$;
   g. $\frac{x}{2y^2}$; h. $-\frac{3a^8}{b}$; i. $\frac{1}{xy^8(3x^4+5)^4}$

2. a. $2x^2+3x-5$; b. $-3x^3-x+2$; c. a^2-ab+b^2; d. $2b+3$; e. $-\frac{x}{y}+2-\frac{3y}{x}$
   f. $-\frac{x^3}{3y^3}+\frac{2x}{3y}+\frac{y}{3x}$; g. $1-2a$; h. $-3a$; i. $-4a-3$; j. 0

3. a. $2a^2-4ab+b^2$; c. $3x^2-x+1$; e. x^2+xy+y^2; f. x^2-4y^2;
   j. $7x^2+x-4+\frac{2x+3}{4x^2-3x+6}$ o cociente $= 7x^2+x-4$, residuo $= 2x+3$
   k. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b$ l. $\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}y$; m. $\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y$; n. $\frac{1}{4}a^2-ab+\frac{2}{3}b^2$;
   o. $\frac{2}{5}m^2+\frac{1}{3}mn-\frac{1}{2}n^2$; p. $\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{2}{5}$; q. $\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{3}ax-\frac{1}{2}x^2$

4. a. $a^{x+2}-a^{x+1}+a^x$; b. $-x^{n+3}+2x^{n+2}+x^{n+1}$;
   c. $m^{a+2}+m^{a+1}-m^a+m^{a-1}$; d. $a^{n+2}+3a^{n+1}-2a^n$; e. $x^{a+2}+2x^{a+1}-x^a$;
   f. a^2+2a-1; g. $a^x-3a^{x-1}+2a^{x-2}$ h. $m^{a+4}-m^{a+3}-2m^{a+2}+m^{a+1}$

Ejercicio 2.5

1. $4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4$; 2. $a^4 - 2a^3b + a^2b^2$; 3. $a^4 - 9$; 4. $a^2x^2 - x^2y^2$

5. $x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$; 6. $a^2 + 2ac - b^2 + c^2$; 7. $6x^2 + 11x - 10$

8. $12x^2 - 14x + 4$; 9. $8c^6 + 12c^4d^2 + 6c^2d^4 + d^6$

10. $27m^3 - 54m^2n^2 + 36mn^4 - 8n^6$

11. $a^4 + 4a^3b + 6a^3b^2 + 4ab^3 + b^4$; 12 $x^8 - 1$; 13. $x^8 + x^4 +$

15. $x^2 - 4xy + 2xz - 2xw + 4y^2 - 4yz + 8yw + z^2 - 4wz + 4w^2$

16. $x^2 + 14x + 49$; 17. $a^8b^6c^4 - 1$; 18. $y^{2n+2} + 24y^{n+1} + 144$

19. $9s^{2n} + 6s^n + 1$; 20. $1 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4$

21. $1 - 2x + x^2 - x^4$; 22. $t^2 + 4t + 4 - t^6$; 23. $y^6 - 4u^4$

24. $x^8 - 25y^2$; 25. $x^4 + 3x^2 + 4$; 26. $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

Ejercicio 2.6

1. a. $x - 1$; b. $x - y$; c. $x - 2$; d. $a - 2b$; e. $2x - 3mn^2$; f. $9a^3 - 10b^4$;

   g. $x^n - y^n$; h. $a^{x+1} + 10$; i. $x + y + z$; j. $a + x - 3$.

2. a. $a^2 - a + 1$; b. $x^2 - xy + y^2$; c. $4x^2 - 6xy + 9y^2$; d. $16a^2 - 28a + 49$;

   e. $a^2x^2 - abx + b^2$; f. $m^2x^2 + mnx + n^2$; g. $x^4 + 3x^2y + 9y^2$; h. $x^8 + x^4 + 1$;

   i. $49x^{10} + 35x^5 + 25$; j. $n^4 - n^2 + 1$; k. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Ejercicio 2.7

1. a. $a(a + b)$; b. $x(x + 1)$; c. $x^3(1 - 4x)$; d. $b(a - c)$; e. $2ax(a + 3x)$;

   f. $9ax^2(a^2 - 2x)$; g. $35m^2(n^3 - 2m)$; h. $12xy^2(2a^2 - 3xy^2)$; i. $x^2y^3(x^2z^2 + 3y)$

2. a. $(x + y - 3)(n + 1)$; b. $(x - 2)(x + 1 + 3y)$; c. $(a + 1)(a - 1)$; d. $2(a + 1)(x - 1)$;

   e. $2a\,(x - 3)$

3. a. $B = \sqrt{3}x - 3.\sqrt{3}$; c. $B = 45(m+n) - 75n$

4. a. $\frac{1}{15}xy(15x - 4y)$; c. $\frac{3}{16}x^2(3 - 20xm)$; d. $\frac{1}{15}(x^2 + 15)$

Ejercicio 2.8

1. $(x^n - y)(x^n + y)$; 2. $(a+2)(a-2)$

3. $(2m+1)(1-2m)$; 4. $(2a+3)(2a-3)$ 5. $(1+7ab)\ (1-7ab)$

6. $(a^5 + 7b^6)(a^5 - 7b^6)$; 7. $(2-a)(2+a)(4+2a+a^2)(4-2a+a^2)$

8. $(1-6m)(36m^2 + 6m + 1)$; 9. $(x^2 + b^3)(x^2 - b^3)$

10. $(1-7n)(49n^2 + 7n + 1)$; 11. $(ab - x^2)(a^2b^2 + abx^2 + x^4)$

12. $(x^2 - 2y^4)(x^4 + 2x^2y^4 + 4y^8)$; 13. $(10mn^2 + 13y^3)(10mn^2 - 13y^3)$

14. $(14xy^2 + 15z^6)\ (14xy^2 - 15z^6)$; 15. $(1 - 3ab^2c^3d^4)(3ab^2c^3d^4 + 1)$

16. $(a^2 - 5b^4)(a^4 + 5a^2b^4 + 25b^8)$

17. $(x-y)(x+y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

18. $(1 - 3ab)(1 + 3ab + 9a^2b^2)$

19. $(a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$

20. $(a^3 - b)(a^{18} + a^{15}b + a^{12}b^2 + a^9b^3 + a^6b^4 + a^3b^5 + b^6)$

21. $(a-3)(a^4 + 3a^3 + 9a^2 + 27a + 81)$

22. $(1 - 3x)(81x^4 + 27x^3 + 9x^2 + 3x + 1)$

23. $(a - bc)(a^4 + a^3bc + a^2b^2c^2 + ab^3c^3 + b^4c^4)$

24. $(m - ax)(m^6 + m^5ax + m^4a^2x^2 + m^3a^3x^3 + m^2a^4x^4 + ma^5x^5 + a^6x^6)$

25. $\left(\frac{1}{2} + 3a\right)\left(\frac{1}{2} - 3a\right)$; 26. $\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{7}x\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{7}x\right)$

27. $\left(\frac{x}{10} + \frac{yz^2}{9}\right)\left(\frac{x}{10} - \frac{yz^2}{9}\right)$; 28. $\left(2x^n + \frac{1}{3}\right)\left(2x^n - \frac{1}{3}\right)$

29. $(4x^{3m} + \frac{y^n}{7})(4x^{3m} - \frac{y^n}{7})$; 30. $\left(a^n b^{2n} + \frac{1}{5}\right)\left(a^n b^{2n} - \frac{1}{5}\right)$

31. $(1 - a^{n+2})(1 + a^{n+2} + a^{2n+4})$; 34. $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

35. $(7x - 3)(49x^2 + 21x + 9)$; 36. $(2x - y^n)(4x^2 + 2xy^n + y^{2n})$

37. $(2x^2 - 9)(4x^4 + 18x^2 + 81)$; 38. $(6 - x^4)(x^8 + 6x^4 + 36)$

39. $(a^n - \frac{1}{4})(a^{2n} + \frac{1}{4}a^n + \frac{1}{16})$; 40. $(x + 1)(1 - x)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

43. $(1 - 2x^2)(1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + 16x^8 + 32x^{10} + 64x^{12}$

46. a. $(x + 5\sqrt{2})(x - 5\sqrt{2})$; b. $(x - 2^3\sqrt{2})(x^2 + 2x\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{4})$

Ejercicio 2.9

1. $(3m + 4n^3)(9m^2 - 12mn^3 + 16n^6)$; 2. $(7x + 8y^2)(49x^2 - 56xy^2 + 64y^4)$

3. $(x^3 + y^2)(x^6 - x^3y^2 + y^4)$; 4. $(a^{2n} + 5b^4)(a^{4n} - 5a^{2n}b^4 + 25b^8)$

5. $(x^4 + y^3)(x^8 - x^4y^3 + y^6)$; 6. $(1 + 3ab^2)(1 - 3ab^2 + 9a^2b^4)$

7. $(1 + x^2)(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12})$

8. $(1 + 2a)(1 - 2a + 4a^2)(1 - 8a^3 + 64a^6)$

9. $(x^2 + 2y)(x^8 - 2x^6y + 4x^4y^2 - 8x^2y^3 + 16y^4)$

10. $(1 + 2x^2)(1 - 2x^2 + 4x^4 - 8x^6 + 16x^8 - 32x^{10} + 64x^{12})$

11. $(2 - m)(16 + 8m + 4m^2 + 2m^3 + m^4)$

12. $(3 + 2b)(81 - 54b + 36b^2 - 24b^3 + 16b^4)$

13. $(\frac{1}{2} + 3x)(\frac{1}{16} - \frac{3}{8}x + \frac{9}{4}x^2 - \frac{27}{2}x^3 + 81x^4)$

14. $(a + \frac{bc}{3})(a^4 - \frac{a^3bc}{3} + \frac{a^2b^2c^2}{9} - \frac{ab^3c^3}{27} + \frac{a^4b^4}{81})$

15. $(y^{2n} + ax)(y^{12n} - axy^{10n} + a^2x^2y^{8n} - a^3x^3y^{6n} + a^4x^4y^{4n} - a^5x^5y^{2n} + a^6x^6)$

Ejercicio 2.10

1. $2(2x^2 - 4x + 1)$; 2. $a(a^2 - ax + x^2)$; 3. $x^3(1 + x^2 - x^4)$

4. $17a(2x^2 + 3ay - 4y^2)$; 5. $-31a^2x\ (2x^2\ y^2 - 3axy + 4)$

6. $a^2c^2(b^2 - x^2 + y^2)$; 7. $55m^2(xn^3 + 2x^2n^3 - 4y^3)$

8. $31a^2x(3axy - 2x^2y^2 - 4)$; 9. $4a^2x^2(x^2 + 2x^4 - \ 4)$

10. $(x - 1 + w)(a + 2)$; 11. $(x + 1)(a + 4)$; 12. $-z(3x + 2)$

Ejercicio 2.11

1. $(a - 5)^2$; 2. $(1 - a^3)^2$; 3. $(1 + 7x^2y)^2$; 4. $(a - 12x^2m^2)^2$; 5. $(\frac{a}{2} - b)^2$

6. $(1 + \frac{b}{3})^2$; 7. $(a^2 - \frac{b^2}{2})^2$; 8. $\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{6}x^2\right)^2$

10. $(\frac{n}{3} + m)^2$; 11. $(3n^6 + 7n^3 + 12)(3n^6 - 7n + 12)$

12. $(8a^2 + 5ab^2 - 9b^4)(8a^2 - 5ab^2 - 9b^4)$ 13. $(1 - 13a^2b^4 + 5ab^2)(1 - 13a^2b^4 - 5ab)$

14. $(7c^4 + 12m^2n^2 + c^2mn)(7c^2 + 12m^2n^2 - c^2mn)$

15. $(x^2 + 4xy + 8y^2)(x^2 - 4xy + 8y^2)$; 16. $(a^2 + 6ab + 18b^2)(a^2 - 6ab + 18b^2)$

17. $(25x^4 + 10x^2 + 2)(25x^4 - 10x^2 + 2)$; 18. $(2n^2 + 2n + 1)(2n^2 - 2n + 1)$

19. $(9a^2 + 12ab + 8b^2)(9a^2 - 12ab + 8b^2)$; 20. $(x^2 - y)(x^2 + y)(x^2 - 2y)\ (x^2 + 2y)$

21. $(a^2 + ab - b^2)(a^2 - ab + b^2)$; 22. $(c^2 + 5c - 10)(c^2 - 5c - 10)$

23. $(a^2 + \sqrt{3}a + 2)(a^2 - \sqrt{3}a + 2)$; 24. $(x^2 + x^2 + 2)(x^4 - x^2 + 2)$

25. $(a^2 - ab - b^2)(a^2 + ab - b^2)$; 26. $(a^2 + 3ab + 3b^2)(a^2 - 3ab + 3b^2)$

27. $(x^4 + 2x^2y^2 + 4y^4)(x^4 - 2x^2y^2 + 4y^4)$; 28. $(5a^2 + 4ab + 7b^2)(5a^2 - 4ab + 7b^2)$

29. $(9m^4 - 4m^2 + 1)(9m^4 + 4m^2 + 1)$

30. $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(2a^2 - 7b^2)(2a^2 + 7b^2)$

31. $(5x^2 + 7xy - 9y^2)(5x^2 - 7xy - 9y^2)$

32. $(11x^2 + 8x - 2)(11x^2 - 8x - 2)$; 33. $(5x - y)^2$; 34. $(2a - b + 3)^2$

Ejercicio 2.12

1. $(x+2)(x+5)$; 2. $(x+6)(x+2)$; 3. $(a+3)(a+1)$; 4. $(y+5)(y+4)$

5. $(x-8)(x-1)$; 6. $(x+2)(x+1)$; 7. $(6m+7a)(5m-3a)$ 8. $(2-3a)(5a-2)$

9. $(2x-y)(4x-3y)$; 10. $(2a+3y)(9a-5y)$ 11. $(x+3mn)(4x-5mn)$

12. $(2x^2-7)(7x^2+2)$; 13. $(a+5)(a-7)$; 14. $(a-3)(a-11)$; 15. $(c-14)(c+1)$

16. $(x-6)(x-9)$; 17. $(x+3)(x-20)$; 18. $(m+10)(m-30)$

19. $(m+12)(m-14)$ 20. $(m-25)(m-16)$

21. $(x-14)(x+26)$ 22. $(x+2)(x-2)(x+6)(x-6)$

23. $(x+4)^2(x-4)^2$; 24. $(x^2+17)(x^2-20)$; 25. $(x+4y)(x+8y)$; 26. $(x-3y)^2$

27. $(x+10y)(x-5y)$; 28. $(x+2)(2x-1)$; 29. $(2x+1)(3x+2)$

30. $(3x+2)(4x-3)$; 31. $(y-1)(\mathrm{y}-3)$; 32. $(x+3)(x+7)$; 33. $(\mathrm{m}-11)(\mathrm{m}-1)$

34. $(n+8)(n-2)$; 35. $(y-5)(y+6)$; 36. $(n-10)(n+4)$; 37. $(2a-5)(4a+3)$

38. $(3m+2)(5m-3)$; 39. $(3b-4a)(5a-3b)$ o $-(4a-3b)(5a-3b)$

40. $(7a+5b-6)(7a+5b-5)$; 41. $(2x+3)(2x+13)$

42. $(2x-3y-12)(2x-3y+3)$; 43. $2(3n-1)(6n-5)$; 44. $9(3x+4)(3x-5)$

45. $(9x+y)(x-y)$.

Ejercicio 2.13

1. $(3-x)^3$; 2. $(1-a)^3$; 3. $(1+5x)^3$; 4. $(3m+4n)^3$; 5. $(1-2ab)^3$

6. $(2+3x)^3$; 7. $(a^2+b^3)^3$; 8. $(4x+5y)^3$; 9. $(5x^4+8y^5)^3$; 10. $(m-an)^3$

11. $(x^2+1)(3m-2n)$; 12. $(x^2+y^2)(3ab-2)$; 13. $(4a^2-3m)(ax-b)$

14. $(1-3x^2)(3a-x)$; 15. $(2x+y^2)(xy+z^2)$; 16. $(x-y^2)(5a+n)$

17. $(m^2-3n)(4am-1)$; 18. $(x^2-3)(2ab-1)$; 19. $(a+x)(3a-7b^2)$

20. $(x + y - 2)(3a - 2b)$; 21. $(a^2 - ab + 3b^2)(3a - 1)$

22. $(x^2 - xy - y^2)(3x - 2a)$; 23. $x(1 - x)(1 + x^2)$; 24. $(a + b - 1)(a - b - 1)$

25. $x^2\,(27x^5 - 10x^3 + 15x - 5)$; 26. $x^6(x^9 - x^6 + 2x^3 - 3)$

27. $3a(5a^2b^2 + 3a - 8b^3 - 4b)$; 28. $ax(2x + 2a - 3)$; 29. $(x + a)(a + b)$

30. $(x - 2y)(a - 2b)$; 31. $(5x + 2y)(4a - b)$; 32. $(x^2 - 3)(2ab - 1)$

33. $(a + 1)(a^2 + 1)$; 34. $(x + a)(3a - 7b^2)$; 35. $(m - n + 1)(2a - 1)$

36. $2(x + y - 2)(3m - 2b)$; 37. $(a^2 - ax + x^2)(x - 2y)$

38. $(x^2 + 3y^2 + z^2)(2x - n)$; 39. $(2x + y)(ax + 2x - y)$

40. $(x^2 - 3x + 1)(a^2b^3 - n^4)$; 41. $(4a - 3x - 1)(4a - 3x + 1)$

42. $(a + b + c)(a - b - c)$; 43. $(x + y + m)(x + y - m)$

44. $-(n + 2)(n + 8)$; 45. $-(a + 3n - 1)(a + 3n + 1)$

46. $(x + 2y - 3z)(2x + 4y - z)$;47. $(a + 5m + 1)(a - 5m + 1)$

48. $(a - b - c - d)(a - b + c + d)$ 49. $8x^2y(2xy - 1 - 3x^2 - 5y^2)$

50. $b(a + 1)$.

Ejercicio 2.14

1. $\text{m.c.m.} = (x + 2)(2x - 1)(3x - 2)$ $\quad$ $\text{M.D.C.} = 2x - 1$

2. $\text{m.c.m.} = (a + 3b)(a - 2b)(3a + 2b)$ $\quad$ $\text{M.D.C.} = a - 2b$

3. $\text{m.c.m.} = (x - 2)(x + 3)(x + 1)$ $\quad$ $\text{M.D.C.} = 1$

5. $\text{m.c.m.} = (x - 2)\,(x + 2)(x^2 + 4)(x + 3)$ $\quad$ $\text{M.D.C.} = 1$

6. $\text{m.c.m.} = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^2 + xy + y^2)$ $\quad$ $\text{M.D.C.} = x - y$

7. $\text{m.c.m.} = 960x^3y^3z$ $\quad$ $\text{M.D.C.} = 16xy$

8. $\text{m.c.m.} = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$ $\quad$ $\text{M.D.C.} = 1$

10. $\text{m.c.m.} = (x-1)(x+2)(x-3)$ $\quad \text{M.D.C.} = 1$

13. $\text{m.c.m.} = (y-7)(y+2)^2(y+5)$ $\quad \text{M.D.C.} = y+2$

14. $\text{m.c.m.} = (x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$ $\quad \text{M.D.C.} = x+3$

15. $\text{m.c.m.} = (x-5)(x+5)(x^2+5x+25)$ $\quad \text{M.D.C.} = (x-5)$

16. $\text{m.c.m.} = (x+y)(x^2-xy-y^2)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$ $\quad \text{M.D.C.} = x+y$

17. $\text{m.c.m.} = a^3(a+b)^2(a-b)$ $\quad \text{M.D.C.} = a(a+b)$

19. $\text{m.c.m.} = 2(4y^2+1)(2y+1)(2y-1)(4y^2-2y+1)$ $\quad \text{M.D.C.} = 2y+1$

20. $\text{m.c.m.} = (2a-b)(2a+b)^2\,(4a^2-2ab+b^2)$ $\quad \text{M.D.C.} = 2a+b$

24. $\text{m.c.m.} = (x+3a)^2(x-2a)(x-a)$ $\quad \text{M.D.C.} = x+3a$

29. $\text{m.c.m.} = (a-1)^2(a+1)^2(a-2)$ $\quad \text{M.D.C.} = 1$

30. $\text{m.c.m.} = (x-y)^2(x+y)^2(x-2y)(2x+y)$ $\quad \text{M.D.C.} = 1$

Ejercicio 2.15

1. $\frac{2}{3}\,x^3$
2. $\frac{3a}{2b}$
3. $\frac{-2}{3a}$
4. $\frac{ab}{c^4}$
5. $\frac{2a^5}{9b}$
6. $-\frac{40x^2}{9}$
7. $\frac{3x}{4(x-2)}$
8. $\frac{x+2}{x-2}$
9. $-\frac{2(x^2-2)^2}{3}$
10. $\frac{x+2}{2}$
11. $\frac{3x-1}{3(x-1)}$
12. $x-2$
13. $\frac{2x-1}{2}$
14. $\frac{b+c}{b-c}$
15. $\frac{b}{2a}$
16. $\frac{3b}{2a(a+x)}$
17. $\frac{b^3c}{8(a-b)}$
18. $\frac{3x+5}{x-2}$
19. $\frac{2x+y}{x-4}$
20. $\frac{a+4}{a-2}$
21. $\frac{4n^2-10n+25}{2n-5}$
22. $\frac{x-2}{x-5}$

Ejercicio 2.16

1. $\frac{x+3}{x+2}$
2. $\frac{3x-4}{5x-4}$
3. 1
4. $\frac{x-7}{3x-7}$
5. $\frac{3}{4x}$
6. 2
7. $\frac{x}{2x-1}$
8. $\frac{x}{x-3}$
9. $\frac{x}{x-3}$
10. $\frac{4x}{4x+3}$
11. $\frac{x+3}{x-6}$
12. $\frac{9}{2x+9}$
13. $\frac{7}{10x}$
14. $\frac{15x-20}{2x^2}$
15. $\frac{7}{20}$
16. $-\frac{4}{45x}$
17. $\frac{(x-1)(x+3)}{x-2}$
18. $\frac{4x^2+4x-3}{2x+1}$
19. $\frac{x^2+3}{(x-2)(2x+3)}$
20. $\frac{3x^3-4}{(x-2)(x+2)(3x-1)}$
21. $\frac{x}{x-1}$
22. $\frac{3x-8}{(x-2)(x-4)}$
24. $\frac{2x+5}{(x+1)(x+4)}$
25. $\frac{2}{x+5}$
26. $\frac{2}{x-4}$
27. $\frac{2}{3x-1}$
29. $\frac{3}{2x-1}$
30. $\frac{2}{5}$
31. $\frac{12y^4}{3ab^3}$
34. $\frac{3x}{4}$
35. $\frac{y^3(x-1)}{x+2}$
37. $\frac{(x+2)(x-12)}{(x+4)(x-8)}$
38. $\frac{a}{2x^2}$
40. $\frac{x+3y}{2x-5y}$
41. $\frac{3}{2}$
42. 1
43. $\frac{2}{3x-1}$
44. $x-3$
47. $3(2x+3)$
48. $\frac{9x+2}{2x+1}$
49. $\frac{(x+2)(3x-5)}{(3x+4)(x-1)}$
50. $\frac{2x-3}{2x+5}$
51. $\frac{9}{11}$
52. $\frac{x+6}{3x}$
53. $\frac{3x+4}{3x+8}$
54. $\frac{x-3}{x-4}$
55. $\frac{x-2}{2x-5}$
56. $\frac{2x-1}{2x+1}$
57. $\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x-4)}$
58. $-\frac{4x}{4x^2+1}$
60. $\frac{2xy}{x^2+y^2}$
61. $\frac{x-1}{x+2}$
62. $1-x$
63. x

Ejercicio 2.17

1. a. $9x\sqrt{5x}-11x\sqrt{2x}$.
2. a. $14x$; b. $40x$; c. $90x$; d. $10x\sqrt{6}$; e. $5x\sqrt[3]{2}$; f. $\sqrt{2x^2+2x}$; g. $\sqrt{4x^2-1}$
   h. $\sqrt{4x^2-25}$; i. $x^2-3x+36$; j. $5x$; k. $-2x\sqrt[3]{3}$; l. $3x\sqrt[3]{10x}$
   m. $3\sqrt[4]{x^3}$; n. $3x\sqrt[6]{3x^4}$; o. $2x\sqrt[4]{x}$.
3. a. $9-x$; b. $4-x$; c. $x-1$ d. $\sqrt[3]{x^2}-81$; e. $3x\sqrt{x}+7x\sqrt{7}+14\sqrt{x}$
   f. $12x-25\sqrt{3x}+36$; g. $1+x$; h. $1+2\sqrt{x}+x$; i. $24-4\sqrt{6x}+x$

j. $2 + \sqrt{x}$; k. $x + 125$; l. $2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x - 6}$;

m. $50x - 242 + 14\sqrt{x^2 - 2x - 15}$; o. $1 + \frac{\sqrt[7]{x}}{x}$; p. $2.\sqrt{4 - x^2}$

q. $\frac{(x+1)\sqrt{a}}{b-a}$; r. $\frac{1}{a-b}$; s. $\frac{5x^2 - 8x - 4}{2\sqrt{x+1}}$.

4. a. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}$; b. $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$; c. $\sqrt{x} + 2$; d. $\sqrt{x-2}$

e. $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4$; f. $\sqrt[3]{(x+2)^2}$; g. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}$;

h. $\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}$; i. $\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{2x^2} + \sqrt[4]{4x} + \sqrt[4]{8}$;

j. $\sqrt[4]{(x-2)^3}$; k. $\sqrt[3]{(2+\sqrt{x})^2}(2-\sqrt{x})$ l. $\sqrt[7]{x^4}$

5. a. $\frac{3.\sqrt{x+3}}{x+3}$; b. $\frac{\sqrt[4]{4x^3}}{x}$; c. $\frac{2.\sqrt{6x}}{3x}$; d. $\frac{\sqrt[7]{5.3^6x^3}}{3x}$; e. $\frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1-x}$;

f. $\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}}{x+2}$; g. $-(\sqrt{x} + 3)$; h. $(x^2 + 9x + 81)(\sqrt{x} + 3)$;

i. $(x + 1)(\sqrt{x} + 1)$; k. $\sqrt[3]{(3 + \sqrt{x})^2}\,(\sqrt{x} - 3)$; l. $\frac{1 - \sqrt{1 - a^4}}{a^2}$;

m. $(2x + 1)(\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{2x} + 1)$.

6. a. $\frac{1}{2\sqrt{x}+3}$; b. $\frac{x-1}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)}$; c. $-\frac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}}$; d. $-\frac{1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}$

f. $\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$; g. $\frac{1}{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt{a}}$

Recapitulación

1. $(m - 45)(m + 15)$; 2. $8(x - 6)(2x + 11)$; 3. $(5c - 3)(5c - 6)$; 4. $(x - 5)(x + 6)$

5. $(x - 6y)(x + 5y)$; 6. $6(x + 1)(x + 4)$; 7. $7(x - 2)(x + 3)$; 8. $b(x + 5)(x + 9)$

9. $y^2(x + 3)(x - 5)$; 10. $(xy + 2)(xy + 16)$; 11. $(xy + 9)(xy - 5)$

12. $(x^2 + 3)(x^2 + 4)$; 13. $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 8)$; 14. $(x^2 - 6)(x + 1)(x - 1)$

15. $(x - 3)(x - 1)(x + 1)(x + 3)$; 16. $(7m - 6)(7m - 10)$

17. $(5w + 4)(5w + 8)$; 18. $(a^2 + 1)(4a - 1)$; 19. $(x - y)(x + y)$

20. $(a - 2\sqrt{10})(a + 2\sqrt{10})$; 21. $(1 + 2m)(1 - 2m)$; 22. $(a + 5)(a - 5)$

23. $(2a+3)(2a-3)$; 24. $(1+7ab)(1-7ab)$; 25. $(ab^4-c)(ab^4+c)$

26. $(a^5+7b^6)(a^5-7b^6)$; 27. $(10mn^2+13y^3)(10mn^2-13y^3)$

28. $(14xy^2+15z^6)(14xy^2-15z^6)$; 29. $(1+3ab^2c^3d^4)(1-3ab^2c^3d^4)$

30. $(\frac{1}{2}+3a)(\frac{1}{2}-3a)$; 31. $(\frac{1}{4}+\frac{2x}{7})(\frac{1}{4}-\frac{2x}{7})$; 32. $(\frac{x^2}{10}+\frac{yz^2}{9})(\frac{x^2}{10}-\frac{yz^2}{10})$

33. $(2x^n+\frac{1}{3})(2x^n-\frac{1}{3})$; 34. $(4x^{3m}+\frac{y^n}{7})(4x^{3m}-\frac{y^n}{7})$; 35. $(a^nb^{2n}+\frac{1}{5})(a^nb^{2n}-\frac{1}{5})$

36. $(a+b+x)(a+b-x)$; 37. $(m+n\ +1)(m+n-1)$; 38. $(n+3+c)(n+3-c)$

39. $(a-2+3b)(a-2-3b)$; 40. $(a-3y+2x)(a-3y-2x)$

41. $(3x-4a+1)(3x-4a-1)$; 42. $(a+b+c)(a-b-c)$

43. $(m+x+y)(m-x-y)$; 44. $(3a+n+5)(3a-n-5)$

45. $(1-a-3n)(a+3n+1)$; 46. $(3x+3a-2m)(3x-3a+2m)$

47. $(5m+a+1)(5m-a-1)$; 48. $(a-b+c+d)(a-b-c-d)$

49. $(a+2b+x+y)(a+2b-x-y)$; 50. $(m+3n+x+2a)(m+3n-x-2a)$

51. $(a+m+x+3)(a+m-x-3)$; 52. $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2-2x-y)$

53. $(x+\mathrm{y}+3)(x-\mathrm{y}+1)$; 54. $(2a-7b+3x+5\mathrm{y})(2a-7b-3x-5y)$

55. $(x+2a+2b)(2b-x)$; 56. $(m+3n+x+2a)(m+3m-x-2a)$

57. $(m+a+1)(m-a-1)$; 58. $(4a-3x+5m+1)(4a-3x-5m-1)$

59. $(8w-3b+7x-5y)(8w-3b-7x+5y)$; 60. $(x+2+y+z)(x+2-y-z)$

61. $(a-b+7x)(a-b-7x)$; 62. $(m-n+1)(m-n-1)$

63. $(c+n-3)(c-n+3)$; 64. $-(x+5\mathrm{y}^2)^2$; 65. $(a-b)(4ax+4bx-a^2-ab-b^2)$

66. $(n^2+nm+m^2)(n^2-nm+m^2)$; 67. $(2a-3b)^2$

68. $(5a^2+4ab+7b^2)(5a^2-4ab+7b^2)$

69. $(x^2+4x\mathrm{y}+8y^2)(x^2-4xy+8y^2)$; 70. No es cubo perfecto; 71. $-2y(3x^2+y^2)$

72. $a(a^2-3ab+5b^2)$; 73. $(x+1)(x+2)(x-2)$; 74. $x(x+1)(x-1)(x^2+2)$

75. $(6x^2+5xy-7y^2)(6x^2-5xy-7y^2)$; **76.** $(2x^4+2x^2y^2+y^4)(2x^4-2x^2y^2+y^2)$

77. No es cubo perfecto.; **78.** $(2m-5)(m^2-5m+7)$

79. $(x^4+2x^2y^2-y^4)(x^4-2x^2y^2-y^4)$; **80.** $(a+1)(a-1)^2$

81. $a(a+1)(a-1)(a+2)$; **82.** $(9\mathrm{m}^4+4\mathrm{m}^2+1)(9\mathrm{m}^4-4\mathrm{m}^2+1)$

83. $(\mathrm{a}^2+6\mathrm{ab}+18\mathrm{b}^2)(\mathrm{a}^2-6\mathrm{ab}+18\mathrm{b}^2)$; **84.** $(5\mathrm{a}+2\mathrm{b})^3$; **85.** $5x(7x^2+3x\mathrm{y}+3\mathrm{y}^2)$

86. $(x^2+7)(x^2-3)$; **87.** $(x+\mathrm{y})(x+1)(x-1)$; **88.** $x(x^2+1)(x+1)(x-1)$

89. $(c^2+5c-10)(c^2-5c-10)$; **90.** $(2m^2+6mn+9n^2)(2m^2-6mn+9n^2)$

91. $(2+3x)^3$; **92.** $(3a+b)(3a^2+6ab+7b^2)$; **93.** $(x+1)(a-b+c)$

94. $(a+b)(a-b)(a+b-1)$; **95.** $(x^4+2)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

96. $(2a^4+5a^2b^2-7b^4)(2a^4-5a^2b^2-7b^4)$; **97.** $(2+10x^2+25x^4)(2-10x^2+25x^4)$

98. $(a^2+b^3)^3$; **99.** $(4m+4n-5)(16m^2+32mn+16n^2+20m+20n+25)$

100. $(n+7)(n-6)$; **101.** $x(x^2+1)(x-1)$; **102.** $a(a+1)(a+3)(a-3)$

103. $(8n^2+6n+7)(8n^2-6n+7)$; **104.** $(8+4a^3+a^6)(8-4a^3+a^6)$

105. $(a^6+1)^3$; **106.** $(3a+x-2)(3a-x+2)$

107. $(5x^2+7x\mathrm{y}-9\mathrm{y}^2)(5x^2-7x\mathrm{y}-9\mathrm{y}^2)$

108. $(1+2n+2n^2)(1-2n+2n^2)$; **109.** $(m-an)^3$; **110.** $(1+3x-4y)(1-3x+4y)$

111. $x(3x+1)(1-6x)$; **112.** $(7x^4+8x^2y^2+10y^4)(7x^4-8x^2y^2+10y^4)$

113. $(8x^4+4x^2y^2+y^4)(8x^4-4x^2y^2+y^4)$; **114.** $(1+6a^2b^3)^3$; **115.** $(a^2+9)(a^2-2)$

116. $(b-1)(x+1)(x-1)$; **117.** $(2+8x-11x^2)(2-8x-11x^2)$

118. $(9a^2+12ab+8b^2)(9a^2-12ab+8b^2)$; **119.** $(4x^3-5y^4)^3$; **120.** $(x+y)(x+y+1)$

121. $x^2(x^n+y^n)(x^n-y^n)$; **122.** $(11x^2+xy^2-6y^4)(11x^2-xy^2-6y^4)$

123. $(2+a-b)(2-a+b)$; **124.** $3a(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

125. $(x-\mathrm{y})(x^2+x\mathrm{y}+\mathrm{y}^2+1)$; **126.** $(a-b)(\mathrm{a}^2+ab+b^2+a+b)$; **127.** $-\frac{2x+1}{x+2}$

128. $\frac{a+2}{m-n}$; 129. $\frac{1}{x+y}$; 130. $-\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$; 131. 3; 132. $-\frac{2x}{3y}$; 133. -1

134. $-\frac{n+1}{n-2}$; 135. $\frac{x-2}{2}$; 136. $\frac{x-1}{x+3}$; 137. $\frac{x+3}{x-4}$; 138. $\frac{x-1}{x+1}$; 139. $\frac{6x+1}{6x+5}$; 140. $-\frac{x+6}{x+8}$

141. $\frac{3x^2-4}{x^2-2}$; 142. $\frac{x+2}{x-2}$; 143. $-\frac{2(x-2)^2}{3}$; 144. $\frac{27}{25}$; 145. $\frac{2a^2b}{3}$; 146. $\frac{3y^4}{2a^2b^5x}$; 147. $\frac{4}{b^2}$

148. $\frac{y^4}{a^3x}$; 149. $\frac{3xy}{x-y}$; 150. $\frac{x+4}{x+1}$; 151. $\frac{x-1}{x+4}$; 152. 1; 153. $\frac{2x-1}{3x-2}$; 154. $-\frac{x-2}{x+2}$

155. $-\frac{x-y}{2x+y}$; 156. $\frac{(3x+2)(3x+1)}{(3x-2)(x-5)}$; 157. $\frac{2x-3}{4x-9}$; 158. $\frac{12x^3-12x^2-7x-3}{(x-1)(3x-1)(4x+1)}$; 159. $\frac{1}{a^4+a^2+1}$

160. 0; 161. 0; 162. 1; 163. 0; 164. $\frac{(x-y+z)^2}{y}$; 165. $\frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}$; 166. $\frac{x+y}{xy}$

167. $\frac{3(x+9)}{(x-3)(x+3)^2}$; 168. $\frac{-20}{(x+5)(x-5)}$; 169. $x-3$ 170. $\frac{2(n^2+4)}{n+2}$; 171. $\frac{x+2}{(x-2)(2x-3)}$.

Capítulo 3

Ejercicio 3.1

1. a. $x=19/3$; b. $x=-3$; c. $x=-9/5$; d. $x=-3$; e. $x=9/2$; f. No tiene solución; g. $x=-2$; h. $x=-7$; i. $x=-6$; j. $x=15/4$; k. $y=1/3$; l. $x=5$; m. $x=-11/7$; n. $x=6/5$.
2. a. $x=8$; b. $x=93/20$; c. $z=1/10$; d. $x=-37$; e. $x=5$; f. $x=5/9$; g. $x=-16$; h. $x=-69/28$; i. $-0{,}11$; j. $x=-7/3$; k. $x=5/2$; l. $x=-1$ m. $x=19/2$; n. $y=5/3$; o. $x=3.768/125$; p. $x=-\frac{38}{73}$; q. $y=3$; r. $x=1/11$
3. a. i. $x=61/3$; ii. $x=-5$; iii. $x=7$; b. i. $w=-11/7$; ii. $w=-23/7$; c. i. $x=36/26$; ii. $3/2$.
4. a. $x=\frac{2}{3}$; b. $x=3a$; c. $\frac{5a+2b}{3b-2b}$; d. $x=2a$; e. $x=-\frac{1}{n}$; f. $x=\frac{a-b}{6}$; g. $x=\frac{d-b}{a+c}$ h. $x=\frac{c}{a+b}$; i. $x=4a$; j. $x=\frac{2ab}{a+b}$.
5. a. $y=\frac{b(b-6n)}{4}$; b. $y=a+b$; c. $\frac{a^2-2ab-b^2}{2(a+b)}$; d. $y=a+2b$; e. $y=\frac{b}{c-a}$; f. $y=-\frac{7a+4b}{2a-5b}$.
6. a. $b=\frac{2A}{h}$; b. $t=\frac{A-p}{pr}$; c. $r=\frac{I}{pt}$; d. $k=v-gt$; e. $g=\frac{2h}{t^2}$; f. $m=\frac{Fd^2}{kM}$ g. $C=\frac{5(F-32)}{9}$; h. $a=\frac{S(1-r)}{1-r^n}$; i. $b=\frac{2a-ch}{h}$; j. $n=\frac{L-a+d}{d}$; k. $t=\frac{rs}{s-r}$; l. $x=\frac{b+2d}{2c-a}$.
7. a. Si; b. Si; c. No.

8. a. $x = 1, x = 6$; b. $x = 3, x = -5$; c. $x = 1, x = 11/5$; d. $x = 1, x = -4$
   e. $x = 2, x = 1$; f. $x = 1, x = -6$; g. $x = -4, x = 4/5$; h. $x = -3/4$,
   $x = 7/10$; i. $x = -5/3, x = 7/3$; j. $x = 1, x = -1/5$; k. $x = 3, x = -3$;
   l. $x = 1, x = 7$; m. $x = -1, x = 5$; n. $x = 0,\ x = -3/4$; o. $x = 1/4, x = 3/4$;
   p. $x = 3/2$; q. $x = 1, x = 1/4$; r. $x = -1, x = -2$; s. $x = 12x = 36/5$;
   t. $x = -13/6, x = 17/8$; x. $x = 1, x = 9$; y. $x = 7, x = -1/3$; z. $x = 8/3$;
   *. $x = \text{a}, x = \text{b}$

Ejercicio 3.2

1. a. $x = 2r + 3$; b. $y = 3z + 5$; c. $10.000(1 + x/100)$; d. $P(1{,}045)$;
   e. $(0{,}995)F$; f. $3M - 6$; g. $3x$; h. $0{,}9x$; i. $(0{,}08)C$.
2. a. $\frac{x-2}{x}$, donde x es el denominador; b. $7x/40$, x el total del trabajo;
   c. $7(1/30 + 1/x)$.
3. a. Si; b. Si; c. Si; d. No, es 21 ms;
   e. No, se incremento en 33, cm^2 sino en 42 cm^2, por lo tanto el cuadrado no es de 20 cm de lado. h. Si; i. Si; j. Si; k. Si; l. Si; m. Si; n. Si.

Ejercicio 3.3

1. a. 27; b. 25; c. 6; d. 25; e. 42; f. 84.
2. a. 50 y 200; b. 750 y 150; c. 200 y 40; d. 100 y 35; e. 200 y 150; f. 500 y 300; g. 60 y 40; h. 32 y 7; i. 15 y 16; j. 20 y 22; k. 20 y 28
3. a. 179, 180 y 181; b. 168, 170, 172; c. 12, 24 y 8 d. 13, 26 y 39; e. 30, 28 y 36 f. 12, 13 y 14.
4. a. 67; b. 31.
5. a. 258; b. 758; c. 478.
6. a. 21 de \$100 y 26 de \$50; b. 14 de \$1.000, 7 de \$5.000 y 5 de \$10.000; c. 20 de \$50, 40 de \$100 y 35 de \$200:
7. a. 54 millones en bonos y 30 millones en acciones; b. \$200'000.000 en bonos y \$200'000.000 en acciones; c. 9,39%.
8. a. 26.500 boletas de \$1.600 y 8.500 boletas de \$2.600;
   b. 11.000 boletas de \$2.800, 16.000 de \$2.000 y 31.000 de \$1.200.

9. a. Altura = 40 cms., Base =50 cms.; b. Altura = 23 ms., Base =50 ms.; c. 14 cms.; d. Altura = 42 cms., Base = 84 cms.

Ejercicio 3.4

1. a. $x = 1, x = 2$; b. $y = \frac{-1+\sqrt{240}}{3},\ y = \frac{-1-\sqrt{240}}{3}$; c. $x = 2, x = 3$; d. $x = -3$, $x = 4$; e. $x = -2, x = 5$; f. $x = 7, x = 1/4$; g. $x = (2 \pm \sqrt{5})/3$; h. $x = 0$, $x = -4$; i. $x = a/b, x = b/a$; j. $x = b \pm \sqrt{a}$.
2. a. $x = -3, x = 4$; b. $z = 1/2, z = -2/3$; c. $x = (-5 \pm \sqrt{13})/2$; d. $x = 1 \pm \sqrt{2}$; e. $x = 4 \pm \sqrt{13}$; f. $x = (-7 \pm \sqrt{69})/2$; h. $x = -2 \pm \sqrt{21}/3$; g, i, j. No tienen solución real.
3. En $(a-b)(a^2+ab+b^2) = b(a+b)(a-b)$ no podemos aplicar la cancelativa dividiendo entre $(a-b)$ porque $a = b$, es decir, $a - b = 0$
4. a. $x^2 + 2x - 15 = 0$; b. $3x^2 + x - 2 = 0$; c. $x^2 + 10x + 25 = 0$; d. $x^2 - 4x + 2 = 0$; e. $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$; f. $bx^2 + (a - 2b^2)x - 2ab = 0$; g. $x^3 - 3x + 2 = 0$.
5. a. Sólo $x = 2$ satisface la ecuación; b. $x = 2$; c. $x = 0, x = 3$; d. $x = 2$; e. $x = 6$; f. $x = \frac{16}{25}$; g. $x = 5$; h. $x = 1, x = -3$; i. $x = 3$; j. $x = 1$.

6. a. 20 y 12; b. 10 y 7; c. 25 y 5; d. 6 y 4; e. 8 y 6.
7. 10 cuadernos; 8. $\$100.000$; 9. 40 días.
10. a. Base $= 20$, Altura $= 16$; b. Base $= 35$, Altura $= 16$. c. Base $= 20$, Altura $= 10$; d. Base $= 8$, Altura $= 6$.
11. $\$27.500$; 12. 70 k/h; 13. $\$80$.
14. A tarda 15 hs. y B tarda 10 hs.; 15. A tarda 24 hs. y B tarda 8 hs.

15. 24 horas A, 8 horas B
16. La distancia de los lados paralelos es $x = \frac{500}{\pi}$
17. El radio es de $r = \sqrt{5}$
18. La medida de los catetos son: 212.06 y 65.88 mts.
19. Las longuitudes son 16 cm para el cuadrante y 3 para el triángulo.
20. Las dimensiones de la caja son 7,5 y 12 mts.

Ejercicio 3.5

1. a. [2,3]; b. $(-\infty, 2)$; c. $[-2, 5)$; d. $[10, \infty)$ e. $(6, 13]$; f. $(-\infty, -9]$; g. $\{\}$
   h. $(-8, 2)$; i. $\{9\}$; j. $\{\}$.
2. a. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$; b. $\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -5\}$; d. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\}$;
   e. $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq -2\}$; f. $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 5\}$; g. $\{5\}$.
3. a. $[-\infty, 5)$; b. $(-2, -1)$; c. $(1,6]$; e. $(-\infty, 3] \cup (8,\infty)$; d. $(-1,1)$; f. Φ.
4. a. $[1,2]$; b. $(-5, \infty)$; c. $\mathbb{R}$; d. Φ; e. $(-1,1)$; f. $(-\infty, 8)$; g. $(-5, 5)$; h. $[3, \infty)$
5. a. $(-\infty,1) \cup [2,\infty)$; b. $(-\infty, -4)$; c. $[3,10]$; d. $(0,7)$; e. $(2, \infty)$; f. $[3, 12) - \{9\}$.

Ejercicio 3.6

1. a. $(-\infty, 7]$; b. $(-\infty, 0) \cup (20/3,\infty)$; c. $(-5/9, \infty)$; d. $(-\infty, -27/13)$;
   e. $(-\infty, 38/7)$; f. $(-\infty, 56/3]$; g. $(-\infty, 2)$.
2. a. $(3, 5)$ b. $(3, \infty)$; c. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; d. $(-5, -2) \cup (4, 7)$
3. a. $(-\infty, -7] \cup [2, \infty)$; b. $(-1, 9/2)$; c. $(-\infty, -1/2) \cup (6/5, \infty)$;
   d. $[-5/3, 5/2]$; e. $(-\infty, -8] \cup [0, \infty)$; f. $(-\infty, 0) \cup (7/2, \infty)$;
   g. $(-\infty, -0] \cup [2/3, \infty)$; h. $(-3, 7)$; i. $\mathbb{R} - \{7/5\}$; j. $(-8, 1)$;
   k. $(-2, 5)$; m. $[-5/2, 4]$; n. $(-3, 5/4)$; o. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$;
   p. $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$; q. $(-1, 0) \cup (1, \infty)$; r. $(0, +\infty) = \mathbb{R}^+$
4. a. $(-\infty, -3) \cup (8, \infty)$; b. $(-\infty, -7) \cup [3, \infty)$; c. $(0, 5/2]$;
   d. $(-\infty, -26] \cup (-8, \infty)$; e. $[-4, 1)$; f. $(-10, -4] \cup [2, \infty)$;
   g. $(-2, \infty)$; h. $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$; i. $\{0\} \cup [\frac{4}{3}, \infty)$; j. $\mathbb{R}^+$;
   k. $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{5}, \infty)$; l. $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$; m. $(-3, -\frac{1}{2}) \cup (0,\infty)$
5. a. $(-\infty, -5/2) \cup (-1, 2) \cup (13/6, \infty)$; b. $(-\infty, 1) \cup [2, \frac{7}{2})$;
   c. $(-\infty, 1) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$.
6. a. $(-\infty, 1]$; b. $[-8, \infty)$; c. $(-2,\infty)$; d. $[-2,\infty)$; e.$(-\infty, -3]$; f.$(7, \infty)$;
   g. $[-11, \infty)$; h. $(2, \infty)$; i. $[-5, \infty)$; j. $(-\infty, -3]$.

Ejercicio 3.7

1. a. 11; b. 27; c. 9; d. -1; e. -2; f. 64; g. 12; h. 72; i. 2; j. 4; k. 30; l. 1;
   m. 1; n. 2; o. 18.

2. a. $\{5, 1\}$; c. $\{2/3, -4/3\}$; d. $\{4, -6\}$; e. $\{1, -8\}$; f. $\{-4, 8\}$; h. $\{-1/8, -13/8\}$; i. $\{1, -7/3\}$.

3. a. $(1,5)$; b. $(1, 5)$; c. $(-6,4)$; d. $(-\infty, 6) \cup (4, \infty)$; e. $(-8, 1)$ i. $(-\infty, 1] \cup [7/3, \infty)$; j. $[2, 1]$; k. $[-19/2, 29/2]$-

4. Demuestre que $|x|^2 = x^2$

Demostración

Si $x \geq 0$ tenemos que $|x| = x$ por lo tanto $|x|^2 = x^2$

Si $x < 0$ tenemos que $|x| = -x$ por lo tanto $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$

Ejercicio 3.8

1. a. $(1,5)$; b. $(-4, -1)$; d. $(-\frac{13}{5}, -\frac{11}{5})$; e. $(-\infty, \infty)$; f. $[0, +\infty)$; h. $(1,\infty)$ m. $(-\infty, \frac{9}{11}) \cup [\frac{5}{3}, \infty)$ o. $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$; p. $(-\infty, \frac{47}{12}) \cup (\frac{47}{12}, \infty)$; r. $[2,3] \cup (3,\infty)$; y. $(-\infty, -\frac{15}{4}) \cup (\frac{25}{4}, \infty)$.

Ejercicio 3.9

1. 1.469 o más; 2. $x < 55$; 3. $200 < x < 1.000$; 4. $x \geq 500$

5. $x \geq 357.142$; 6. $x \geq 200$; 7. $x \geq 12.000$; 8. $x > 5.555$

Ejercicio 3.10

1. a. Si $x = 0, y = 3$, Si $x = 3, y = -3$, Si $x = 5, y = -7$

5. a. 190 y 110; b. 320 y 80; c. 50 y 30.

6. a. Compatible, $x = \frac{7}{3}, y = \frac{1}{3}$; c. Compatible, $x = \frac{24}{5}, y = \frac{1}{5}$
   d. Compatible, $x = 0, y = 0$; e. Incompatible.

Ejercicio 3.11

1. a. $x = 1, y = 1$; b. $x = 0, y = \frac{7}{4}$; c. $x = 3, y = -1$

2. d. $x = 3, y = 4$; e. $x = -2, y = 0$; f. $x = -\frac{137}{161}, y = \frac{277}{161}$
   g. $x = 1, y = 1$; h. $x = 2, y = -3$; i. $x = a, y = -\frac{b}{a}$;
   j. $x = 1, y = 1$; k. $x = 2, y = 7$; l. $x = 0, y = 0$; m. $x = a, y = b$;
   n. $x = b, y = -a$

3. a. $x = 1,\ y = 1$; b. $x = 3,\ y = 2$; c. $x = 0,\ y = 2$; d. $x = -1, y = 3$;
   e. No tiene; f. $x = 3,\ y = 1$.
4. a. Sí; b. Sí; c. No; e. Sí; f. Sí \$ 500 000 al 20% y \$ 400 000 al 25%; j. Sí;
   k. Sí

Ejercicio 3.12

5. d. $x = 1, y = 2, z = 3$; e. $x = -2,\ y = 2, z = -4$;
   f. $x = 5, y = -6,\ z = -83$; g. $x = \frac{1}{5}, y = -2,\ z = 6$;
   h. $x = 6, y = 12, z = 18$; i. $x = 30, y = 12, z = 24$;
   j. $x = 10,\ y = 12, z = 6$; k. $x = 6, y = 4, z = 2$
6. a. $x = -2, y = -3, z = 4, u = 5$;
   b. $x = -3, y = 4, z = -2,\ u = 5$;
   c. $x = 1, y = 2, z = 3,\ u = 4$;
   d. $x = 2, y = -3, z = 1, u = -2$;
   e. $x = 2, y = 3, z = 4, u = 1$;
   f. $x = 4, y = -5, z = 3, u = -2$;
   g. $x = 3, y = -4, z = 1, u = -2$;
   h. $x = 3, y = -1, z = 2, u = -2$

Ejercicio 3.13

1. a. 3 y 6; b. 27 y 45; c. $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{20}$; d. 73; e. 45
2. c. $\frac{4}{6}$

Capítulo 4

Ejercicio 4.1

1. a. $D(f) = R;\ R(f) = \left\{-2\right\} \cup (2, 3]$ b. $D(f) = (-3{,}6);\ R(f) = (-3{,}3)$
3. a. $D(f) = (-\infty{,}0) \cup (0, \infty)$; $R(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
   b. $D(f) = [-4{,}\infty)$; $R(f) = [0{,}\infty)$;
   c. $D(f) = (-\infty{,}0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$; $R(f) = [-\ 8\ , \infty)$;

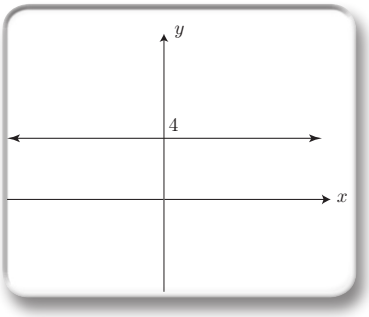
d. $D(f) = [-1,1]$; $R(f) = [0,1]$;

e. $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$; $R(f) = [-1, \infty)$;

f. $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; $R(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$;

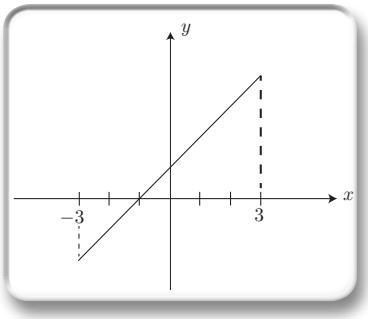
g. $D(f) = R$; $R(f) = [4, \infty)$; h. $D(f) = R$; $R(f) = [-2, \infty)$.

5. a. $D(f)=R$;



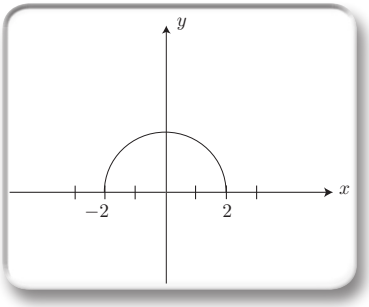
Gráfica a

d. $D(f)=[-3,3]$



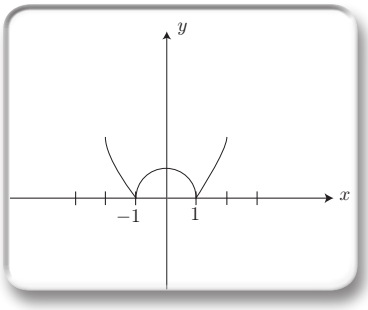
Gráfica d

f. $D(h)=[-2,2]$;



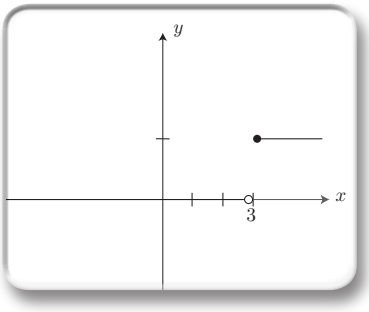
Gráfica f

j. $D(r)=R$



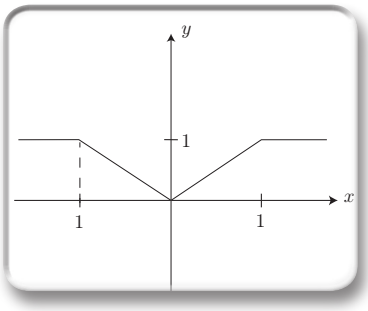
Gráfica j

i. $D(f)=R$;



Gráfica i

n. $D(f)=R$



Gráfica n

Ejercicio 4.2

1. a. $f(7) = -40$; b. $g(5x) = \sqrt{10x-7}$; c. $h(3a+2) = 15a+10$;
   d. $g(x^2+3) = \sqrt{2x^2-1}$; e. $g(f(x+5)) = \sqrt{-(2x^2+20x+75)}$
3. a. $(f+g)_{(3)} = k+2$; $(f-g)_{(2)} = -k+15$; $(f.g)_{(-2)} = k+6$; $(\frac{f}{g})_{(-5)} = \frac{-5}{k+15}$;
   b.$(f+g)_{(x)} = -x+5+k$; $(f-g)_{(x)} = 5x+5-k$;
   $(f.g)_{(x)} = -6x^2-15x+2xk+5k$; $(\frac{f}{g})_{(x)} = \frac{2x+5}{k-3x}$
5. a.$(f+g)_{(x)} = x^2+x-5$; b. $(f-g)_{(x)} = -x^2+x-9$;
   c. $(f.g)_{(x)} = x^3-2x^2+7x-14$; d. $(\frac{f}{g})_{(x)} = \frac{x^2-2}{x^2+7}$

Ejercicio 4.3

1. a. $(fog)_{(2)} = 2$; b. $(fog)_{(3)} = 5$; c. $(fog)_{(5)} = 4$; d. $(fog)_{(4)} = 2$;
   e. $(fog)_{(6)} = 3$; f. $(fog)_{(2)} = 6$; g. $(fog)_{(3)} = 5$; h. $(fog)_{(5)} = 5$;
   i. $(fog)_{(4)} = 2$; j. $(fog)_{(6)} = 3$
3. $k = -\frac{7}{2}$
5. a. $(fog)_{(x)} = -5x+7$ y $(gof)_{(x)} = -15x-3$;
   b. $(f.g)_{(x)} = -15x^2+x+2$ y $(g.f)_{(x)} = -15x^2+x+2$; c. $= \frac{1}{3}$
7. a.$g(z) = g(f(x)) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} + 273$; donde $x =$ °F (grados Farhenheith)
   b.$V\ t) = \frac{4}{3}\pi[t\ + 3\sqrt{2}\,t^{\frac{5}{2}} + 6t^2 + (2t)^{\frac{3}{2}}]$

Ejercicio 4.4

3. a. Si $f(x_1) = f(x_2)$, $\Rightarrow$, $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$, $\Rightarrow$, $2x_1 = 2x_2$, $\Rightarrow$, $x_1 = x_1$;
   inversa; $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$
   b. Si $f(x_1) = f(x_2)$, $\Rightarrow$, $\frac{x_1-3}{x_1+3} = \frac{x_2-3}{x_2+3}$, $\Rightarrow$, $x_1x_2 - 3x_2 + 3x_1 - 9 =$
   $x_1x_2 - 3x_1 + 3x_2 - 9 \Rightarrow 3x_1 + 3x_1 = 3x_2 + 3x_2$, $\Rightarrow$, $6x_1 = 6x_2$, $\Rightarrow$,$x_1 = x_2$
   $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$, $\Rightarrow$, inversa; $f^{-1}(x) = \frac{3x+3}{1-x}$
   c. Si $f(x_1) = f(x_2)$, $\Rightarrow$, $\sqrt{2+5x_1} = \sqrt{2+5x_2}$; $2+5x_1 = 2+5x_2$
   $5x_1 = 5x_2$, $\Rightarrow$, $x_1 = x_2$; inversa; $f^{-1}(x) = \frac{x^2-2}{5}$
   d. Si $f(x_1) = f(x_2)$, $\Rightarrow$, $x_1^2 = x_2^2$; $\Rightarrow$, $x_1 = x_2$;
   inversa; $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

5 a. Si $f(x_1) = f(x_2)$, $\Rightarrow$, $\frac{1+x_1}{3-x_1} = \frac{1+x_2}{3-x_2}$, $\Rightarrow$,

$(1 + x_1)(3 - x_2) = (1 + x_2)(3 - x_2)$, $\Rightarrow$,

$3 - x_2 + 3x_1 - x_1x_2 = 3 - x_1 + 3x_2 - x_1x_2$, $\Rightarrow$, $3x_1 + x_1 = 3x_2 + x_2$, $\Rightarrow$,

$4x_1 = 4x_2$, $\Rightarrow$, $x_1 = x_2$

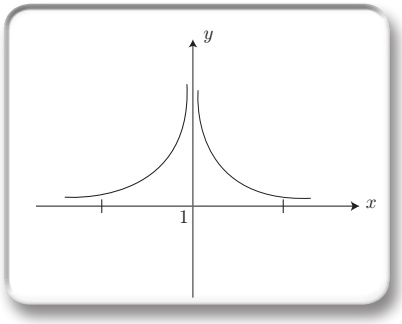
b. Inversa; $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

c. $(f^{-1}of)_{(x)} = f^{-1}(f_{(x)}) = f^{-1}(\frac{1+x}{3-x})$, $\Rightarrow$, $\frac{3(\frac{1+x}{3-x})}{(\frac{1+x}{3-x})+1} = \frac{\frac{3+3x-3+x}{3-x}}{\frac{1+x+3-x}{3-x}} = \frac{4x}{4} = x$

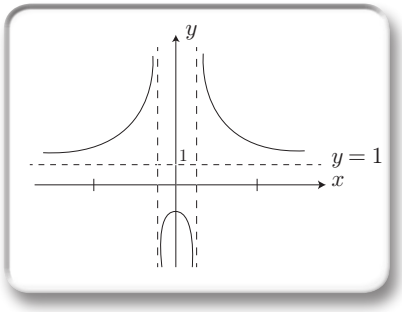
d. $Df = (-\infty, 3) \cup (3,\infty)$ y $Rf = (-\infty, -1) \cup (-1,\infty)$

Ejercicio 4.5

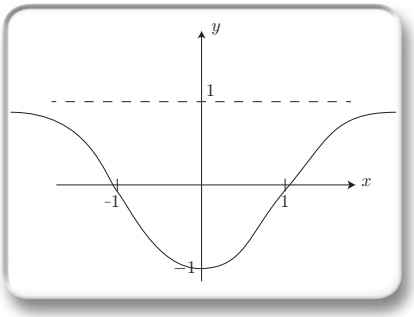
e. $Df = \mathbb{R} - [0]$, asíntota vertical en $x = 0$, asíntota horizontal en $y = 0$.



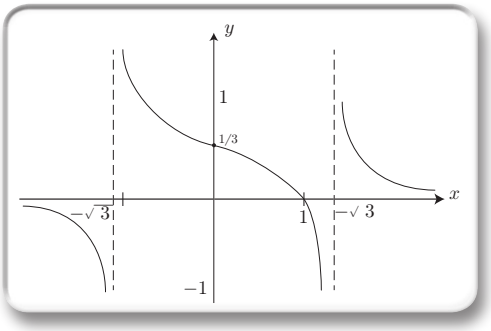
f. $Df = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$, asíntotas verticales en $x = \pm 1$, asíntota horizontal en $y = 1$.



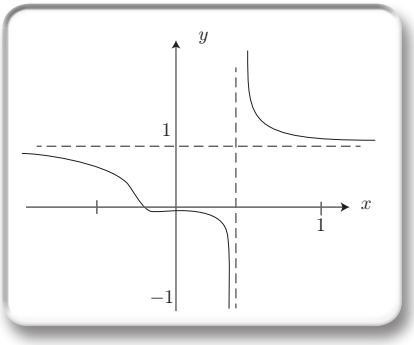
g. $Df = \mathbb{R}$, asíntota horizontal en $y = 1$, intersectos con eje x en $x = \pm 1$, intersecto con el eje y en $y = -1$



j. $Df = (-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$; asíntotas verticales en $3\ x = \pm\sqrt{3}$ intersectos con eje x en $x = 1$, intersecto con el eje y en $y = -\frac{1}{3}$.

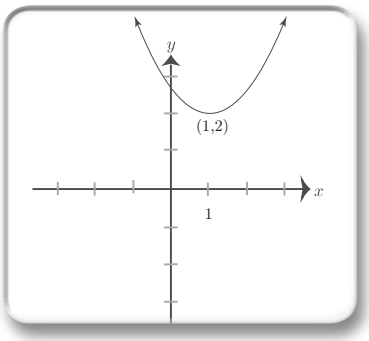


l. $Df = \mathbb{R}-\{1\}$, asíntota vertical en $x = 1$ asíntota horizontal en $y = 1$, intersecto con eje x en $x = 0$, Intersecto con el eje y en $y = 0$

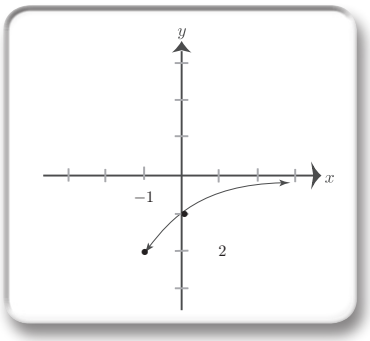


Ejercicio 4.6

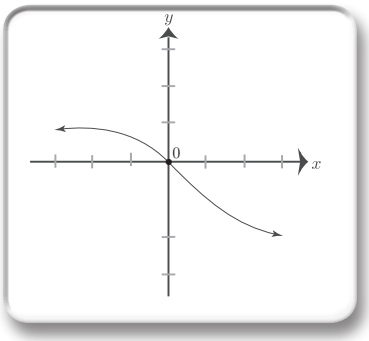
1.



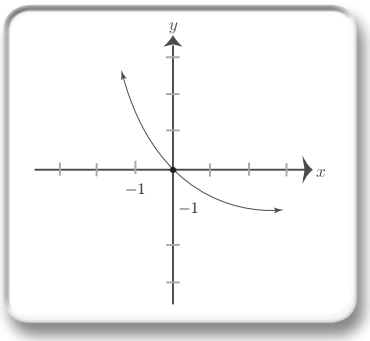
3.



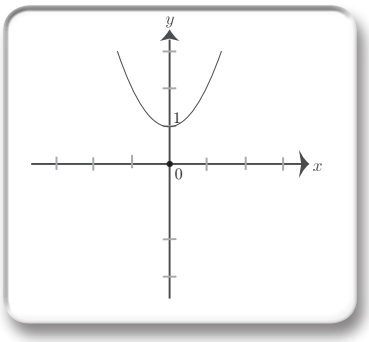
5.



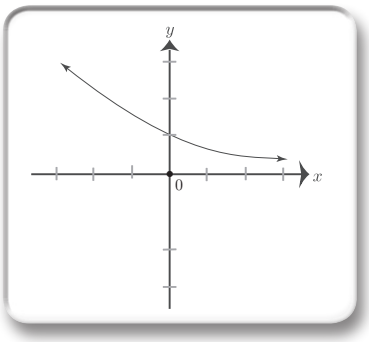
7.



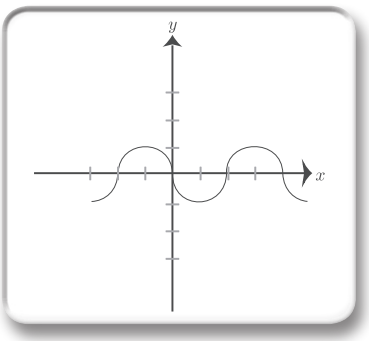
9.



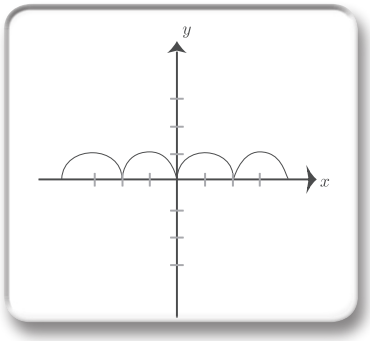
11.



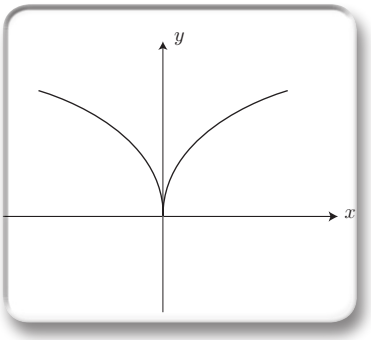
13.



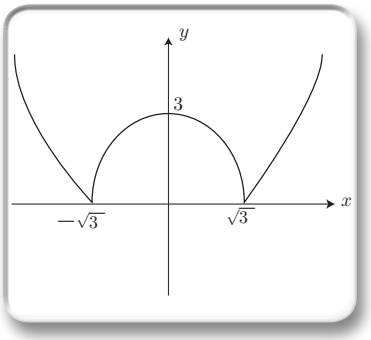
15.



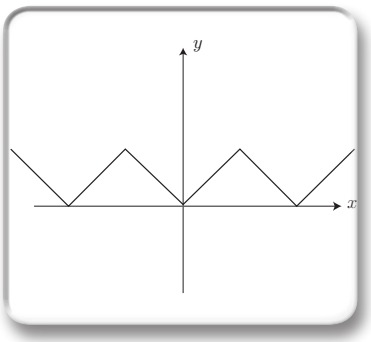
20.



21.

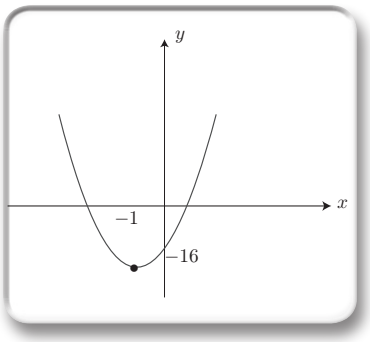


23.

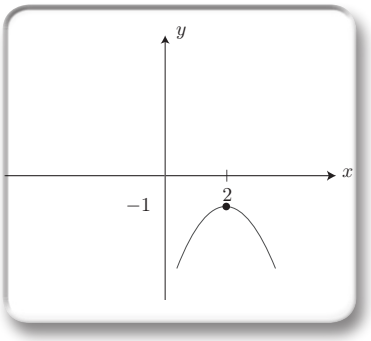


Ejercicio 4.7

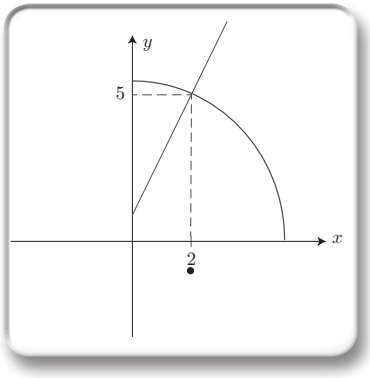
1 a. $Df = R$; $x = -1$ eje de simetría; $(-1,\ f(-1))=(-1,\ -16)$ vértice, $Df =[-16,\ \infty]$;$(0,f(0)) = (0,-15)$ intersección con el eje y; $(-5,0)$ y $(3,0)$ intersección con el eje x.



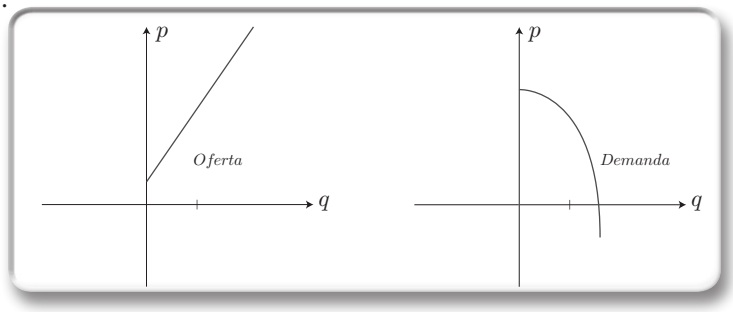
b. $Df = R$; $x = 2$ eje de simetría; $(2,\ f(2)) = (2,\ --1)$ vértice, $Df =[-\infty,\ -1]$;$(0,f(0)) = (0,-5)$,intersección con el eje y.
No existe intersección con el eje x.



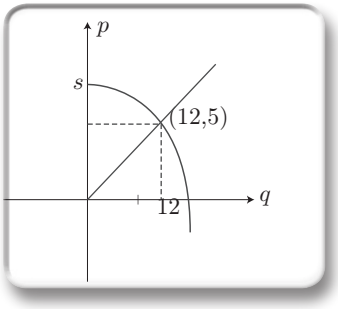
5. a. $x = -2$, $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3};$ b. $x = -4$
   b. $(q,p) = (12,5)$



a.



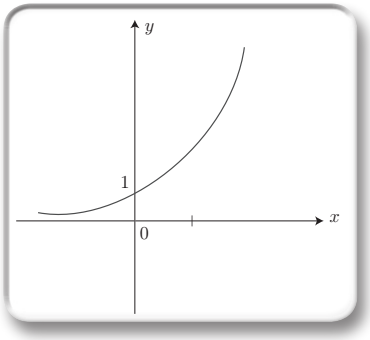
b. El punto de equilibrio es $(q,p) = (12,5)$.



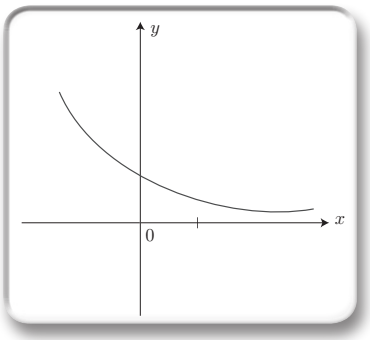
c. Si $p = 7$ en la ecuación de demanda disminuye en número de unidades producidas q, mientras que en la ecuación de oferta q, aumenta.

Ejercicio 4.8

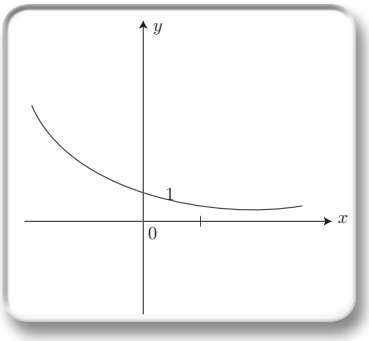
1. a.



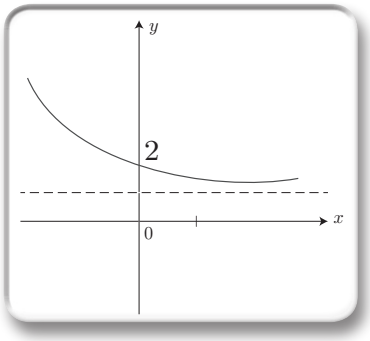
1. c.



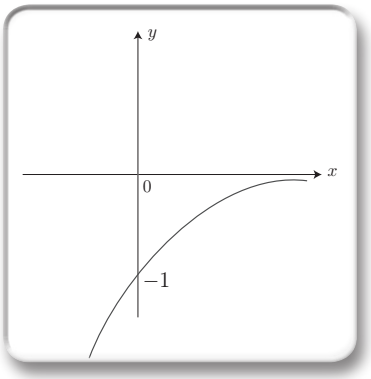
2. a.



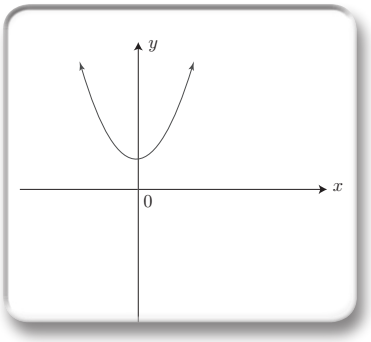
2. b.



2. e



2. h.



Ejercicio 4.9

1. a. $x = -4$; b. $x = 5$; c. $x = 2$; d. $x = -\frac{5}{2}$; e. $x = -\frac{3}{2}$; f. $x = 2$.

3 a. $log_5 1 = 0$; b. $log_4 \frac{1}{16} = -2$; c. $log_8 4 = \frac{2}{3}$; d. $log 100000 = 5$.
e. $log_{\frac{1}{5}} 0.008 = 3$; f. $log_a b = 10$; g. $log_p t = x$; h. $log_a w = m + n$.
i. $log_{a+b} c = n$; j. $log_{a^2} y + z = x$; k. $log_x 64 = 2$; l. $log 0.01 = -2$.

5 a. $10^1 = 10$; b. $2^{\frac{1}{3}} \neq \frac{1}{8}$; c. $3^{-2} \neq -9$; d. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$; e. $2^{-3} = \frac{1}{8}$; f. $(32)^{-5} \neq 2$;
g. $10^{-4} = 0.0001$; h. $(25)^{\frac{1}{2}} = 5$; i. $a^n = a^n$

Ejercicio 4.10

1. a. 3; b. 4; c. 9; e. $log_5 \left(\frac{7}{5}\right)$; f. $log_2 \left(\frac{55}{2}\right)$; g. $log_a \left(\frac{c}{2}\right)$; h. $log_c \left(\frac{a}{7}\right)$;
i. $log_x \left(\frac{a}{c}\right)$; j. $log \left(\frac{b^7}{4}\right)$.

3 a. Se cumple; b. Se cumple; c. Se cumple.

5. $z = a^{\frac{24}{7}}$.

7 a. $-\frac{9}{7}$

Ejercicio 4.11

1. a. $x = \pm 2i$, $x = \pm 2$; b. $x = \pm 3i$, $x = \pm 2i$; c. $x = -1$ multiplicidad 2, $x = 1$;
d. $x = 1$, $x = \frac{3 \pm \sqrt{61}}{2}$.

2 a. $x = 3$; c. $ln(1 + \sqrt{2})$; f. $x = 0$; k. $x = \frac{ln(7)}{\ln(\frac{5}{7})}$; l. $x = \frac{ln(2+\sqrt{5})}{\ln(3)}$.

3 a. $x = 4$; c. $x = 5$; g. $x = 4$, $x = -5$; l. $x = 4$

Ejercicio 4.12

1. a. $i = 39.24\%$; b. $i = 2.79\%$; c. 8.62%; d. 0.09073%

3 a. $p = 2564102.56$; b. $p = 2328036.41$.

5. $i = 4.72\%$.

7 a. $P_n = 1967151.35$; b. $n = 10.24$ años.

9 a. $n = 6.57$ años, b. $n = 11.42$ años; c. $n = 3.8$ años.

Ejercicio 4.13

1. a. 3; b. $\frac{1}{2}$; c. 5; d. 9; e. $\frac{8}{25}$; f. 3.

3 a. $n = 5.29$ años; b. $n = 10.24$ años; c. 2.47 años.

5. $t = 153.06$ años a partir de 1960.

7. $t = 7304.88$ años.

11 a. $Q_{(t)} = 400$ cartas; b. $Q_{(t)} = 780.08$ cartas; c. $Q_{(t)} = 800$.

13 a. 6.94%; b. 13.41%; c. 6.47%.

Ejercicio 4.14

1. a. 0; b. 1; c. 1; d. $\frac{e^2-1}{e^2+1}$; f. $\frac{e^4+1}{2e^2}$.

2 a. $cos^2h(x) - sen^2h(x) = (\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2 =$
$\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$
c. $(\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}) = (\frac{e^x+e^{-x}}{2}) = -(\frac{e^x+e^{-x}}{2}) = -senh(x)$;
f. $cosh(x) - senh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} - \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2} = \frac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$.

3. $senh^{-1} = y, \Rightarrow , x = senh(y) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, así, $e^y - 2x - e^{-y} = 0; \Rightarrow$
$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \Rightarrow (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0 \Rightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} \Rightarrow$
$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$ como $e^y > 0$ se tiene que $e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow$
$y = ln[x + \sqrt{x^2+1}]; \ x \geq 1.$

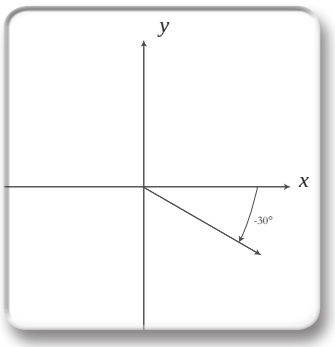
Ejercicio 4.15

1. $A(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{\pi y^2}{16}$, donde $y = 2x$ es el largo del campo rectangular.
3. $A(y) = 20y - y^2$, donde y es el largo del retángulo.
5. $V(x) = 400x - 80x^2 + 4x^3$.
7. $A(x) = 80x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8}$
9. $A(x) = 30x + (\frac{\sqrt{3}-6}{4})(x^2)$, donde x es el ancho de la figura.
11. $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3} + 15\,\pi r^2$
13. $V(r) = \frac{x^3}{6}$, donde x es el largo de la caja.
15. $V(r) = \frac{\pi r^3}{6}$
17. $A(r) = \frac{\pi r^2}{2} - r^2$
19. $p(x) = 4x + x\sqrt{10}$

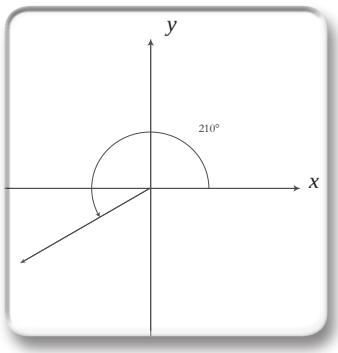
Capítulo 5

Ejercicio 5.1

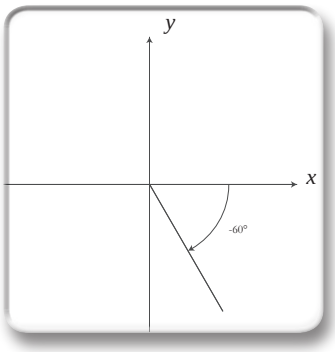
1. b.



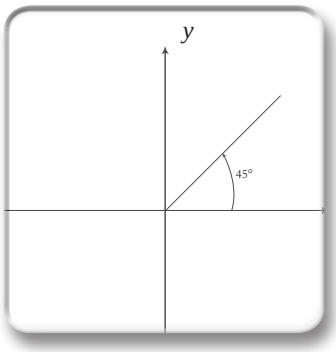
d.



e.



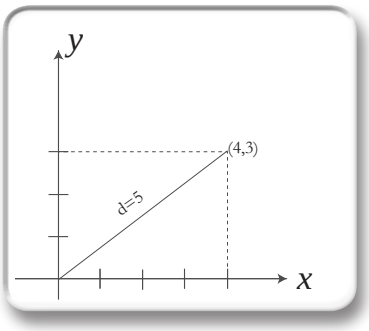
f.



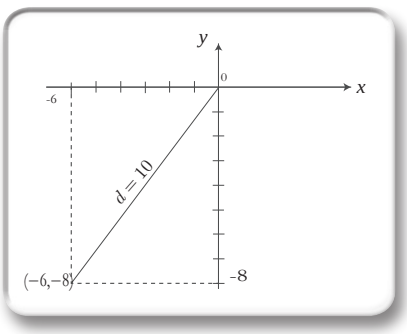
3. a. $\frac{\pi}{3}$; b. $\frac{\pi}{4}$; c. $\frac{3\pi}{4}$; d. $\frac{2\pi}{3}$; f. $\frac{-3\pi}{2}$

4. a. $60°$; c. $45°$; d. $300°$ e. $-60°$

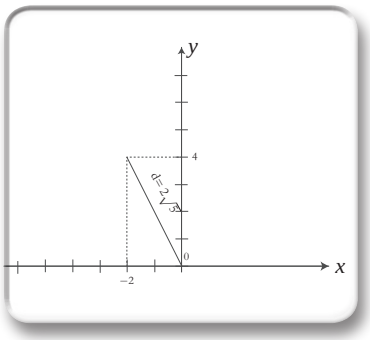
5. a.



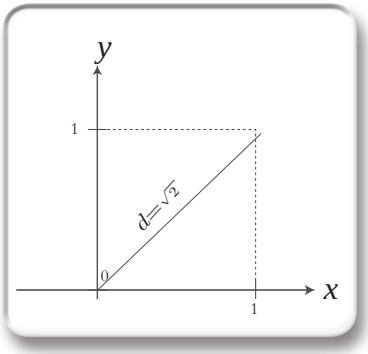
b.



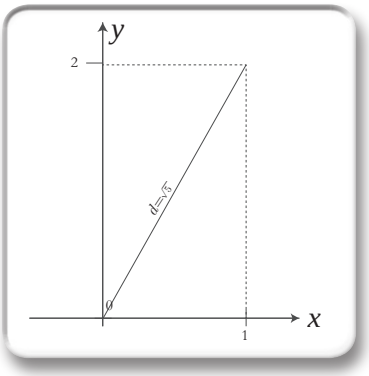
d.



e.



g.



7. a. $420°$,$780°$ es decir $60° + n(360°)$ para $n \in \mathbb{Z}$
   b. $-405°$,$-765°$ es decir $45° + n(360°)$ para $n \in \mathbb{Z}$
   c. $390°$,$750°$ es decir $30° + n(360°)$ para $n \in \mathbb{Z}$

9. a. $S = r\theta \Rightarrow S = (6)(45°) \Rightarrow S = 270$; b. $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(36)(45°) = 810$

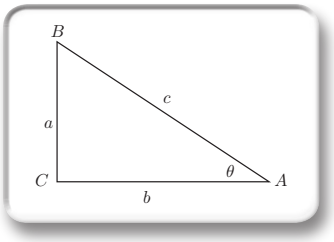
11. Si $sen\theta = \frac{8}{17}, \Rightarrow cos\theta = \frac{15}{17}, tan\,\theta = \frac{8}{15}, cotg\,\theta = \frac{15}{8}, sec\theta = \frac{17}{15}, cosc\,\theta = \frac{17}{8}$

12. Si $tan\theta = \frac{3}{9}, \Rightarrow sen\theta = \frac{3}{90}$, y $cos\theta = \frac{9}{90}$

15. a. $i)$ Para φ: $sen\,\varphi = \frac{\sqrt{7}}{4}, cos\,\varphi = \frac{3}{4}, sec\,\varphi = \frac{4}{3}, cosc\,\varphi = \frac{4}{\sqrt{7}}$,
$tan\,\varphi = \frac{\sqrt{7}}{3}, cotg\,\varphi = \frac{3}{\sqrt{7}}$; $ii)$ Para θ : $sen\,\theta = \frac{3}{4}, cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$,
$tan\,\theta = \frac{3}{\sqrt{7}}, cotg\,\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}, sec\theta = \frac{4}{\sqrt{7}}, cosc\,\theta = \frac{4}{3}$;
b. Para θ : $i)$ $tan\theta = 1, cotg\,\theta = 1, sen\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, sec\theta = \sqrt{2}$,
$cosc\theta = \sqrt{2}$; $ii)$ Para φ: $sen\,\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, cos\,\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, sec\,\varphi = \sqrt{2}$,
$cosc\varphi = \sqrt{2}, tan\,\varphi = 1, cotg\,\varphi = 1$
d. Para φ: $sen\,\varphi = \frac{b}{a}, cos\,\varphi = \frac{c}{a}, sec\,\varphi = \frac{a}{c}, cosc\,\varphi = \frac{a}{b}, tan\,\varphi = \frac{b}{c}$,
$cotg\varphi = \frac{c}{b}$. Para θ : $sen\theta = \frac{c}{a}, cos\theta = \frac{b}{a}, tan\,\theta = \frac{c}{b}, cotg\theta = \frac{b}{c}$,
$sec\theta = \frac{a}{b}, cosc\,\theta = \frac{b}{c}$

17. 181,98 mts respecto al punto de partida.

19. Para estas demostraciones, tome el triágulo ABC de la figura siguiente:



a. $\frac{1}{cos\,\theta} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{b} = sec\theta$; b. $\frac{1}{cot\,\theta} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b} = tan\theta$; c. $\frac{1}{sen\theta} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{a} = cosc\,\theta$

20. a. 0; b. $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

21. a. $y = 13.85$, x=16 ;b. $y = 7, x = 9.89$ c. $x = 7.07, y = 7.07$; d. $y = 4, x = 6.92$

23. $h = 131.5$ mts de altura.

25. $h = 219.4$ mts de altura

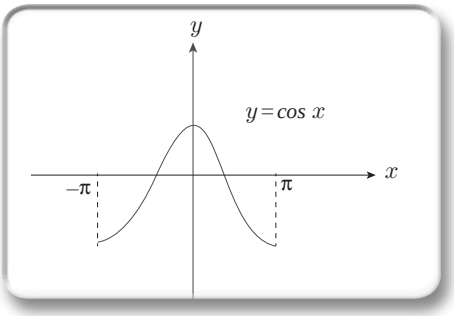
27. $x = 933{,}3$ mts

29. Ángulo fase es de $0.012°$

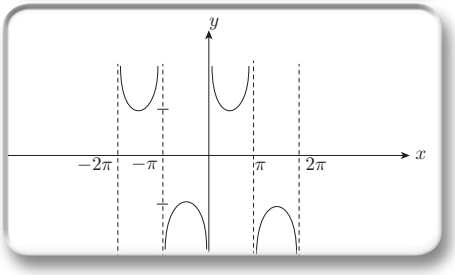
31. a. -1; b. -1; c .0; d. -1; e. $-\frac{1}{2}$; f. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

33. El período es 2π

35.



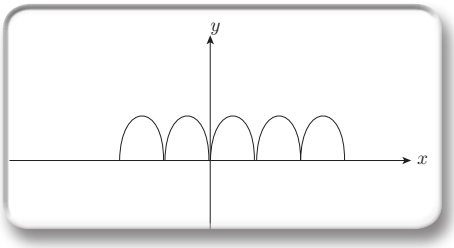
37.



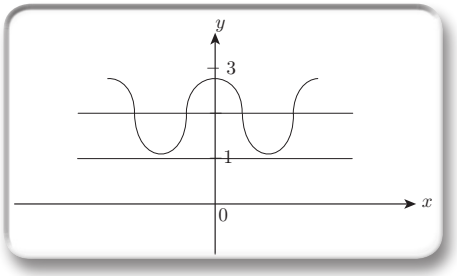
39.

	$y = tan\, x$	$y = cot\, x$
Dominio	$x \neq \frac{\pi}{2} + \quad n$	
Asíntotas verticales	$x = \frac{\pi}{2} + \quad n$	
Imagen	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Período	π	π
Par o impar	Impar	Impar

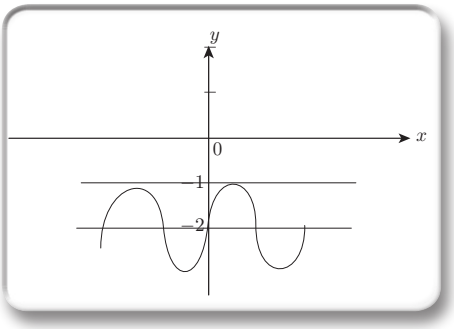
41. $y = |sen\, x|$



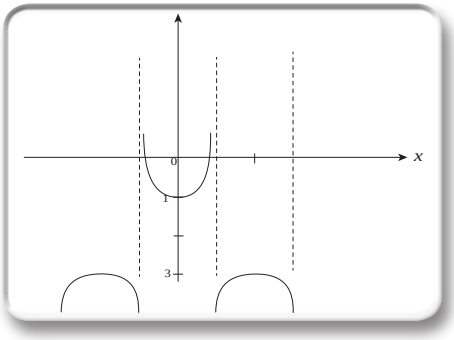
43. a. $y = 2 + cos x$



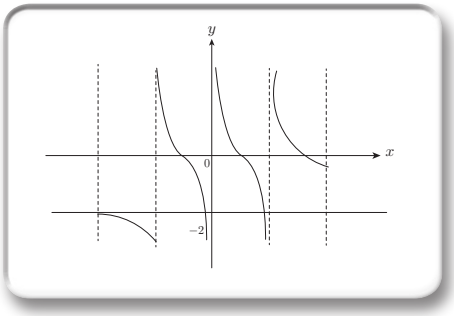
b. $y = sen\ x - 2$



c. $y = sec\ x - 2$



d. $y = cot\ x - 1$



45. a. $y = sen(x + \frac{\pi}{2})$, $i)$ Amplitud $|a| = 1$,
$ii)$ Período $p = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$,
$iii)$ Fase $-\frac{\pi}{2}$;

b. $y = cos(x + \frac{\pi}{4})$, $i)$ Amplitud $|a| = 1$,
$ii)$ Período $p = 2\pi$,
$iii)$ Fase $-\frac{\pi}{4}$

c. $y = 3\,cos(x + \frac{\pi}{6})$, $i)$ Amplitud $|a| = 3$,
$ii)$ Período $p = 2\pi$,
$iii)$ Fase $-\frac{\pi}{6}$

47. a. $sen\,\theta.sec\theta = sen\,\theta\left(\frac{1}{cos\,\theta}\right) = tan\theta$

c. $\frac{sen\theta}{cosc\theta} + \frac{sen\theta}{sec\,\theta} = \frac{sen\theta}{\frac{1}{sen\theta}} + \frac{cos\,\theta}{\frac{1}{cos\theta}} = sen^2\theta + cos^2\,\theta = 1$

e. $\frac{1-sen\,x}{cos\,x} = \frac{(1-sen\,x)(1+sen\,x)}{cos\,x(1+sen\,x)} = \frac{(1-sen^2\,x)}{cos\,x(1+sen\,x)} = \frac{cos^2\,x}{cos\,x(1+sen\,x)} = \frac{cos\,x}{1+sen\,x}$

f. $\frac{sec^2u-1}{sec^2u} = 1 - \frac{1}{sec^2u} = 1 - cos^2u = sen^2u$

h. $tan^2x.sen^2x = tan^2x(1 - cos^2x) = tan^2x - tan^2x.cos^2x$

$= tan^2x - (\frac{sen^2x}{cos^2x})cos^2x = tan^2x - sen^2x$

j. $\frac{1}{1-senx} + \frac{1}{1+senx} = \frac{(1+sen\,x)+(1-sen\,x)}{(1+sen\,x)(1-sen\,x)} = \frac{2}{1-sen^2x} = \frac{2}{cos^2x} = 2sec^2x$

l. $(sen^2\theta + cos^2\theta)^3 = 1^3 = 1$ ya que: $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$

48. a. Tomamos $x = a.sen\,t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2sen^2t} =$

$\sqrt{a^2(1 - sen^2t)} = \sqrt{a^2cos^2t} = a\,cost$

b. Sea $x = a.sec\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2}$

$= \sqrt{a^2(sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2tan^2\theta} = a.tan\theta$

d. Sea $x = \sqrt{3}\,tant,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \frac{\sqrt{3tan^2t+3}}{\sqrt{3}.tan\,t} = \frac{\sqrt{3(tan^2t+1)}}{\sqrt{3}.tan\,t}$

$= \frac{sect}{tan\,t} = \frac{1}{sen\,t}$

49. a. $cos(sec\theta) = cos(\frac{1}{cos\theta}) \neq 1$

b. $sen(-x) = -sen\,x \neq sen\,x$, ya que es una función impar.

d. $cos(-t) = cos\,t \neq -cos\,t$, ya que $cos\,t$ es una función par.

e. $sen(t + \pi) = sen\,t.cos\,\pi + cos\,t.sen\pi = -sen\,t \neq sen\,t$

50. a. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; b. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; d. $-\sqrt{3}$; f) -1: h. 0.965

51. a. $cos(\frac{\pi}{2}-x)=cos\,\frac{\pi}{2}.cos\,x+sen\frac{\pi}{2}.sen\,x\;=0\,cos\,x+sen\,x=sen\,x$

b. $sen(\frac{\pi}{2}-x)=sen\frac{\pi}{2}.cos\,x-cos\,\frac{\pi}{2}.sen\,x=cos\,x-0.sen\,x=cos\,x$

e. $cos(x-\pi)=cos\,x.cos\pi+sen\,x.\,sen\,\pi=\,-cos\,x$

h. $sen(x+\pi)=senx\,cos\,\pi+sen\pi.cos\,x=\;\;-sen\,x$

j. $cos(x+\pi)=cos\,x.cos\pi-sen\,x.\,sen\pi=\,-cos\,x$

52. a. $\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},-\sqrt{3}$; b. $1,0,\infty$; c. $\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}$

53. a. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; b. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

54. $\frac{1}{2}[sen(7x)+sen(x)]$; b. $\frac{1}{2}[cos(2x)-cos(4x)]$

55. $2sen(\frac{7}{2}x).cos(\frac{1}{2}x)$ c. $2cos(\frac{3}{2}x).cos(-\frac{1}{2}x)$

56. a. $B=62°,\quad b\approx 14.1,\quad c\approx 15.6$

b. $C=100°10',\quad b\approx 55.1,\quad c\approx 68.7$

c. $B=78°30',\quad a\approx 13.6,\quad c\approx 17.8$

d. No existe el triágulo

e. $A=77°30',\quad B=40°10,\quad b=108$

f. $A=82.54°,\quad B=4972°,\quad b\approx 100.85$

g. $B=53°40',\quad A=61°10',\quad c=20.6$

57. La longitud del poste es de 32.9 pulgadas.

59. a. La distancia entre A y K es de 2.68 millas.

b. La altura de la montaña es 1 milla (1.600 mts).

61. La distancia del satélite al observador A es 566 millas.

63. La distancia del avión al punto A es de 4.39 millas.

64. c. $a = 26.$ $B = 41°$ $C = 79°$

d. $b = 180$ $A = 25°$ $C = 79°$

e. $c = 2.75$ $A = 41°$ $C = 5°$

f. $A = 29°$ $B = 47°$ $C = 104°$

65. Demostración fórmula de Heron.

Sea $\mathbb{A} = \frac{1}{2}bc.sen\,A$

$\mathbb{A} = \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2Sen^2A}$ $\mathbb{A} = \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2(1 - cos^2A)}$

$\mathbb{A} = \sqrt{\frac{1}{2}bc(1 + cosA).\frac{1}{2}bc(1 - cos\,A)}$

Ahora despejamos cos

$\mathbb{A} = \frac{1}{2}bc(1 + cosA) = \frac{1}{2}bc(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}) = \frac{1}{2}bc(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc})$

$= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4} = \frac{(b+c)+a}{2} \cdot \frac{(b+c)-a}{2},$

ahora $\frac{1}{2}bc(1 - cosA) = \frac{a-b+c}{2}.\frac{a+b-c}{2}$, ahora

sustituimos $\mathbb{A} = \sqrt{\frac{(b+c)+a}{2} \cdot \frac{(b+c)-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$ al hacer

$S = \frac{1}{2}(a + b + c)$ se observa que $S - a = \frac{b+c-a}{2}$; $S - b = \frac{a-b+c}{2}$;

$S = \frac{1}{2}(a + b + c)$ se observa que $S - a = \frac{b+c-a}{2}$; $S - b = \frac{a-b+c}{2}$;

$S - c = \frac{a+b-c}{2}$ sustituyendo: $\mathbb{A} = \sqrt{S(S - a)(S - b)(S - c)}$

67. La longitud de la diagonal es 132 cms.

69. La distancia a través del largo es de 2.21 millas.

71. La distancia a través de largo es 287 pies.

73. a. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

d. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

e. $41.8° + n(360°)$ para $n \in \mathbb{Z}$

f. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3}k \\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right\}$ para $k \in \mathbb{Z}$

g. $x = \frac{\pi}{3}k$ para $k \in \mathbb{Z}$

$0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi, \pm\frac{\pi}{3}, \pm 2\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

h. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

i. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right\}$ para $k \in \mathbb{Z}$

j. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

k. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

l. $\theta = k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$.

$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

m. $\left.\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right\}$ para $k \in \mathbb{Z}$

$\left.\begin{array}{l} t = \pi + 2k\pi \end{array}\right\}$ para $k \in \mathbb{Z}$

h. $0, \pi$

$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$

$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{4}$

r. $\theta = \frac{\pi}{8} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

$\theta = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

$\theta = \frac{5\pi}{8} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

$\theta = \frac{7\pi}{8} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

s. $x = 15° + n(360°)$ para $n \in \mathbb{Z}$

t. $x = \pi + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

Capítulo 6

Ejercicio 6.o

2. $p(x_1,y_1)$, está en el II cuadrante $\Leftrightarrow x_1<0, y_1>0$;
   $p(x_1,y_1)$, está en el III cuadrante $\Leftrightarrow x1<0, y_1<0$
   $p(x_1,y_1)$, está en el IV cuadrante $\Leftrightarrow x1>0, y_1<0$

3. $(0,0),(a,0),(a,a),(0,a)$

4. a. $2\sqrt{34}$; b 5; c. $2\sqrt{5}$

5. $|AB| = \sqrt{(1-1)^2+(3-1)^2} = 2$
   $|BC| = \sqrt{(3-1)+(1-3)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
   $|AC| = \sqrt{(3-1)^2+(1-1)^2} = 2$
   Como $AB = AC$ es isóceles.

6. $|AB| = 2, \quad |BC| = 2\sqrt{2}$ y $|AC| = 2$
   Se comprueba que $|AB|^2 + |AC|^2 = 2^2 + 2^2 = 8 = |AC|^2$

7. $|AB| = \sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2} = \sqrt{2}$
   $|BC| = \sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2} = 2\sqrt{2}$
   $|AC| = \sqrt{(3-0)^2+(4-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Como $|AB| + |BC| = |AC|$
   o sea, $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ son colineales.

8. a. $(3, \frac{5}{2})$; b. $(-2, -3)$; c. $(\frac{11}{2}, 7)$
9. $(10, 11)$
10. a. $m = 2$; b. $m = -2$; c. $m = -\frac{4}{5}$
11. $y = 4x + 4$
13. a. Pendiente $m = \frac{-3}{2}$; Intersecto $b = \frac{1}{2}$ b. Pendiente $m = \frac{-3}{5}$; Intersecto $b = 4$
14. $y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{11}$
15. $y = -2x + 2$; $a = -3$, $b = -8$
16. $y = -x + 8$
17. $y = x + 2$
18. Al expresar las rectas en la forma estándar, las pendientes de ambas es la misma: $m = \frac{3}{5}$, por lo tanto son rectas paralelas.
19. La pendiente de la primera recta es $m_1 = \frac{3}{2}$, mientras que la de la segunda es $m_2 = \frac{-2}{3}$ y son recíprocas si $m \cdot m_2 = (\frac{-2}{3})(\frac{3}{2}) = -1$, por lo tanto, las rectas son perpendiculares.

Ejercicio 6.1

4. a. $y = -5x + 44$; b. $y = \frac{9}{10}x + \frac{7}{10}$; c. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$; d. $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}x + 10$; e. $y = -2x + 1$; f. $y = -x + 3$; g. $y = \frac{2}{5}x + \frac{32}{5}$

5. a. $C(x) = 6000x + 5000000$, $I(x) = 11000$;
   b. El punto de equilibrio es $(1000, 11000000)$
   c. $U(x) = 5000x + 5000000$, donde 5000 es la utilidad por unidad vendida y $U(0) = -5000000$, es decir, que si no se venden utilidades, se pierden 5000000.
   d. 1400 unidades.
6. a. $C(x) = 1000x + 1400000$, $I(x) = 3000x$; b. $(700, 210000)$
   c. $U(2500) = 3600000$; d. 950 unidades.
7. a. 5000000; b. Sí, porque la utilidad mínima es de $\$\ 4000000$.
8. a. $p + 2q = 13000$; b. $\$\ 13000$; c. 4250 unidades; d. $\$2500$

9. a. La ecuación de demanda es $2p + q = 240$, donde el precio máximo que los consumidores están dispuestos a pagar es \$120 pues para q=0, $2p$=240 o bien p =120.

   Además, la ecuación también nos dice que por cada 2 unidades que se demanden del artículo, el precio disminuye en \$1.

   Por otro lado, la ecuación de oferta $p-q$ =30, donde el precio mínimo en el que el vendedor está dispuesto a ofrecer el artículo es \$30 y además la cantidad ofrecida aumenta en una unidad, cuando el precio del artículo aumenta en una unidad.

   b. Cuando el precio es p=\$ 40 la cantidad de demanda es 180, luego hay exceso de demanda y cuando el precio es $p = \$100$, la cantidad ofrecida es 70, luego hay exceso de oferta.

   c. El punto de equilibrio viene dado por $p = 90$, q=60.

10. Ecuación de oferta: $-q+4p$=40; ecuación de demanda: $q + 2p = 200$. El punto de equilibrio es p=40, $q = 120$

11. a. $v(t)= -1200000t+18000000$, $0 \leq t \leq 15$; b. 13200000; c. 5 años.

Ejercicios 6.2

1. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$
2. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$
3. a. $(1, -2)$, $r = 4$; b. $(0, 2)$, $r = 2$; c. $(-2, 0)$, $r = 5$
4. a. $(-4,1)$, $r = \sqrt{2}$; b. $(4 - 1)$, $r = 2$; c. $(2, 0)$, $r = 2$
5. Centro $(2,4)$, $r = \sqrt{5}$

   Por lo tanto, la ecuación es $(x-2)^2 + (y - 4)^2 = 5$

6. a. No es función porque a cada elemento del dominio tiene dos imágenes, luego es una relación.
   b. Dom f : $[-5,5]$; Imag: $[0,5]$ y es función; c. Dom f: $[-5,5]$, Imag : $[-5,0]$ y es función.
7. $(x-7)^2+(y+6)^2 = 89$
8. $(x-2)^2+(y+4)^2 = 4$
9. $x^2+(y+2)^2 = 4$
10. $(x-4)^2+(y+1)^2 = 52$
11. $(x-6)^2+(y+3)^2 = 25$

Ejercicio 6.3

1. a. Vértice $(0,0)$, foco (4.0), directriz, $x = -4$;
   b. Vértice $(0,0)$, foco $(\frac{5}{2})$, directriz, $y = -\frac{5}{2}$;
   c. Vértice $(0,0)$, foco $(0, -\frac{5}{2})$;
   d. Vértice $(0,0)$, foco $(-\frac{3}{2}, 0)$, directriz, $x = \frac{3}{2}$
3. a. $y = 28x$; b. $x^2 = 89$; c. $y^2 = -8x$; d. $x^2 = 16y$
4. a. $(y+1)^2 = 4(x-2)$, vértice $(2, -1)$, foco $(3, -1)$, directriz $x = 1$;
   b. $x^2 = -20(y-2)$ vértice $(0,2)$, foco $(0, -3)$
5. $(y-4)^2 = -8(x+3)$
6. $(y+3)^2 = 16\,(x-2)$

Ejercicios 6.4

1. $V_1(\,5, 0\,), V_2(\,-5\,, 0\,)$
2. $\mathrm{V}_1\,(5,0)\;\;,\;\;\mathrm{V}_2(-5,0),\;\;\;\mathrm{V}_3(0,4)\;,\;\;\;V_4(0,-4)$

   Focos $(3,0)$, $(-3,0)$
3. a Centro $(0,0)$, vértices $(0,5)$, $(0,-3)$, focos $(0,3)$ y $(0,-3)$

   b Centro $(0,0)$, Vértices $(0,5)$, $(0,-5)$, Focos $(0,\sqrt{21})$, $(0,\,-\sqrt{21}\,)$

   c Centro: $(0,0)$, Vértices: $(2,0)$, $(-2,0)$, Focos: $(1,0)$, $(-1,0)$
4. a) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

   b) $49x^2 + 16y^2 = 784$

   c) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{12} = 1$
5. Vértices: $(-3,3)$, $(5,3)$, $(1,1)$ y $(1,5)$

   Focos: $(1-2\sqrt{3},3)$ y $(1+2\sqrt{3},3)$

   Centro: $(1,3)$
6. Vértices:$(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,4)$ y $(0,-4)$

   Focos: $(-3, 1+2\sqrt{3}\,)\; y\,(-3,\,1-2\sqrt{3}\,)$

   Centro: $(-3,1)$

Ejercicios 6.5

1. a. Centro$(0,0)$, vértice$(4,0)$, $(-4,0)$, focos$(2\sqrt{7},0)$ y $(-2\sqrt{7},0)$

   b. Centro $(0,0)$, vértice $(0,\sqrt{5})$ y $(0,-\sqrt{5})$, focos $(0,3)$ y $(0,-3)$

   c. Centro $(0,0)$, vértice $(3,0)$ y $(-3,0)$.

2. a. $\frac{x^2}{9} - \frac{16}{81}y^2 = 1$; b. $5x^2 - 2y^2 = 80$; c $4x^2 - 5y^2 = 16$; d. $4x^2 - 16y^2 = 144$

3. En cada uno de los ejercicios encuentre el vértice, los focos y las asíntotas de la hipérbola.

   a. Centro $(1,-2)$, vértices $(2,-2)$ y $(0,2)$, focos $(1-\sqrt{5},-2)$ y $(1+\sqrt{5},-2)$, asíntotas $y = 2x-4,\ y = -2x$

   b. Centro $(3,-2)$, vértices $(3\pm 2,-2)$ es decir $(5,-2)$ y $(1,-2)$, focos $(3\pm\sqrt{13},-2)$, asíntotas y $+2 = \pm\frac{3}{2}(x-3)$; c. Centro $(-3,2)$, vértices $(-2,2),(-4,2)$, focos $(-3+\sqrt{5},2),(-3-\sqrt{5},2)$, asíntotas $y-2 = 2(x+3)$ e $y-2 = -2(x+3)$.

4. Sea h la distancia del sol a la tierra, con coordenas $(h,0)$ahora como la órbita de la luna a la tierra tiene trayectoria circular, entonces la ecuación es: $(x-h)^2 + y^2 = r^2$

6. Como el punto $(2.5,6)$, está en la parábola, y la ecuación es: $y^2 - 4px$ entonces: $6^2 = 4p(2.5)$ ó $10\ p = 36$ entonces $p = \frac{36}{10} = 3.6$, por lo tanto, la distancia focal es $p = 3.6$

9. La longitud del eje mayor es de 24 pulgadas y el eje menor es de 12 pulgadas.

10. La altura del arco a 12 pies es $y = \sqrt{336} = 18.33$ pies.

12. $a = 200.000\ km$; $b = 346410{,}16\ km$; $c = 400000\ km$; $e = 2$

Capítulo 7

Ejercicio 7.1

1. a. $x = \frac{5}{2}$ y $x = \frac{3}{2}$; b. $x = \frac{81}{6}$; c. $x = 32$; d. $x = \frac{65}{8}$; e. $x = 27$
2. a. (V); b. (V); c. (F); d. (V); e. (F)

Ejercicio 7.2

No tiene respuestas.

Ejercicio 7.3

a. $A = 58.5$ m^2, $P = 54$ m

d. $A = 936$ m^2, $P = 216$

Ejercicio 7.4

1 a. $x = 2$; b. $x = 8.71$; c. $x = 15$

2 a. 4; b. 13; c. 15; d. $\sqrt{5}$

3. $x = 13.6$ cm

Ejercicio 7.5

1. $60\ \text{cm}^2$
2. $b = 7$ y $h = 5$ o $b = 5$ y $h = 7$.
3. $126{,}5625\ \text{cm}^2$.
4. $144\ \text{pulgadas}^2$.
5. $0{,}1691\ \text{m}^2$.
6. $1195{,}22\ \text{m}^2$.
7. $2{,}4940\ \text{dm}^2$.
8. $a = 32\,\text{m}$ y $b = 24\,\text{m}$.
9. $100\ \text{m}^2$.
10. $a = 170{,}03\,\text{m}$ y $b = 105{,}30\,\text{m}$.
11. $a = 20{,}78\,\text{m}$ y $b = 34{,}64\,\text{m}$.
12. $57{,}64\,\text{m}$.
13. $57{,}64\,\text{m}$.
14. $37{,}5\ \text{cm}^2$.
15. $\frac{7}{2}$ cm;
16. $1039{,}23\ \text{cm}^2$.
17. $363{,}27\ \text{cm}^2$.

Ejercicio 7.6

1. $\sqrt{3}\,\text{m}$; 2. 4m^2; 3. $0{,}9352\text{m}^2$

Ejercicio 7.7

1. 4,24 cm.
2. 379,94 m^2.
3. 32 cm.
4. 1,67 m
5. $\frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$.
6. 45º ; 45º ; 135º

Ejercicio 7.8

1. $6\pi^2$ pies^3; 3. 15,58 m; 4. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Ejercicio 7.9

1. a. $\frac{8}{27}$pies^3; b. 125 pies^3; c. 1728 pies^3
2. 2304 pulgadas^3.
4. 3367,008 m^2;
5. 31,500 litros;
6. 649,5 m;
7. 301,86 cm
8. 384 dm^2.

Ejercicio 7.10

1. 0,3 m; 2. 0,35 m; 3. 54 cm; 4. 48 cm;
5. 327,348 cm^2; 6. 997,6320 cm^2; 7. 144,09 cm;
8. 15,588 m^2. 9. 886,784 m^2; 10. 8867,84 m^2.

Ejercicio 7.11

1. 385,33 cm^3; 2. R/ 12960 cm^3; 3. R/ 209,04 cm^2.
4. 3533,226 cm^3; 5. R/ 4,3 cm^3.

Ejercicio 7.12

1. 7974,09 m^2; 2. 2260,8 m^2; 3. 3645,57 m^2;
4. 678,24 m^2; 5. 11, 775 m^3; 6. 17,8 cm;

7. 4737,22 m^2; 8. 471,23 $pies^3$.

Ejercicio 7.13

1. 10851,84 m^2; 2. 127,170 cm^3; 3. 783,14 m^2; 4. 2,70 dólares

5. 8,84 cm; 6. 2260,80 m^2; 7. 1,04 $pies^3$.

Ejercicio 7.14

1. 113,04 m^3; 2. 13,06 pies; 3. 2557,778 cm^3; 4. 620,975 m^3.

5. 5,05 m; 6. $400\pi m^2$; 7. 19153,94 $pies^3$.

Recapitulación

1. a. $\frac{8}{27}$ $pies^3$; b. 125 $pies^3$; c. 1728 $pies^3$.

2. 2304 $pulgadas^3$.

3. 385,33 cm^3; 4. 19153,94 $pies^3$;

5. 471,23 $pies^3$; 6. 1,04 $pies^3$.

7. $6\pi^2 pies^3$; 8. 772 $pies^3$.

9. a. 1728 $pulgadas^3$; b. $27 pies^3$; c. 1000 cm^3; 10. $\frac{7}{2}$ cm.

11. $\sqrt{3}$ m; 12. 45º, 45º, 135º; 13. 18º; $n=20$ 14. 1039,23 cm^2

15. 363,27 cm^2; 16. 37,5 cm^2; 17 60 cm^2.

18. $b = 7$ y $h = 5$ o $b = 5$ y $h = 7$

19. 126,5625 cm^2; 20. 4 m^2; 21. 144 $pulgadas^2$; 22. 0,3 m.

23. 0,35 m; 24. 54 cm; 25. 48 cm; 26. 327,348 cm^2.

27. 997,6320 cm^2; 28. 144,09 cm; 29. 12960 cm^2.

30. 209,04 cm^2; 31. 3533,226 cm^3.

32. 4,3 cm; 33. 7974,09 m^2; 34. 2260,8 m^2.

35. 3645,57 m^2; 36. 678,24 m^2; 37. 11, 775 m^3;

38. 17,8 cm. ; 39. 4737,22 m^2; 40. 10851,84 m^2;

41. 127,170 cm^3. ; 42. 783,14 m^2; 43. 2,70 dólares;

44. 8,84 cm; 45. 2260,80 m^2.; 46. 0,1691 m^2;

47. 1195,22 m^2; 48. 2,4940 dm^2; 49. 0,9352 m^2.

50. 4,24 cm; 51. 379,94 m^2; 52. $a = 32m$ y $b = 24m$;

53. 32 cm; 54. 100 m^2; 55. $a = 170{,}03m$ y $b = 105{,}30m$.

56. $a = 20{,}78m$ y $b = 34{,}64m$; 57. $57{,}64m$; 58. $57{,}64m$.

59. 1,67 m; 60. $\frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$; 61. 15,588 m^2;

62. 886,784 m^2; 63. 8867,84 m^2;

64. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

65. 15,58 m; 66. 0,91 m; 67. 3367,008 m^2;

68. 31,500 litros; 69. 649,5 m^3.

70. 301,86 cm^3; 71. 384 dm^2;

72. 113,04 m^3; 73. 13,06 pies.

74. 2557,778 cm^3; 75. 620,975 m^3;

76. 5,05 m; 77. $60\pi m^2$; 78. $400\pi m^2$.

Apéndices

Ejercicio A1

1. a. $\frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+2}$; b. $\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$; c. $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}$; d. $\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x+3}$;

   e. $\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-1}$; f. $\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1}$; g. $\frac{2}{x-2} - \frac{5}{3x+1}$; h. $\frac{2}{x+1} - \frac{5}{4x-1}$;

   i. $-\frac{3}{3x-2} - \frac{1}{2x+3} + \frac{2}{x}$; j. $\frac{11}{4(x-3)} + \frac{3}{4(x+1)} + \frac{3}{x}$.

2. a. $2 + \frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+2}$; b. $x + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$; c. $\frac{3}{2x-3} + \frac{2}{x+2} + 2x - 5$;

   d. $\frac{3}{3x+2} - \frac{1}{x-1} + 2x + 1$.

3. a. $\frac{58}{9(2x+1)^2} - \frac{134}{27(2x+1)} + \frac{19}{9(x-1)^2} - \frac{67}{27(x-1)}$;

   b. $\frac{17}{(x-2)^3} + \frac{18}{(x-2)^2} + \frac{6}{x-2} + 1$; c. $\frac{4}{x} - \frac{x-5}{x^2+x+1}$;

   d. $\frac{2x+4}{x^2+2x+4} + \frac{1}{x-2}$; e. $\frac{4x-3}{x^2+1} - \frac{2}{x-1}$; f. $\frac{3x-1}{2x^2+3} + \frac{4}{x+4}$;

   g. $\frac{-x+2}{x^2-x+1} + \frac{x+2}{x^2+1}$; h. $\frac{x}{x^2+2x+3} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$;

   i. $\frac{x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$; j. $\frac{x-15}{(x^2+2)^2} + \frac{3x+4}{x^2+2} - \frac{2}{x-1}$

Ejercicio B1

1. a. $-4x^2-3x$; b. $-21x^3+22x^2-8x+1$; d. $-26x-+13$; e. 0

2. a. $2x(6x^2+x+3)$; b. $(x+1)(x^2+2)$; c. $(x-3)(x-2)$; d. $(x+5)(x+2)$; e. $(x^2+1)(2x-1)$; f. $(x-6)(x-4)$; g. $(6x+5)(6x-5)$; h. $(x+6)(x-2)$; i. $(2x+3)^2$; j. $(2x-3)(5x-4)$; k. $(x^2+4)(x+2)(x-2)$; l. $(x+2)\ (x-2)$

3. a. m.c.m. $= (x-5)^2\,(x+5)^2$ M.D.C. $= 1$
   b. m.c.m. $= x(x-1)(x+1)^2$ M.D.C. $= x+1$
   c. m.c.m. $= x^2(x-1)(x+1)(x^2+3)$ M.D.C. $= x$
   d. m.c.m. $= x(x-5)(3x+1)$ M.D.C. $= x-5$
   e. m.c.m. $= (x+1)(x+3)$ M.D.C. $= 1$
   f. m.c.m. $= (x+2)(x-2)(2x-1)$ M.D.C. $= 1$
   g. m.c.m. $= x(x-1)(2x+3)(4x+1)$ M.D.C. $= 1$
   h. m.c.m. $= 3(x+1)(6x^2-7x-1)$ M.D.C. $= 1$
   i. m.c.m. $= (x-4)(x-3)$ M.D.C. $= x-3$
   j. m.c.m. $= (x+2)(x+5)$ M.D.C. $= x+2$

4. a. $(x-1)(2x+5)$; b. $2x^2-7x-1$; c. $x^2-12x+3$
   d. $2x+2-4/x$; e. $3x+4$; f. $x-4$; g. $3x^2-x+1$
   h. $3x^2+x-2$; i. x^2-x-1; j. $2x^2-6x-3$

5. a. $x-2-\frac{2}{x+5}$; b. $x-7+\frac{3}{x-3}$; c. $3x-5+\frac{2}{3x-2}$;
   d. $x^2-2x+1+\frac{4}{3x+2}$; e. $x^2-x-6-\frac{9}{4x-3}$;
   f. $4x^2+2x-7+\frac{4}{2x^2-x+4}$.

6. a. $(x^2-1)(x^2-1)+\frac{4}{x^2-1}$;
   c. $2x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{17}{9}x-\frac{8}{27}+\frac{\frac{1}{27}(219-x)}{3x^2+x-3}$

Ejercicio B2

1. a. $Q(x)=\ 3x^2+12x+14$; $r=35$
   b. $Q(x)=\ 3x^2+x-8$; $r=24$
   c. $Q(x)=2x^2-4x+3$; $r=\frac{19}{2}$
   d. $Q(x)=-2x^2-3x^2-9x-22$; $r=53$
   e. $Q(x)=-3x^3+3x^2-3x+8$; $r=-20$

2. $P(-10)=-660$;
   $P(-5)=0$, $P(-2)=36$,

$P(-1) = 24$, $P(0) = 10$;
$P(1) = 0$;
$P(2) = 0$;
$P(5) = 120$;
$P(10) = 1.080$;
Los factores son: $x+5$; x; $x-10$

3. $k = =5$

4. a. $k = -10$; b. $k = 1.991$

5. a. $P(1) = 14(1)^{99}-65(1)^{56}+51= 0$;
   b. $P(-4) =2(-4)^{0}+3(-4)+20= 0$

6. Si $Pn(x)= x^n+a^n$ para $x=-a$, tenemos que:
   $Pn(-a)=(-a)^n+a^n$, para n impar $(-a)^n=-(a^n)$, por lo tanto,
   $Pn(-a)=-(a)^n+a^n = 0$

Ejercicios B3

1. a. $x = 2$, $x = -2$ b. $x =-2$, $x = 1$;
   c. $x = 1$ con multiplicidad 2, $x =1$;
   d. $x =1$, $x = 2$, $x = 5$; e. $x =-2$, $x =2$;
   f. $x = -2$, $x = 4$; g. $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$ h. $x = 0$, $x = 1$

2. a. $(x+6)(x+1)^2$; b. $(x-1)(x-3)(x-6)$;
   c. $(x+2)(x-2)(x^2+3)$;
   d. $(x-2)(x^2-2x+10)$; e. $(x+1)^2(x-2)(x+2)$;
   f. $(x+1)(x^2+x+ 1)$;
   g. $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$;
   h. $(x-2)(x+3)(x+4)(x^2-2x-1)$;
   i. $(x-1)(x+2)(x+4)(x-3)^2$;
   j. $(x+1)(x-2)(x-3)(x^2+3x+4)$

3. a. $x = \frac{1}{3}$, $x =1$;
   b. $x =2$;
   c. $x = -4$, $x = 2$, $x = 3$;
   d. $x = 1$.

4. a. $(x-1)(2x-1)(3x-1)$;
   b. $(2x+1)(3x-1)(4x-1)$;
   c. $(x-1)(x^2+x+1)(2x-1)(3x+2)$;
   d. $(x-2)(x+3)(2x+1)$;

e. $(x+3)(x-4)(3x-1)$;
f. $(x+3)(3x-4)(5x-2)$;
g. $(x^2-x-1)(2x+1)(2x-1)$;
h. $(3x+1)(4x-1)(5x-1)$;
i. $(2x+1)(3x-1)(4x+1)(5x-1)$;
j. $(x+1)(3x-1)(5x+2)$

Ejercicios B4

1. a. $x = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$
   b. $x = \pm 3i$; $x = \pm 2i$
   c. $x = 1$ y $x = -1$ de multiplicidad 2
   d. $x = -0.6909 \pm 1.4477i$; $x = -1.5765$ y $x = 2.9583$

Ejercicios C1

1. b. Sí, S_n expresa la igualdad $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
   i. S_1 es $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$, lo que es cierto.
   ii. Supongamos que S_n es cierta, siendo k un entero fijo,
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.
   Debemos demostrar que S+1 es cierta
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+1)+1^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+1)^2}{4}$.
   Sumando $(k+1)^3$ a ambos miembros de la igualdad S_k tenemos:
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4}$
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$
   Por lo tanto $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$
5. a. 3.003; b. 1; c. 15; e. 1; i. 15
6. Verificación para $n = 5$ y
   $r = 3$ $\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{4!2!} = 15 = \frac{6!}{4!2!} = \binom{6}{4}$
7. n^2

8. a. $x^{20}+20x^{18}a+180x^{16}a^2x+960x^{14}a^3$;

   b. $64a^6 - \frac{192a^5}{b} + \frac{240a^5}{b^2} - \frac{160a^3}{b^3}$;

   c. $\frac{\sqrt{2}x^{7/2}}{16} + \frac{7x^3y}{16} + \frac{21\sqrt{2}x^{5/2}y^2}{2} + 70x^2y^3$;

   d. $\frac{1}{a^{11}} + \frac{11x}{2a^{10}} + \frac{55x^2}{4a^9} + \frac{165x^3}{8a^8}$;

   e. $a^{12} - 16a^{21/1}x^2 + 112a^9x^4 - 448a^{15/2}x^6$.

9. a. $32z^5 + 10z^4y + 40z^3y^2 + 80z^2y^3 + 80zy^4 + y^5$;

   b. $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$;

   c. $y^8 - 8y^6x + 24y^4x^2 - 32y^2x^3 + 16x^4$;

   d. $\frac{1}{a^3} + \frac{3x}{2a^2} + \frac{3x^2}{4a} + \frac{x^3}{8}$

10. a. $\frac{455}{4096}x^{24}a^3$;

    b. $-8.064y^{10}z^5$;

    c. $\frac{224}{243}x^6a^{12}$;

    d. $924a^3x^6$;

    e. $\frac{28}{9}a^7x^6$; cuarto;

    f. $\frac{924x^{18}}{y^{12}}$;

    g. $\frac{231x^{10}}{32}$, séptimo;

    h. $2.880x^2y^4$, tercero;

    i. $480.700x^{18}y^7$;

    j. $17.010y^{12}$;

    k. $320.320x^3$;

    l. $\frac{167.960}{x^5}$;

    m. $103'809.000a^7b^{10}$;

    n. $\frac{1'732.100}{x^2}$;

o. $5{,}90574.10^{17}x^{21}y^{9}$;

p. $6.048x^{5}y^{2}$ tercer lugar;

q. $\frac{330y^{7}}{x^{3}}$ octavo lugar.

11. $6048x^{5}y^{2}$

12. $330x^{-3}y^{7}$

Índice temático

A

Abscisa: 332,334,358,435,458,483.

Altura del triángulo: 209, 355.

Amplitud: 323,362,363, 365, 412, 428,691.

Ángulo: 117
- agudo: 326,338-340,351,374,515.
- central: 324,328,557,558,562,594.
- completo: 516.
- coterminal: 334,405.
- de depresión: 349,354,409.
- de elevación: 349,408,417,418.
- diedro: 562,564,565.
- doble: 378,379,380,381,382,404, 430.
- en posición normal: 334.
- inscrito: 559.
- llano: 326,515.
- negativo: 324,357.
- obtuso: 326, 515,524,527,516.
- plano: 324,564.
- poliedro: 564.
- positivo: 324,335,516.
- recto: 326,337,387,426,515, 519,523.
- reflejo: 326.
- alternos: 517,534.
- complementarios: 117,515,516.
- correspondientes: 527,528,530.
- externos: 550,562,563,594.
- internos: 348,517,534.
- medio: 378,382,383,415.
- notables: 323,376.
- opuestos: 387,390,392.
- suplementarios: 515.

Apotema: 547,549,550,551-555, 573,576-578,581-583,583, 590-598.

Área: 27,114,117,120,126,136,421,548, 557,63,570,572,578,580,599.
- de la esfera: 591,593-
- del círculo: 194,472,554,555.
- del cuadrado: 222,311,543,544, 552,554,556.
- del paralelogramo: 503,542,543.
- del polígono regular: 547,553.
- del prisma: 571.
- del rectángulo: 114,117,120,208, 210,222,309,317,542,543,545, 548,549.
- del rombo:546.
- del trapecio: 546.
- del triangulo: 209,311,315,316, 318,419,423,534,535,536, 544,546.
- sector circular: 405,557.
- tronco de pirámide: 580.

Asíntotas:
- horizontales: 193,295,249.
- verticales: 193,245,358,359,361.

B

Baricentro: 526.

Bisectriz: 513,525,526.

C

Cilindro: 310,311,315,317,577,582-584, 592,594,596,599.

Circuncentro: 526.

Círculo: 194,309,313,314,323,329, 331,341-343,358,425, 471, 473,552-554-558,560,562, 590,594,597,602.
máximo: 590.
unitario: 331,341,358

Circunferencia máxima: 589,590

Cocientes notables: 27,52

Coeficientes: 31,32,57,60,62,128,167, 169,462,465,615,616,627, 633,643-646.
indeterminados: 605,606,608-610,612,619,623.
separados: 609,622,630.

Cofunción: 374,428.

Componentes de un vector: 355

Composición de funciones: 193,226

Congruencia: 507,527
de ángulos: 512
de segmento: 507

Cónicas: 433,467

Cono: 193,310,311,317,467,4801,498, 503,584-589,593,596,598-600.

Coordenadas: 160,190,211,224,332, 334-336,342,343,363,404,434, 435,438,441,442,444,445,453, 458,474,476,477,478,483,484, 485,495,496,498.
rectangulares: 175,332,333,433.

Cosecante: 304,334,337-339,341,361, 400,411.

Coseno: 255,303,321,323,334,338,339, 341,350,353,359,362,373,374, 378,379,381,382,384,385-387, 390-395,397,401,411,428,431, 535.

Cotangente: 304, 334, 337-339,345,360, 398,412.

Criterio: 212,233
línea horizontal: 232,233.
líneal vertical: 212,232.

Cubo: 60,63,73,74,207,569,571-573,583, 593,594,596,598,668,669.

Cuerda: 51,136,137,362,422,473,475, 534,549,554,558,559,560,562, 597.

D

Desplazamiento: 323,362,365,366

Determinantes: 169,170,171,180,182, 184.

Diagonal: 7,421,542,544,546,548,551, 553,570,571,573-575,578,595, 597,598,694.

Diámetro: 317,469,470,472,496,497,554, 584,589,590,591,593,594,596, 598.

Directriz: 472-474-478,480,501, 582,584,698.

Discriminante: 129

Distancia entre dos puntos: 425,433, 436,471,499,508.

División: 1-3,27,28,44-47,54,55,81,83,84, 246,247,446,604,609,617,618, 620-628,630,632.
sintética: 622,623,625-628,632

Dodecaedro: 567

Dominio: 21,58,59,60,61,96-99,193,195 197,198,199,200,201-204,206, 213,214,215,216,218,219,223, 225,227,229,231,233,234,237, 238,240-244,249,261,267,271, 305,320,321,358,359,360,361, 396-400,472,688,689,698.

E

Ecuación: 101-110,118,119,122,159,160, 163, 179,270
de grado n: 631.
de la circunferencia: 469,470,472, 473.
de la recta: 449,450,452-455,457,

459,460,464.
de primer grado: 104,105,159,160, 168.
de segundo grado: 126,129,131, 288,175.
exponencial: 285,289.
logarítmica: 289.
trigonométrica: 366.

Elipse: 433,467,480-489,491,497,501, 515,589.

Esfera: 229,317,503,590,591-594,598, 600.

F

Factor común: 57,58,64,65,74,78.

Factorización: 27,56,57,64,126,621.

Fase: 323,362,365,409,410,412,428,689, 691.

Foco: 474-481,483-497,501,502,698,699

Fórmula: 51,100,134,158,192,203,343, 357,358,365,366,371,373-376,378-384,387,388,415, 420,428,430,433,438,443,445, 446,453,457, 458,470,471, 503,534,601,693.
de diferencia del coseno: 373.
de diferencia de seno: 373.
de diferencia para tangente: 375.
de Herón: 421,503,534,535,601,693.
de producto: 100,384.
de suma para tangente: 375,376, 377.
del punto medio: 470.

Fracción: 3,4,6,7,27,80,81,84,114,116, 118,121,122,189,302,604,607, 609,612,613.
algebraica: 27,80,81,84.
impropia: 604,613.
propia: 604,606.

Fracciones compuestas: 84.

Fracciones parciales: 603,604,606, 679.

Función: 189,193-199,203-214,216,218, 219,220-222,226,228-238, 240-250,251-270
constante: 198,214,240.
cosecante: 240,241,253,256,272, 274.
coseno: 255,321,339,350,353,359, 373,397,401,411.
cotangente: 334,339,360.
creciente: 267,271,272,275,296.
cuadrática: 267,320,242,244,253.
cúbica: 242,253,320.
decreciente: 267,271,673,296.
hiperbólica: 193,303,305.
inversa: 193,234,235-238,286, 323,394,395,396,432.
polinómica: 193,240,244,267.
racional: 240, 244,253.
raíz: 240,243,253,320.
secante: 339,361,412.
seno: 255,339.
tangente: 321,339,348,351,359,362, 396,397,411.
trigonométrica inversa: 323,394, 395
uno a uno: 229,230-236.
impares: 358
pares: 358
trigonométrica: 240, 247,251,304, 305,323,332,334,335,336-341, 345-347, 349,358,362,372,387, 395,400,405,406,426,427,429, 432.

G

Generatriz: 582-585, 588,589,596.

Geometría analítica: 433,434.

Grados: 330,331,342,404,405,410,425, 467,514,616.

Gráfica de una función: 210,212,255

Gráficas trigonométricas: 358,395,429, 432.

H

Hexaedro: 567.

Hexágono: 549,550,553,562,594,598.
Hipérbola: 433,467,490,491,492-495, 498,502,699.
Hipotenusa: 28,137,337,340,351,353, 426,523,532,537,539,552.
Hipótesis: 529,641,642,653.

I

Icosaedro: 568,578,598.
Identidades: 103,305,323,340,344,345, 357,366-369,371,382-386,412, 414,427,428,430,649.
recíproca: 340,344,368,369,370,458.
de cocientes: 367.368,371.
de reducción: 428.
impares: 367,368.
pares: 367,368.
pitagóricas: 367.
trigonométricas: 344,366,367,384.
Igualdad de polinomios: 616
Incentro: 526
Inducción matemática: 635-638,639-642,649.
Inecuación: 101, 102, 142-144,146,149, 154.
Intervalo: 138,140,141,145,155,191,199 202,227,305,361,396,397,398, 423.
abierto: 139,191,398.
cerrado: 139,191,198.

L

Lado terminal: 324,334-337,512,
Ley: 116,204,231,285,286,302,387,388, 390-395,431.
del coseno: 387,391,393.
del seno: 387
Línea: 101,160,161,183,188,189,190,212, 232,237,244,254,349,352,353, 409,452,498,506,507,518,525, 531,554,582,590,591.
secante: 554
tangente: 554
Longitud: 3,7,117,137,149,189,190,313, 315,318,324,328,329,337,338, 352,354,355,364,387,391,392, 405,417,421,480,482-484,486, 489,492,497,504,507,508,523, 542,548,549,555-557,572,593, 594,595,692,694,700.

M

Máximo divisor común: 57,65,77, 78,620.
Mediana de un triángulo: 525,526.
Mediatriz de un segmento:14,77, 82,620.
Mínimo común múltiplo:14,77,82,620.
Modelo funcional: 193.194,206,309.
Monomio: 30,31,41,44,616,617.

N

Números: 1-10,12,13,25,28,29,30,32,36, 41,60,62,66,69,70,71,78,81,104, 112,114,124,126,131,135,138, 139,142,143,149,154,162,164, 165,167,178,187,188,191,195, 198,210,211,241,243,244,252, 267,270,271,272,275,276,279, 286,296,305,359,360,367,434, 615,626,633,635,644,649.
enteros: 4,5,6,32,60,69,279,615,626, 708.
irracionales: 7,8,138.
naturales: 2,3,4,5,6,12,29,36,78.
negativos: 4.
positivos: 10,66,252.
racionales: 6,7,81,138.
reales: 1,8,9,10,13,18,25,30,41,60,62, 104,126,131,138,139,142,143, 149,154,162,165,167,178,191, 195,198,210,211,241,243,244, 267,271,272,275,276,279,286,

296,305,359,360,367,434,633, 644,649.

O

Octaedro: 566,575,578,593,595,598.

Ordenada: 161,211,212,319,332,334, 337,358,362,433,435,446,458, 479,483.

Ortocentro: 526.

P

Parábola: 569,570,571,598,599.

Paralelepípedos: 569,570,571,598,599.

Paralelogramo: 421,503,542,543,544, 568,579,601.

Pendiente de una recta: 445,499.

Pentágono: 549,554,566,567,594.

Perímetro: 113,114,117,119,120,126,136, 137,209,221,222,313,314,315, 318,406,420,503,516,522,534, 536,549,553,555,571,573,580, 594,595,597,600.

Período: 290,291,295,296,323,358,359, 359,360,361,362,364,365,401, 411,412,428,689,691.

Pirámide: 503,573,574,576,578,579,580, 581,582,585,594,596,600.

Pitágoras: 209,340,341,343,437,503,504, 537,538,539,601.

Plano: 160,162,164,175-178,182,183,210, 211-213,254,270,324,332,333, 433-436,458,460,462,466,468, 474,475,481,482,490,505,506, 520,563-565,569,578,579,581, 582,584,585,590,595.
cartesiano: 184,210-213,254,433, 434,435,436,458.

Polígono: 503, 542,547,549,550,553,555, 564,566,573,574,594.

Polinomio: 30-34,37,41,44,45,49,52,56, 72,73,74,77,78,80,102,103,104, 128,142,143,145,146,154,244, 246,248,604,605,606,613,615, 604,605,613,615-619,621,622, 627,628-631.

Potenciación: 1,11,12,13,22,26,30,44, 279,289.

Prisma: 503,568,569,571,572,573,578, 579,583,598,599.

Producto notable: 51,89,377.

Proporción: 118,119,213,272,299,302, 303,508-511,518,530,531,538, 539.

Punto: 7,8,117,149,159,160,163,164,175, 178,189,190,210,211,212,214, 221,232,237,240-244,246,248, 249,267-270,296,312,319,324, 332-336,341,353,355,358,372, 404,406,408,409,417-419,425, 433-447, 449-466,468,470-475, 479-483,486,487,489,490,495, 496,498,499,504-507,519,521, 522,526,549,554,562-564,573, 584,589,590,597,683,688,693, 697,700.
coplanares: 506,563.
medio: 433,442,443,444,459,470, 474,481,499,521,525.
colineales: 175,440,459,505,521, 696.

R

Racionalización: 88,92

Radianes: 323,328,329,330,331,374, 404,405,410,425,427,513, 514,557.

Radicación: 1,13,14,26,270.

Radio: 137,194,222,229,301,310,317,318, 323,328,341,342-344,353,357, 468,469-473,500,513,550-552, 554-557,562,577,583-598,672.

Raíces: 65,66,74,102,104,132,133,145, 146,626-632.
de un polinomio: 626,631.
entera: 626,630.

racional: 628, 629,630,631.
con multiplicidad: 627.

Rango:193,320,358.

Razón: 8,237,252,255,323,330,338,374, 418,497,504,508,509,635.

Rectas: 136,162,163,210,233,319,324, 332,393,396,434,435,451,454, 456,457,460,461,473,498,499, 503,505,506,512,517,519,520, 563,571,696.

concurrentes: 506
intersecantes: 506
oblicuas: 520,568.
paralelas: 396,454,499,503,506, 517,696.
perpendiculares: 210,456,499,519.

Reflexión:
horizontal: 259,260.
vertical: 259,260.

Regla de Ruffine: 623.

Relaciones trigonométricas: 347,348.

Rombo: 546,548,551,597.

S

Secante: 304,334,337,338,339,350,361, 399,400,412,503,506,517,520, 554,560.

Segmento de recta: 7,444,459,475.

Semirrecta: 324,507,512,513,519.

Seno: 174,255,303,304,310,321,323,334, 338,339,341,350,351,353,359, 362,372,373,374,378,379-382, 384-388, 390-397,401, 411,428,431,535.

Signos de agrupación: 35,36.

Simetría: 268,269,358,359,360-362,433, 644,681,682.

Sistemas de ecuaciones: 101, 161, 162,167,169,177,178182,187.

Superficie: 582,590,599,600.
cónica: 599
esférica: 590

T

Tangente: 304,323,334,337,338,339,345, 352,354,355,360,375,376,378, 382,383,398,399,412,447,472, 554,559,561.

Teorema: 63,209,272,340,341,343,392, 394,436,437,442,454-456, 458, 503,518,534,535,537-539,601, 621,622,625,626,628-630,633, 642,644,646,648,650,653,654.
de Pitágoras: 209,340,341,343,437, 537,538,539,601.
de residuo: 63,621,622,626.
de Thales: 518.
del binomio de Newton: 642.
del factor: 622,625,630.

Términos: 30-36,40,56,57,65,73,74,90, 119,181,197,207,210,221,281, 309,311,317,318,334,370,379, 380,381,404,452,458,482,503, 504,616,617,621,626,643,645.
indefinidos: 504.
semejantes: 31-36,616,617.

Tetraedro: 566,579,578,598.

Trapecio: 503,546,548,586,587,597,602.

Traslación: 256,257,265,433.
horizontal: 256,257,265.
vertical: 256,264,265.

Triángulo: 28,137,209,311,315,316,317, 318,323,337,338,339,340,341, 343,344,345,347-353,355,374, 387-392,406,407,416,420,423, 427,437-439,458,459,482,491, 503,509,510,521-542,544-547, 549-554,566,568,570,573-576, 579,583,585,589,591,596,597, 601,602,672.
acutángulo: 534
equilátero: 137,209,315,343,344, 523,524,548,551,554,566,568, 583,589,596,597,601.

escaleno: 523.
isósceles: 311,317,318,438,458,523, 547,552,575.
oblicuo: 387, 392,568,569,572,582.
obtusángulo: 524.
rectángulo: 28,137,318,337,338,340, 345,348,352,355,374,437,439, 532,539,541,585,601,602.
semejantes: 531,533,601

Trinomio: 30,56,64,65,67,68,69,72,74, 128,621.

V

Valor absoluto: 101, 149,150,154,191, 240,252,255,262,266,320,362.

Volumen: 27,137,138,208,220,222,229, 309-313,315-317,503,563,572, 573,578,579,580-584,587-589, 591,596,598-600.
cilíndrico: 310,311,583,584,592,599.
cono truncado: 588,600.
de cono: 310,311,317,587,588,589, 599.
de pirámide: 572,573,578,579,581, 594,600.
del prisma: 583,598.
de cubo: 310,311,572,573,598.
de esfera:229,592,593,598,600.
de tronco de pirámides: 580,581, 582,595,600.

Otros títulos de interés:

- **Estadística y Muestreo,**
  Ciro Martínez Bencardino.

- **Matemáticas Financieras Aplicadas,**
  Jhonny de Jesús Meza.

- **Estadística Básica Aplicada,**
  Ciro Matínez Bencardino.

- **Solucionario de Baldor,**
  Diego Henry Sánchez.

- **Fundamentos de Cálculo,**
  Francisco Soler Fajardo,
  Reinaldo Núñez y
  Moisés Aranda Silva.

- **Álgebra Lineal y Programación Lineal,**
  Francisco Soler Fajardo,
  Fabio Molina Focazzio y
  Lucio Rojas Cortés.

Matemáticas
conceptos previos al cálculo

Aplicaciones a ingeniería y ciencias económicas

El presente texto con aplicaciones a ingeniería y ciencias económicas es el resultado de la experiencia y trayectoria de los autores en el trabajo de las matemáticas en relación con los temas que involucran conceptos previos al cálculo. El texto tiene un enfoque metodológico que estimula la autonomía en el aprendizaje, la cual se requiere como soporte fundamental en el proceso autodidacta. Se compone de siete capítulos y tres apéndices; los temas en los capítulos son explícitos con un desarrollo lógico y secuencial, con un gran número de ejemplos seleccionados y su teoría respectiva, sin sacrificar el rigor que se requiere en los conceptos básicos.

Los temas que se presentan en los capítulos son:

El conjunto de los números reales
Expresiones algebraicas
Ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones
Funciones y modelos funcionales
Trigonometría plana
Geometría analítica
Geometría euclidiana.

Como complemento a los capítulos anteriores se desarrollan tres apéndices de temas seleccionados y de rigor matemático que se consideran pertinentes y útiles en el abordaje de conceptos previos al cálculo; los cuales pueden ser opcionales, de acuerdo a los programas de asignatura.

Apéndice A. Fracciones parciales
Apéndice B. Polinomios enteros
Apéndice C. Inducción matemática

Área: Ciencias Exactas
Colección: Matemáticas

ECOE EDICIONES

ISBN 978-958-648-778-8